非斉次線形微分方程式系の解の Lyapunov 数

石田 晴久 (電気通信大学 共通教育部 数学部会)

於：公立はこだて未来大学

この講演では昨年の第２６回松山キャンプで話した可積分な非斉次項をもつ線形微分方程式系の特殊解の Lyapunov 数を可積分でない非斉次項をもつ場合に拡張した結果について述べる．これは李 炯宙氏の修士論文の一結果 ([3] の定理 5.2) である．ここでは次のような変数係数の線形常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + f(t) \quad \text{in} \quad [t_0, \infty) \tag{2}$$

を考察する．但し，$A(t)$ は n 次の正方行列で，各成分は $[t_0, \infty)$ で有界連続と仮定する．同様に，$f(t)$ は $[t_0, \infty)$ で連続で，$x(t)$, $y(t)$ は $[t_0, \infty)$ で連続的微分可能な解である．

まず，手始めに定数係数の場合を思い出すと，基本行列 e^{tA} のスペクトル分解によって，(1), (2) の一般解の精密な漸近挙動を知ることができる (§2, Ishida-Lee [2])．ここで，e^{tA} のスペクトル分解とは

$$e^{tA} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{h(\lambda)-1} \frac{t^j}{j!}(A - \lambda E)^j P_\lambda$$

を指す．但し，$\sigma(A)$ は A の固有値全体の集合，P_λ は一般固有空間 $G(\lambda, h(\lambda)) = \{\, x \mid (A - \lambda E)^{h(\lambda)} x = 0 \,\}$ への射影行列，$h(\lambda)$ は固有値 λ の重複度をそれぞれ表す．また，初期データ $x(t_0) = w$ に対して，その度数 $d_w(\lambda)$ を

$$d_w(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{if } P_\lambda w = 0, \\ k & \text{if } (A - \lambda E)^{k-1} P_\lambda w \neq 0,\ (A - \lambda E)^k P_\lambda w = 0 \end{cases}$$

で定める．そのとき，(1) の初期データ $x(t_0) = w$ をもつ任意の解 $x(t)$ について

$$\|x(t)\| = \text{const.}\ e^{\alpha t} t^\beta + o\left(e^{\alpha t} t^\beta\right) \quad (t \to \infty)$$

が成立する．ここで，$\alpha = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re} \lambda$, $\beta = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} d_w(\lambda)$ である．そこで，変数係数の場合にも $\limsup\limits_{t \to \infty} \|A(t)\| < \infty$ のときに α の代替物として，ベクトル値関数 $u : [t_0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ の Lyapunov 数を

$$\lambda(u) = \limsup_{t \to \infty} \frac{\log \|u(t)\|}{t}$$

と定義する．この定義は A. M. Lyapunov 自身のものではなく，O. Perron [4] に負う．勿論，a, b が定数のとき，$\lambda\left(e^{at} t^b\right) = \operatorname{Re} a$ である．さて，変数係数のときによく研究されているのは次の２つの場合である：

(i) $A(t)$ が或る定数行列 A_0 に近づく．

(ii) $A(t)$ が対角行列に近づく．つまり，$\lim\limits_{t \to \infty} a_{jk}(t) = 0$ $(j \neq k)$

(i) の場合は一昨年に李君が新潟で述べたので割愛する．(ii) の場合を考える動機は，$A(t)$ が対角行列の場合，$A(t) = \mathrm{diag}(a_{11}(t), \cdots, a_{nn}(t))$ のときには，(1) は n 個の単独方程式 $x_j'(t) = a_{jj}(t)x_j(t)$ になり，その解の Lyapunov 数が直ちに

$$\lambda(x_j) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\, a_{jj}(s)\, ds \tag{3}$$

で与えられるためである．(ii) の場合に最初に重要な結果を得たのは Perron [4] である．便宜上，以下では十分大きな t に対して，$\mathrm{Re}\, a_{11}(t) \geqq \mathrm{Re}\, a_{22}(t) \geqq \cdots \geqq \mathrm{Re}\, a_{nn}(t)$ を仮定しておく．

定理１ (Satz 7 in Perron [4], p. 765). 次の２つの条件を課す．

$$\lim_{t\to\infty} a_{jk}(t) = 0 \quad \text{if} \quad j \neq k, \tag{4}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) - \mathrm{Re}\, a_{j+1,j+1}(t)\right) > 0. \tag{5}$$

そのとき，(1) の n 個の一次独立な解 $x^1(t), \cdots, x^n(t)$ が存在して

$$\lambda(x^j) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\, a_{jj}(s)\, ds. \tag{6}$$

その後，Wang-Mai [5] が条件 (5) を弱められることを示した．

定理２ (Corollary 2 in Wang-Mai [5], p. 903). $a^\sharp(t) = \max_{j\neq k} |a_{jk}(t)|$ とおく．次の２つの条件を仮定する．

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} a^\sharp(s)\, ds = 0, \tag{7}$$

$$\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) - \mathrm{Re}\, a_{j+1,j+1}(t) \geqq 2en\, a^\sharp(t) \ \text{ for large } t. \tag{8}$$

そのとき，(1) の n 個の一次独立な解 $x^1(t), \cdots, x^n(t)$ が存在して，(6) を満たす．

注意１．(7) で，特に $\lim_{t\to\infty} a^\sharp(t) = 0$ の場合が考えられる．よって，$\lim_{t\to\infty} \left(\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) - \mathrm{Re}\, a_{j+1,j+1}(t)\right) = 0$ のときに定理１と同じ結論が成立する場合がある．

例１ (Example 2 in Wang-Mai [5], p. 903). $\alpha > 0$ として

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 + 4e\, t^{-\alpha} & t^{-\alpha} \\ t^{-\alpha} & 1 \end{bmatrix}$$

とする．このとき，$\lambda(x^1) = 1$, $\lambda(x^2) = 1$ がわかる．

非斉次系 (2) については次の結果を昨年紹介した．

定理３ (李 [3] の系 3.2). $f^\sharp(t) = \max_{j=1,2,\cdots,n} |f_j(t)|$ とおく．条件 (7) および十分大きな t に対して次の３つの条件を課す．

$$\int^{\infty} f^\sharp(t)\, dt < \infty, \tag{9}$$

$$\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) - \mathrm{Re}\, a_{j+1,j+1}(t) \geqq 2e\left(n a^\sharp(t) + f^\sharp(t)\right), \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) \geqq a^\sharp(t) + e\, f^\sharp(t) \tag{11}$$

そのとき，(2) の n 個の一次独立な特殊解 $y^1(t), \cdots, y^n(t)$ が存在して

$$\lambda(y^j) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\, a_{jj}(s)\, ds.$$

注意２．(10) は (8) に対応している．しかし，定理２では余分な条件 $\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) \geqq a^\sharp(t)$ は要らないので，定理３は定理２を含んでいない．後述するように，(11) は技術的なもので，本質的でない．

次に定理３を拡張するために必要な概念を幾つか準備する．その最良の文献は Adrianova [1] である．いま，(1) の任意の基本行列を $X(t) = [x^1(t), \cdots, x^n(t)]$ とし，$\lambda(x^j)$ $(j = 1, \cdots, n)$ と (1) の全ての解の Lyapunov 数 $\mu_1, \cdots, \mu_r$ $(r \leqq n)$ との関係を調べる．$\lambda(x^k) = \mu_j$ となる k の個数を n_j と表すと，等式

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(x^k) = \sum_{j=1}^{r} n_j \mu_j \tag{12}$$

が成立する．以下，この値を σ_X で表す．

注意３．$\mu_1, \cdots, \mu_r$ は $A(t)$ で定まり，基本行列 $X(t)$ の取り方に依らない．よって，(12) の右辺から，σ_X は有限個の値をとる．

命題１ (Lyapunov の不等式, Theorem 2.5.1 in [1])．$\sigma_X \geqq \limsup_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A(s)\,ds.$

定義１．(1) の基本行列 $X(t) = [x^1(t), \cdots, x^n(t)]$ に対して，σ_X が最小値をとるとき，$\{x^1(t), \cdots, x^n(t)\}$ を (1) の標準基底 (normal basis) という．

定義２． 極限 $\eta := \lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A(s)\,ds$ が存在し，$\sum_{k=1}^{n} \lambda(x^k) = \eta$ となる，(1) の基本解 $X(t) = [x_1(t), \cdots, x_n(t)]$ が存在するとき，(1) は（Lyapunov の意味で）正則 (regular) であるという．

主結果 (定理 5.2 in 李 [3])．定理２の２条件 (7), (8) を仮定し，（上極限でなく）極限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\, a_{jj}(s)\,ds \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が存在すると仮定する．このとき，非斉次項 f の可積分条件 (9) を課すことなく

$$\lambda(f) < \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\, a_{nn}(s)\,ds \tag{13}$$

ならば，定理３と同じ結論が成立する．

注意４．(9) ならば，$\lambda(f) \leqq 0$ である．実際，$\lambda(f) > 0$ ならば，$f(t)$ は非有界で，$\displaystyle\int^{\infty} f^{\sharp}(t)\,dt = \infty$ である．特に，例えば $a_{jj}(t) = 2 - \dfrac{2enj}{t}$ $(j = 1, \cdots, n)$ のとき，非有界な $f^{\sharp}(t) = e^t$ を選べる．また，(11) が取り除かれ，対角成分の差に関する条件も (10) から (8) に弱められている．

主結果は (i) の場合の或る補題を精密化したものと定理２によって示される．１つの鍵は Perron [4] による正則系の特徴付け (Theorem 3.6.1 in [1]) を援用することである．その詳細は講演時に説明する予定である．

参考文献

[1] L. Ya. Adrianova, *Introduction to Linear Systems of Differential Equations*, Trans. Math. Monographs, Vol. 146. AMS, Providence, RI, 1995.

[2] H. Ishida and H. -J. Lee, On asymptotic behaviour of solutions to linear differential systems with variable coefficients via characteristic numbers, Funkcial. Ekvac. **53** (3) (2010), 359–379.

[3] 李 炯宙 (LEE Hyung-Ju), 線形微分方程式系の解の漸近挙動とリャプノフ数について, 電気通信大学大学院 電気通信学研究科 情報工学専攻 修士論文, 57 頁, 2011 年 1 月 28 日.

[4] O. Perron, Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, Math. Z. **31** (1930), 748–766.

[5] S. H. Wang and J. H. Mai, Estimation of the characteristic numbers of systems of linear ordinary differential equations (Chinese), Acta Math. Sinica (Chinese Ser.) **40** (6) (1997), 901–912.