ON BEHAVIOR OF SIGNS FOR THE HEAT EQUATION AND A DIFFUSION METHOD FOR DATA SEPARATION

梅田典晃　　　(東京大学大学院数理科学研究科 特任研究員)

本研究は儀我美保氏 (東大数理)、儀我美一教授 (東大数理) 及び大塚岳氏 (群馬大工) との共同研究であり、本講演ではこの中で特に講演者が関わった部分を扱う.

線形熱方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^d, \end{cases} \tag{1}$$

を考える。ここで $d \geq 1$ とする。この解が初期値 u_0 の影響をどのように受けるかを考える.

問題 (1) の解は熱核を使い

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} u_0(y) \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} dy \tag{2}$$

の形で表されることはよく知られている. 初期値の形状によって、原点における初期値の時間方向における符号変化について考える. 問題 (1) の解に対して次のように定義される diffusive sign:

$$S_D[u_0](x) = \lim_{t \downarrow 0} \operatorname{sgn}\, u(x,t)$$

を用いる. ここで符号は

$$\operatorname{sgn}\, a = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

と定義される. この $S_D[u_0](x)$ は $\operatorname{sgn}\, u_0(x)$ と必ずしも一致しない. 例えば $d = 1$ のとき初期値が

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x > 2, \\ 0, & -2 < x \leq 2, \\ -1, & x \geq -2. \end{cases}$$

としたとき、$S_D[u_0](1) = 1$、$\operatorname{sgn}\, u_0(1) = 0$ となり、この二つの値は異なる. また、$S_D[u_0]$ は well-defined とは限らない.

本講演では次の2つの定理について考える. 一つ目の定理は $S_D[u_0]$ が well-defined にならない場合をあげる.

Theorem 1. 次元 $d=1$ とする。初期値 u_0 が $k \geq 8$ に対し

$$u_0(x) = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{k}\right)^n x, & x \in \left[\dfrac{2^n+1}{2^n}, \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}\right) \quad \text{with } n \geq 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

の形をしているとする. このとき (1) の解は原点において $t=0$ の近くで無限回符号変化する. つまり $S_D[u_0](0)$ は well-defined ではない.

二つ目の定理では $S_D[u_0]$ が well-defined になることが必ずしも自明でない場合をあげる. この定理で扱う A の特性関数 χ_A は

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

と定義される。

Theorem 2. 次元 $d=2$ とする. 初期値 u_0 が

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{l} \chi_{A_k}(x) \tag{4}$$

の形をするとする. ここで自然数 l は有限値、A_k は各 $k=1,2,...,l$ に対してそれぞれが軸に平行な辺を持つ長方形の領域とする. このとき、(1) の解は任意の $x \in \mathbf{R}^2$ において $t=0$ の近くで解の符号変化は有限回しか起きない. つまり任意の $x \in \mathbf{R}^2$ に対して $S_D[u_0](x)$ は well-defined である.