# The Poincaré inequality for vector fields on Riemannian manifolds with positive sectional curvature

齋藤　純一

（都立産業技術高等専門学校, Tokyo Metroporitan College of Industrial Technology）

$(M, g)$ を 2 次元 $C^\infty$ Riemann 多様体とする．
$M$ は $\mathbf{R}^3$ にはめ込まれているとし，$f : M \to \mathbf{R}^3$ を $C^\infty$ のはめ込み (immersion) とする．さらに $g$ は，$\mathbf{R}^3$ の標準的内積 (inner metric)$\langle\cdot,\cdot\rangle$ の $f$ による引き戻し (pull-back) で定義されているとする．

$$g_p\big(u, v\big) = \Big\langle Df_p(u), Df_p(v)\Big\rangle, \text{ for } \forall u, v \in T_pM,$$

ここで $Df_p$ は 写像 $f$ の $p$ における微分である．

$(M, g)$ 上の連続関数 $\varphi$ における測度 (measure) $\displaystyle\int_M \varphi\, d\nu_g$ から，$M$ 上のベクトル場に関する $L^2$ ノルム $|\cdot|_{L^2(M)}$ を次のように定義する．

$$|u|^2_{L^2(M)} = \int_M g(u, u)\, d\nu_g \quad \text{for } u \in TM.$$

2 次元球面 $S^2 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1^2\big\}$ に，包含写像 (inclusion mapping) $\iota : S^2 \to \mathbf{R}^3$ による $\mathbf{R}^3$ の標準的な内積の引き戻しで，Riemannian metric $h$ を導入する．

$$h_p\big(u, v\big) = \Big\langle D\iota_p(u), D\iota_p(v)\Big\rangle, \text{ for } \forall u, v \in T_pS^2.$$

$S^2$ 上のベクトル場に関する Poincaré タイプの不等式については，次が得られている[1]．

$$|u|_{L^2(S)} \leqq 2\pi|\nabla u|_{L^2(S)} \quad \text{for } u \in TS^2,$$

ここで $\nabla$ はレビチビタ接続である．

この不等式を利用して，$M$ 上のベクトル場に関する Poincaré タイプの不等式をつくる．
球面 $S^2$ と $M$ とにある程度の関連を持たせるため，$M$ に次の仮定を加える．

（仮定） $M$ を完備かつ単連結とし，$M$ の断面曲率 $K$ は次の不等式を満たすとする．

$$\frac{1}{4} < \delta \leqq K \leqq 1.$$

この仮定により $M$ はコンパクトになり，さらに次の定理が成り立つことが知られている．

**Theorem 1** (球面定理)**.** （仮定）を満たす $M$ は $S^2$ に同相である．

講演ではこの定理を利用して，$S^2$ の $L^2$ ノルムと $M$ の $L^2$ ノルムの同値関係を示して Poincaré タイプの不等式を導く方法の概要を説明する．

[1]前回の講演で示した係数とは異なっている．