2次元物体散乱に関する数値計算

愛媛大学大学院　理工学研究科　機械数理研究室　八木　航己

1. 緒　言

本講演では既知の形状関数を持つ, 2次元物体散乱に関する数値計算について報告する。
Ω を2次元無限領域とする次の波動方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \Delta v(x,t) = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (1) \\ v(x,t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \quad (2) \end{cases}$$

ただし,

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2) \\ \Delta : 2\text{次元ラプラシアン} \end{cases}$$

である.

文頭で述べた散乱波は, この方程式から時間と空間の変数分離で得られるヘルムホルツ方程式 (空間変数と分離定数・固有値の方程式) から求められる. この散乱波 v から散乱振幅と呼ばれる散乱体の散乱特性を表す量が導かれる. これらの量は散乱体の情報を反映している量として逆問題において必要不可欠なものとなっている.
本講演は境界要素法をもちいた数値解析により散乱振幅を求めた.

2. 数学的考察

Ω を摂動された2次元半無限空間とする.
式 (1),(2) を変数分離すれば次の x に関する Helmholtz 方程式と境界条件を得る.

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2) u(x) = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (3) \\ u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \quad (4) \end{cases}$$

物理的直感に基づいて全波 $u(x)$ を

$$u(x) = u_0(x) + u_s(x)$$

とおく. また,$u_0(x)$ は次のように与える.

$$u_0(x) = (2\pi)^{-1}\{exp(ix\hat{\kappa}) - exp(ix\kappa)\}$$

なお,

$$\begin{cases} \kappa = (\kappa_1, \kappa_2) \\ \hat{\kappa} = (\kappa_1, -\kappa_2) \end{cases}$$

となっている.
$u_s(x)$ は摂動に関する散乱波である.

$u_0(x)$ は Helmholtz 方程式を満たすので, 散乱波 $u_s(x)$ も同様に Helmholtz 方程式を満たすことが分かる. ここで散乱波 $u_s(x)$ に次の無限遠方で反射しない条件であるゾンマーフェルトの放射条件:

$$\frac{\partial u_s(x)}{\partial r} - \kappa u_s(x) = o(\frac{1}{\sqrt{r}}) \quad (r = |x| \ \to +\infty)$$

のもとで積分方程式化すれば次の式 (5) を得る.

$$u_s(\xi) = \int_{\partial\Omega_c} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(x) G(x,\xi) - \frac{\partial G}{\partial n}(x,\xi) u(x) \right\} d\Gamma \quad (5)$$

Dirichlet 条件より (5) は次の式 (6) のように表される.

$$u_s(\xi) = \int_{\partial\Omega_c} \frac{\partial u}{\partial n}(x) G(x,\xi) d\Gamma \quad (6)$$

以上より

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \int_{\partial\Omega_c} \frac{\partial u}{\partial n}(x) G(x,\xi) d\Gamma \quad (7)$$

ここで $G(x,\xi)$ は Helmholtz 作用素の基本解であり,Hankel 関数を用いて次のように表される.

$$G(x,\xi) = \frac{i}{4}\{H_0^{(1)}(\kappa|x-\xi|) - H_0^{(1)}(\kappa|x-\hat{\xi}|)\}$$

なお,$H_0^{(1)}$ は 0 次の Hankel 関数である.

散乱振幅 $A(r,w,\phi)$ は次の漸近展開で表すことができる:

$$u(x) = u_0(x) + A(r,w,\phi)\frac{e^{i\kappa R}}{\sqrt{R}} + o(R^{-\frac{1}{2}}) \quad (R = |\xi|\ ,\ \theta = \frac{\xi}{R})$$

この式を以下のようにして解き, 散乱振幅 $A(r,w,\phi)$ を求める.$R \to \infty$ において

$$\{u(x) - u_0(x)\}\sqrt{R}e^{-i\kappa R} = A(r,w,\phi) + o(1)$$

3. 数値解析

境界要素法を用いて数値解析をする. 境界要素法は式 (7) の右辺の被積分関数 $u(x)$ に該当する Neumann データの近似解を割り出し, それをもとに再び式 (7) から $u(\xi)$ の近似解を求める手法である. 近似解は, 境界を N 個の節点を結ぶ多角形で近似し, それぞれの節点に対する基底関数の 1 次結合で求める. また, 実際の計算は C 言語を用いておこなった.

研究結果は講演時に述べる.