

Pointwise positivity of solutions of high dimensional wave equations and its application to nonlinear problems¹

若狭恭平

公立はこだて未来大学大学院システム情報科学研究科修士2年

e-mail : g2111045@fun.ac.jp

本講演では、非コンパクト台かつ非ゼロ初期値をもつ半線形波動方程式に対する初期値問題の解の爆発定理が得られたことを報告する。

次の未知関数 $u = u(x, t)$ に対する初期値問題を考える。

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F(u) & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & \text{for } x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \quad (0.1)$$

ここで、 $n \geq 2$ であり、 $f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ と仮定する。非線形項に対する仮定は、 $F(u) = |u|^p$ または、 $F(u) = |u|^{p-1}u$ ($p > 1$) である。

非コンパクト台な初期値をもつ (0.1) に対しては、以下のような考察が知られている；

【浅倉予想 [1]】ある正定数 C に対し (f, g) は、

$$f(x) \equiv 0, \quad g(x) \geq \frac{C}{(1 + |x|)^{1+\kappa}} \quad (0.2)$$

をみたすとする。このとき、 $0 < \kappa < \kappa_0$ ならば (0.1) の解は有限時間内に爆発し、

$$(1 + |x|)^{1+\kappa} \left(\sum_{|\alpha| \leq [n/2]+2} |\nabla_x^\alpha f(x)| + \sum_{|\beta| \leq [n/2]+1} |\nabla_x^\beta g(x)| \right) \quad (0.3)$$

が十分小さく、 $\kappa \geq \kappa_0$ かつ $p > p_0(n)$ ならば解が時間大域的に存在する。ここで、 $\kappa_0 = \frac{2}{p-1}$ である。 $p_0(n)$ は、Strauss 指数と呼ばれ、(0.1) の初期値の台がコンパクトの場合の解の時間大域存在と有限時間内爆発を分ける臨界冪であり、 $(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$ の正根である。この予想は、 $n = 3$ の場合に Asakura [1] が $\kappa = \kappa_0$ の場合を除き解決し、その後、様々な研究者によって他の空間次元に拡張され完全に解決された経緯がある。

ここで、(0.2) の爆発条件の下では、時間大域解の存在条件 (0.3) の f に関する条件の最適性が不明であることに注意する。この最適性を調べるためには、 $f \not\equiv 0$ かつ $g \equiv 0$ の場合の爆発定理を与える必要がある。この場合の

¹Mohammad A. Rammaha 先生 (University of Nebraska-Lincoln)、高村博之 先生 (公立はこだて未来大学)、上坂洋司 先生 (日本大学) との共同研究

爆発解析は、空間 2 次元の場合に Uesaka [3] によって始められたが、最終的には、Takamura & Uesaka & Wakasa [2] によって一般次元 ($n \geq 2$) での爆発解析がなされ、さらには、(0.3) の条件を改良することに成功した。それが、以下の“改良型”浅倉予想である。

【“改良型”浅倉予想 [2]】ある正定数 R が存在して (f, g) は、 $|x| \geq R$ に対して

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{かつ} \quad g(x) \geq \frac{\phi(|x|)}{(1 + |x|)^{1+\kappa}}, \quad (0.4)$$

または

$$f(x) > 0, \quad \Delta f(x) + F(f(x)) \geq \frac{\phi(|x|)}{(1 + |x|)^{2+\kappa}} \quad \text{かつ} \quad g(x) \equiv 0, \quad (0.5)$$

をみたすとする。このとき

$$0 < \kappa < \kappa_0 \quad \text{かつ} \quad \phi \equiv \text{正定数}, \quad (0.6)$$

または

$$\kappa = \kappa_0 \quad \text{かつ} \quad \phi \text{ は正值, 単調増加で } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(|x|) = \infty \quad (0.7)$$

ならば、(0.1) の解は有限時間内に爆発する。他方、

$$(1 + |x|)^{1+\kappa} \left(\frac{|f(x)|}{1 + |x|} + \sum_{0 < |\alpha| \leq [n/2]+2} |\nabla_x^\alpha f(x)| + \sum_{|\beta| \leq [n/2]+1} |\nabla_x^\beta g(x)| \right) \quad (0.8)$$

が十分小さく、 $\kappa \geq \kappa_0$ かつ $p > p_0(n)$ ならば (0.1) の解は時間大域的に存在する。

本講演では、一般次元において、(0.4) と (0.5) の双方で扱われていない $f \not\equiv 0$ かつ $g \not\equiv 0$ の場合の (0.1) の解の爆発定理が得られたことを報告する。また、この結果を応用して、(0.1) の非線形項が $|u|^p |u_t|^q$ (ここで、 $p = 0$ または $p > 1$ かつ $q > 1$) の場合の解の爆発定理が得られることも紹介したい。

References

- [1] F.Asakura, *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decaying initial data in three space dimensions*, Comm. in Partial Differential Equations, **11(13)**(1986), 1459-1487.
- [2] H.Takamura & H.Uesaka & K.Wakasa, *Sharp blow-up for semilinear wave equations with non-compactly supported data*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Supplement 2011, W.Feng & Z.Feng & M.Grasselli & A.Ibragimov & X.Lu & S.Siegmund & J.Voigt (eds.), “Dynamical Systems, Differential Equations and Applications” vol. II, pp.1351-1357, AIMS, 2011.
- [3] H.Uesaka, *Non-negative solutions of the Cauchy problem for semilinear wave equations and non-existence of global non-negative solutions*, More Progress in Analysis (ed. H.G.W.Begehr & F.Nicolosi), Proceedings of the 5th International ISAAC Congress (Catania, Italy, 25-30 July 2005), 571-579, World Scientific, 2009.