

非線形シュレーディンガー方程式の固定振幅での逆散乱問題について

渡邊 道之 (新潟大・教育)*

1. 問題の背景

非線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + q(x)|u|^{p-1}u \quad (1)$$

について考える. $U(t)f$ を初期値 f の解とする. $U_0(t)g$ を初期値 g の free solution とする. $t \rightarrow \pm\infty$ のとき, $U(t)f \rightarrow U_0(t)f_{\pm}$ であるとする. このとき, 対応 $S: f_- \mapsto f_+$ を散乱作用素という.

Strauss は 1974 年の論説 [3] のなかで, 「From knowledge of the scattering operator S and the free dynamics $U_0(t)$, we want to recover the perturbed dynamics $U(t)$ 」という散乱の逆問題について考察し, 2 つの例を提示した. 1 つは非線形 Klein-Gordon 方程式. もう 1 つは非線形 Schrödinger 方程式 (1) である. この論説のなかで, Strauss は「 S と $U_0(t)$ から非線形項の係数 $q(x)$ を決定できる」と述べている. 線形 Schrödinger 方程式の散乱の逆問題はこれ以前から研究されているが, 非線形 Schrödinger 方程式の散乱の逆問題に関する研究は, Strauss の結果が初めてであろう.

Strauss の方法の骨格は, 散乱作用素の積分表示

$$(S\phi)(x) = \phi(x) - i \int_{-\infty}^{\infty} U_0(t)q(x)|u(t, x)|^{p-1}u(t, x) dt$$

において, 解 $u(t, x)$ を free solution $U_0(t)\phi$ で近似するとき, $\phi(x)$ に小さいパラメータ $\varepsilon > 0$ を入れ, 極限をとることである. すなわち, 次の等式が成り立つことが重要である.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\varepsilon^p} \langle (S - I)(\varepsilon\phi), \phi \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} q(x) |U_0(t)\phi(x)|^{p+1} dx dt. \quad (2)$$

ここで, $\phi(x)$ をうまくとると, $q(x)$ の任意の点の値が取り出せる. Strauss が提示した例は, まとめると, 次のようになる. 非線形指数 p は既知とする. このとき, 散乱作用素の「低振幅極限」から, 非線形項の係数 $q(x)$ を一意に決定できる.

「低振幅極限」の方法では, (2) の左辺の量は明らかに非線形指数 p に依存する. このため, 「低振幅極限」を考える限り, 非線形指数 p は既知でなければならない.

Strauss の例から 30 数年経つが, 散乱作用素から非線形項を決定する逆問題では, 「低振幅極限」を用いた方法が (講演者の知る限り) 唯一の方法であった. したがって, 散乱作用素から非線形指数 p を決定する問題は未解決であった. さらに, 「低振幅極限」を用いると, 小さい散乱データしか扱えないため, 任意の大きさの散乱データから非線形項を一意に決定できるかについても謎であった.

本研究は科研費 (課題番号:23740104) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q55, 81U40

キーワード: Nonlinear Schrödinger, Inverse scattering

* 〒950-2121 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地 新潟大学 教育学部

e-mail: mwatanab@ed.niigata-u.ac.jp

この講演では、散乱データの「高振動極限」を用いる手法 ([1]) を非線形方程式に応用することで、散乱作用素 S から非線形指数 p と非線形項の係数 $q(x)$ を一意に決定できることを紹介する。この方法では、振幅を固定しているので、任意の大きさの散乱データから p と $q(x)$ を一意に決定できることもわかる。

2. 問題の定式化と結果

散乱の逆問題を、次の枠組みの中で考える。 p と $q(x)$ は次の仮定を満たすとする。

$$\mathbf{A.1} : n \geq 3, \quad p \in I := \left(1 + \frac{4}{n}, 1 + \frac{4}{n-2}\right), \quad \mathbf{A.2} : q \geq 0, \quad q \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)(=: \mathcal{Q})$$

このとき、散乱作用素 $S(p, q(x)) : H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ は well-defined であり, bounded, homeo., isometric ($=: \mathcal{H}$) となる。 ([2]) 。

散乱の逆問題は、散乱写像

$$S : I \times \mathcal{Q} \ni (p, q(x)) \mapsto S(p, q(x)) \in \mathcal{H}$$

の性質、とくに (1) S の単射性, (2) S^{-1} の連続性, (3) S の反転公式, (4) S の値域, について調べる問題である。

ここでは、単射性の結果について述べる。 p と $q(x)$ の再構成公式については、講演のときに紹介する。

$$\mathbf{A.1'} : n \geq 3, \quad p \in I' := \left(1 + \frac{4}{n}, 1 + \frac{4}{n-2}\right) \cap \left(\left[\frac{n}{2}\right], 1 + \frac{4}{n-2}\right)$$

$$\mathbf{A.2'} : q \in \mathcal{Q}, \quad q(x) \text{ は短距離型 } (=:\mathcal{Q}_{SR}).$$

定理 2.1. $p \in I', q \in \mathcal{Q}'$ とする。このとき散乱写像 $S : I' \times \mathcal{Q}_{SR} \rightarrow \mathcal{H}$ は単射である。

参考文献

- [1] Enss, V. and Weder, R., The geometrical approach to multidimensional inverse scattering. J. Math. Phys. 36 (1995), 3902–3921.
- [2] Ginibre, J. and Velo, G., Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations. J. Math. Pures Appl. (9) 64 (1985), 363–401.
- [3] Strauss, W. A., Nonlinear scattering theory, in "Scattering Theory in Mathematical Physics", edited by Lavita, J. A., and Marchand, J.-P. (Reidel, Dordrecht, 1974), pp. 53–78.