

第二音波の方程式の解の爆発

杉山 裕介 (すぎやま ゆうすけ)

東京理科大学大学院理学研究科数学専攻 D2

1 導入

本講演では以下のような非線形波動方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = u \partial_x (u \partial_x u), & (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

ここで $u(t, x)$ は実数値未知関数である.

この方程式は第二音波と呼ばれる超流動体中の温度波を記述する方程式である.

初期値 u_0 について次を仮定する. ある正定数 A が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して次を満たす.

$$u_0(x) \geq A. \quad (2)$$

この仮定によって, 時刻 $t = 0$ で (1) の方程式が退化しなくなるため, 強圧的な双曲型方程式と見なすことができる. 時間局所解の存在定理を紹介する ([3]).

proposition 1 (K. Kato and S.). $s > \frac{1}{2}$ とし, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\partial_x u_0, u_1 \in H^s(\mathbb{R})$ とする. さらに正定数 A があって $u_0(x) \geq A$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) と仮定する. この時, 初期値問題 (1) の 時間局所解 u は次のクラスで一意的に存在する.

$$\begin{aligned} u - u_0 &\in \bigcap_{j=0,1,2} C^j([0, T]; H^{s-j+1}(\mathbb{R})), \\ u(t, x) &\geq A/2, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2 主結果 (解の爆発)

第二音波の方程式の解の爆発について考える. Proposition 1 を繰り返し用いて, (1) の解を延長していくことを考えると, 解の延長 (Proposition 1 を用いた解の延長) ができなくなる時刻 T において次の (A) と (B) のどちらかが起こる.

$$(A) \quad \overline{\lim}_{t \nearrow T} \|\partial_t u(t)\|_{H^s} + \|\partial_x u(t)\|_{H^s} = \infty.$$

または

$$(B) \quad \lim_{t \nearrow T} \inf_{[0, t] \times \mathbb{R}} u(t, x) = 0.$$

この講演では, (A), (B) どちらかが起きるとき解が爆発すると呼び, (A), (B) が起こる十分条件をそれぞれ与える ([2]).

Theorem 2. A を正定数, $s > \frac{1}{2}$, $\phi \in H^{s+1}(\mathbb{R})$ として, $u(t, x)$ は, 次を初期値に持つ (1) の解とする.

$$u_0(x) = A + \epsilon \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad u_1(x) = -u_0(x) \partial_x u_0(x), \quad (3)$$

この時, ϵ が十分小ならば, ある時刻 T が存在して次が成り立つ.

$$\lim_{t \nearrow T} \|\partial_t u(t)\|_{H^s} + \|\partial_x u(t)\|_{H^s} = \infty. \quad (4)$$

Theorem 3. A を正定数とする, (1) の初期値 $u(0, x) = A + \phi(x) > 0$, $\partial_t u(0, x) = u_1(x)$ が次を満たすとする,

$$\begin{aligned} \phi &\in H^{s+1} \setminus \{0\}, \quad u_1 \in H^s, \\ \phi, \quad u_1 &\text{ compact な台を持つ,} \\ u_1(x) \pm u_0(x) \partial_x u_0(x) &\leq 0, \text{ for } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

この時, ある時刻 T が存在して, (1) の一意解 $u \in C^1([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ が存在しある $x_0 \in \mathbb{R}$ について $\lim_{t \rightarrow T} u(t, x_0) = 0$ が成り立つ.

3 証明方針

第二音波の方程式と似た方程式 :

$$\partial_t^2 u = c(u) \partial_x (c(u) \partial_x u) \quad (5)$$

の初期値問題の解爆発が R. T. Glassey, J. K. Hunter, Y. Zheng ([1]) によって考えられている. しかしながら彼らは, この方程式にある定数 c_1, c_2 があって

$$0 < c_1 \leq c(r) \leq c_2, \quad r \in \mathbb{R},$$

という仮定を付している. この仮定に代わるアприオリ評価を行い彼らの証明に倣って Theorem 1 は示される.

Theorem 2 は, P. Zhang, Y. Zheng([4]) による (5) の初期値問題の解の大域可解性定理を応用する.

References

- [1] R. T. Glassey, J. K. Hunter, Y. Zheng, Singularities of a variational wave equation. J. Differential Equations **129** (1996). 49-78.
- [2] K. Kato, Y. Sugiyama, Blow up of solution to the second sound equation in one space dimension, to appear in Kyusyu J. Math..
- [3] K. Kato, Y. Sugiyama, Local existence and uniqueness theory for the second sound equation in one space dimension, J. Hyperbolic Differential Equations **9** (2012), 177-193.
- [4] P. Zhang, Y. Zheng, Rarefactive solutions to a nonlinear variational wave equation of liquid crystals, Comm. Partial differential equations **26** (2001), 381-419.