

波動方程式の解の微分に対する重み付き各点評価の 考察

久保 英夫 (東北大学大学院情報科学研究科)

土井 一幸 (富山県立大学工学部)

次の非線型波動方程式系の初期値問題を考える:

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u_i - c_i^2 \Delta u_i = F_i(\partial u), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^3, \\ u_i(0, x) = \varepsilon \varphi_i(x), \quad \partial_t u_i(0, x) = \varepsilon \psi_i(x), & x \in \mathbf{R}^3 \quad (i = 1, \dots, N), \end{cases}$$

ただし $c_i > 0$, $\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial_j^2$, $\partial_t = \partial_0 = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ($j = 1, 2, 3$), $\partial u = (\partial_a u_i)_{1 \leq i \leq N, 0 \leq a \leq 3}$, $\varepsilon > 0$ とする. また, 簡単のため, $\varphi_i, \psi_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ とし, 非線型項 $F_i(\partial u)$ は ∂u に関して p 次 ($p \geq 2, p \in \mathbf{Z}$) の斉次多項式とする.

(1) について“SDGE が成り立つ”とは, いかなる $\varphi_i, \psi_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ に対しても十分小さく ε を選べば (1) が時間大域解を持つことを指すものとする. ここで, $p \geq 3$ のときは任意の $\{c_i, F_i\}_{1 \leq i \leq N}$ に対して SDGE が成り立つが, $p = 2$ のときには必ずしも SDGE が成り立つとは限らないことが知られているため, これを踏まえて以下では $p = 2$ とする. また, $F_i(\partial u)$ を $F_i(\partial u) = F_i^I(\partial u) + F_i^{II}(\partial u) + F_i^{III}(\partial u)$ と分けて取り扱う, ただし

$$F_i^I(\partial u) = \sum_{(j,k) \in \{(j,k) | c_j \neq c_k\}} \sum_{a,b=0}^3 C_{ijk}^{ab} (\partial_a u_j) (\partial_b u_k) \quad (\text{互いに共鳴しない項}),$$

$$F_i^{II}(\partial u) = \sum_{(j,k) \in \{(j,k) | c_j = c_k \neq c_i\}} \sum_{a,b=0}^3 C_{ijk}^{ab} (\partial_a u_j) (\partial_b u_k) \quad (\text{線型項とは共鳴しない項}),$$

$$F_i^{III}(\partial u) = \sum_{(j,k) \in \{(j,k) | c_j = c_k = c_i\}} \sum_{a,b=0}^3 C_{ijk}^{ab} (\partial_a u_j) (\partial_b u_k) \quad (\text{線型項とも共鳴する項}),$$

$C_{ijk}^{ab} \in \mathbf{R}$ ($1 \leq i, j, k \leq N, 0 \leq a, b \leq 3$) とした. Christodoulou [1] 及び Klainerman [3] はそれぞれ独立に, $F^I(\partial u) = \{F_i^I(\partial u)\}_{1 \leq i \leq N} = 0$ かつ $F^{II}(\partial u) = \{F_i^{II}(\partial u)\}_{1 \leq i \leq N} = 0$ のときに $F^{III}(\partial u) = \{F_i^{III}(\partial u)\}_{1 \leq i \leq N}$ がある条件 (零条件と呼ばれる) を満たせば SDGE が成り立つことを示した. その後, 横山 [4] は $F^I(\partial u)$, $F^{II}(\partial u)$ に制限を課さずに SDGE が成り立つことを示した:

定理 1 (横山 [4]). $F^{III}(\partial u)$ が零条件を満たせば SDGE が成り立つ.

我々の目的は, 上の定理の証明を再考察することにある. そのために, 次の非斉次線型波動方程式を考える:

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = g, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^3, \\ u(0, x) = \partial_t u(0, x) = 0, & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

ただし $c > 0$ とし, 非斉次項 $g = g(t, x)$ は適当なだけ滑らかなものとする. 横山 [4] が用いた評価と我々の評価を述べるための記号を用意する.

記号. $\partial = (\partial_t, \nabla)$ とする. また, $\theta \geq 1$ に対して $\Phi_\theta(t) = 1$ ($\theta > 1$), $= \log(2+t)$ ($\theta = 1$) とする. さらに $\tilde{c} \geq 0, \mu, \nu \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, t \geq 0$ に対して

$$[g(t)]_{k, \tilde{c}, \mu, \nu} := \sup_{(s, y) \in (0, t) \times \mathbf{R}^3} \sum_{|\alpha| \leq k} |y| (1 + |y| + s)^\nu (1 + ||y| - \tilde{c}s|)^\mu |Z^\alpha g(s, y)|,$$

$$\langle g(t) \rangle_{k, \tilde{c}, \mu, \nu} := \sup_{(s, y) \in (0, t) \times \mathbf{R}^3} \sum_{|\alpha| \leq k} (1 + |y|)^{1+\nu} (1 + ||y| - \tilde{c}s|)^\mu |Z^\alpha g(s, y)|$$

と定める, ただし $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_6) = (\partial_t, \nabla, \Omega)$, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\Omega = x \times \nabla$ とした. また, $c > 0, \mu \geq 1, \nu \in \mathbf{R}, (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^3$ に対して, $\mathcal{D}_{c, \mu, \nu}(t, x) := \Phi_\mu(t)(1 + |x|)^{-1}(1 + ||x| - ct|)^{-\nu}$ と定める.

横山 [4] は定理 1 を示すために, 次で与えられる重み付き L^∞ - L^∞ 評価を用いた.

命題 2 (横山 [4]). u を (2) の解, $\tilde{c} \geq 0, \mu \geq 1, \nu \geq 0$ とする. このとき, 次が成り立つ:

- (i) $c = \tilde{c}$ かつ $\nu \geq 1$ ならば $|\partial u(t, x)| \leq C(\mathcal{D}_{c, \mu, \nu}(t, x) + \mathcal{D}_{c, \nu, \mu}(t, x))[g(t)]_{1, \tilde{c}, \mu, \nu};$
- (ii) $c \neq \tilde{c}$ ならば $|\partial u(t, x)| \leq C\mathcal{D}_{c, \mu, \nu}(t, x)[g(t)]_{1, \tilde{c}, \mu, \nu}.$

これに対して我々は上の評価を改善し, 定理 1 を示すのに十分な次の評価を得た.

定理 3. u を (2) の解, $\tilde{c} > 0, \mu \geq 1, \nu \geq 0$ とする. このとき, 次が成り立つ:

- (i) $c = \tilde{c}$ かつ $\nu \geq 1$ ならば $|\partial u(t, x)| \leq C(\mathcal{D}_{c, \mu, \nu}(t, x) + \mathcal{D}_{c, \nu, \mu}(t, x))\langle g(t) \rangle_{4, \tilde{c}, \mu, \nu}.$
- (ii) $c \neq \tilde{c}$ ならば $|\partial u(t, x)| \leq C(\mathcal{D}_{c, \mu, \nu}(t, x) + \mathcal{D}_{c, 2, \mu}(t, x))\langle g(t) \rangle_{4, \tilde{c}, \mu, \nu}.$

命題 2 と定理 3 の違いは, 命題 2 で用いた重みの一部 $(1 + |y| + s)$ を定理 3 では $(1 + |y|)$ に弱めた点にある. この点を考慮し定理 3 (ii) を用いることで, $F^\Pi(\partial u)$ のア・プリオリ評価が易しくなる. また, L^∞ - L^∞ 評価の証明自身も定理 3 のほうが簡略である. 具体的には, 横山 [4] が非斉次解を直接評価したのに対し, 我々はデュアメル原理を用いることにより斉次方程式

$$(3) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^3, \\ u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

の解を評価を用いた, それは Klainerman [2] により得られた次の評価である:

命題 4 (Klainerman [2]). $v = v(t, x)$ を (3) の解とする. このとき.

$$|\partial v(t, x)| \leq C \frac{1}{r} \left(1 + \frac{A_c}{r}\right) \int_{A_c \leq |y| \leq B_c} \frac{1}{|y|^2} |\varphi(y)|_4 dy \\ + C \frac{1}{r A_c} \int_{|y|=A_c} |\varphi(y)|_2 dS_y + C \frac{1}{r B_c} \int_{|y|=B_c} |\varphi(y)|_2 dS_y$$

が成り立つ, ただし $r = |x|$, $A_c = |r - ct|$, $B_c = r + ct$ とし, $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, x \in \mathbf{R}^3$ に対して $|\varphi(x)|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} |Z^\alpha \varphi(x)|$ とした.

参考文献

- [1] Christodoulou, D., Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 267–282.
- [2] Klainerman, S., Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 269–288.
- [3] Klainerman, S., Lectures in Appl. Math. **23** (1986), 293–326.
- [4] Yokoyama, K., J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 609–632.