2 次元半無限領域における Rayleigh 波に関する数値計算

愛媛大学大学院理工学研究科　機械数理研究室　白石克郎

緒言

一般に地震波などに代表される 3 次元波動伝播問題は、縦波 (P 波)、横波 (S 波) に加え、Rayleigh 波と呼ばれる表面波が組み合わさり、複雑な挙動を示すことが知られている。本研究は半無限領域における弾性波動方程式に R 波が発生するような境界を与え、数値解析によって R 波の伝播の様子を検証することを目的とする。しかい s、差分化した 3 次元方程式は数値解析が困難であるため、2 次元における次のような方程式を考える。

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}(x_1, x_2, t) = (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u}(x_1, x_2, t) + \mu \Delta \boldsymbol{u}(x_1, x_2, t) \qquad (-\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 < \infty, t > 0) \\ \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\delta_{j2} + \mu(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_j}(x_1, 0, t) = 0 \qquad (-\infty < x_1 < \infty, t > 0, j = 1, 2) \\ \boldsymbol{u}(x_1, x_2, 0) = \boldsymbol{f}_1(x_1, x_2) \qquad (-\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 < \infty) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = \boldsymbol{f}_2(x_1, x_2) \qquad (-\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 < \infty) \end{cases} \tag{1}$$

ただし、$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ は 2 次元の変位を表し、ρ は領域の密度、λ, μ は Lame の弾性定数、δ は Kronecker delta である。この境界条件は R 波が発生する Neumann 条件である。Neumann 境界以外の境界には波の反射を防ぐため、波が抜ける境界条件を与えた。

数学的準備

フーリエ解析

式 (1) を変数分離して得られる Helmholtz 方程式の基本解

$$\begin{cases} \text{P 波入射とその反射波を記述する} \quad \mathit{\Psi}_P(x,\,k) \\ \text{S 波入射とその反射波を記述する} \quad \mathit{\Psi}_S(x,\,k) \\ \text{R 波入射とその反射波を記述する} \quad \mathit{\Psi}_R(x,\,p) \end{cases}$$

を用いて定義される一般化された Fourier 変換を、次のように書く。

$$\begin{cases} F_j\,\mathbf{f}(k) = \int_{R^2_+} \overline{\mathit{\Psi}_j(x,\,k)} \cdot \mathbf{f}(x)\rho dx \quad (j = P, S) \\ F_R\,\mathbf{f}(p) = \int_{R^2_+} \overline{\mathit{\Psi}_R(x,\,p)} \cdot \mathbf{f}(x)\rho dx \end{cases}$$

このとき式 (1) の解 $\mathbf{u}(x,\,t)$ は

$$\sum_{j=P,S} F_j^* \Big\{ \cos(C_j\,|\,k\,|\,t) F_j f_1(x) + \frac{\sin(C_j\,|\,k\,|\,t)}{C_j\,|\,k\,|} F_j f_2(x) \Big\} + F_R^* \Big\{ \cos(C_R\,|\,p\,|\,t) F_R f_1(x) + \frac{\sin(C_R\,|\,p\,|\,t)}{C_R\,|\,p\,|} F_R f_2(x) \Big\}$$

と書けることが知られている。ただし、$C_P,\,C_S,\,C_R$ はそれぞれ P 波、S 波、R 波の速さである。これによって $\mathbf{u}(x,\,t)$ は、P 波、S 波、そして R 波成分にそれぞれ分解することができる。

差分化

波動方程式を中心差分を用いて差分化する。まず、空間 x_1, x_2 方向の間隔を h_1, h_2、時間 t の間隔を s とする。次に $x_1 = x_i = ih_1, x_2 = x_j = jh_2, t = t_k = ks$ として $\boldsymbol{u}(x_i, x_j, t_k) = \boldsymbol{u}_{i,j}\ k$ と置き換えると、式 (1) は以下のように差分化できる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_{i,j}^{k+1} =& 2\mathbf{u}_{i,j}^{k} - \mathbf{u}_{i,j}^{k-1} + \frac{s^2}{\rho {h_1}^2} B_{11} \left(\mathbf{u}_{i+1,j}^{k} - 2\mathbf{u}_{i,j}^{k} + \mathbf{u}_{i-1,j}^{k} \right) \\
&+ \frac{s^2}{4\rho h_1 h_2} B_{12} \left(\mathbf{u}_{i+1,j+1}^{k} - \mathbf{u}_{i+1,j-1}^{k} - \mathbf{u}_{i-1,j+1}^{k} + \mathbf{u}_{i-1,j-1}^{k} \right) \\
&+ \frac{s^2}{\rho {h_2}^2} B_{22} \mathbf{u}_{i,j+1}^{k} - 2\mathbf{u}_{i,j}^{k} + \mathbf{u}_{i,j-1}^{k})
\end{aligned}
$$

ただし、$B_{11} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix} \right), B_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda+\mu \\ \lambda+\mu & 0 \end{smallmatrix} \right), B_{22} = \left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu \end{smallmatrix} \right)$ であり、$i,\ j,\ k$ の範囲は $I,\ J$ を十分大きくとり、それぞれ $i = 1, 2, \cdots, I-1,\ j = 1, 2, \cdots, J-1,\ k = 0, 1, 2, \cdots$ である。

エネルギー

式 (1) の解に対するエネルギー密度関数 $e\left(\mathbf{u}(t)\right)$ は、以下の通りである。

$$
e\left(\mathbf{u}(t)\right) = \frac{1}{\rho} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2
$$

ここで、式 (2.1) の $e\left(\mathbf{u}(t)\right)$ を用いてエネルギー密度の領域全体の総和を

$$
E\left(\mathbf{u}(t)\right) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e\left(\mathbf{u}(t)\right) dx_1 dx_2
$$

と書くと、$E\left(\mathbf{u}(t)\right) = E\left(\mathbf{u}(0)\right)$ が成り立つことが知られている。この等式を利用することで、差分化された式 (1.1) が正しく計算されているかどうか確認できる。