函館偏微分方程式研究集会

アブストラクト集

平成 24 年 10 月 06 日（土）～10 月 08 日（月）

於）公立はこだて未来大学

函館偏微分方程式研究集会 プログラム

日程 2012年10月06日(土)～10月08日(月)
会場 公立はこだて未来大学 研究棟R791講義室 会場責任者 高村 博之 先生
所在地 〒041-8655 北海道函館市亀田中野町116-2
URL http://www.fun.ac.jp/
幹事 五十嵐 威文（日本大学 理工学部） igarashit@penta.ge.cst.nihon-u.ac.jp

1日目 10月6日(土)

14:00－14:15 **開会挨拶・自己紹介**

第1セッション 座長：渡邊 道之（新潟大学）

14:15－14:45 齋藤 純一（都立産業技術高等専門学校）
The Poincare inequality for vector fields on Riemannian manifolds with positive sectional curvature

15:00－15:30 石田 晴久（電気通信大学）
非斉次線形微分方程式系の解のLyapunov数

15:45－16:15 木下 保（筑波大学）
On the wavelet having Gevrey regularities and subexponential decays

16:30－17:00 梅田 典晃（東京大学）
On behavior of signs for the heat equation and a diffusion method for data separation

2日目 10月7日(日)

第2セッション 座長：久保 英夫（東北大学）

10:05－10:35 若狭 恭平（公立はこだて未来大学）
Pointwise positivity of solutions of high dimensional wave equations and its application to nonlinear problems

10:50－11:05 市川 享祐（愛媛大学）
Error estimates for schemes by discrete variational derivative method for some evolution equations

11:15－11:30 白石 克郎（愛媛大学）
2次元半無限領域におけるRayleigh波に関する数値計算

11:30－11:45 八木 航己（愛媛大学）
2次元物体散乱に関する数値計算

12:00－12:30 杉山 裕介（東京理科大学）
第二音波の方程式の解の爆発

12:30－13:30 **昼食**

特別講演 座長：五十嵐 威文（日本大学）

13:30－15:00 **横田 智巳（東京理科大学）**

Global existence of weak solutions to general quasilinear degenerate Keller–Segel systems

第3セッション 座長：門脇 光輝（愛媛大学）

15:15－15:45 **吉井 健太郎**（東京理科大学）

双曲型発展方程式に対する抽象的コーシー問題

16:00－16:30 **廣澤 史彦**（山口大学）

On second order weakly hyperbolic equations and the ultradifferentiable classes

16:45－17:15 **土井 一幸**（富山県立大学）

波動方程式の解の微分に対する重み付き各点評価の考察

17:30－18:00 **肥田野 久仁男**（三重大学）

On the lifespan of solutions to some semi-linear wave equations in 2-D (Preliminary report)

19:00－ **懇親会**（活魚料理「いか清」）

3日目 10月8日(月)

第4セッション 座長：中澤 秀夫（日本医科大学）

10:05－10:35 **渡邉 道之**（新潟大学）

非線形シュレディンガー方程式の固定振幅での逆散乱問題について

10:50－11:20 **上坂 洋司**（日本大学）

A blow-up boundary for a semilinear wave equation with power nonlinearity

11:20－11:25 **連絡事項・閉会**

本研究集会は次の協力のもと開催されます。

科学研究費補助金 基盤研究(C)研究課題番号:24540183
(研究代表者: 高村 博之 先生)

科学研究費補助金 基盤研究(C)研究課題番号:23540222
(研究代表者: 中澤 秀夫 先生)

科学研究費補助金 基盤研究(C)研究課題番号:22540176
(研究代表者: 石田 晴久 先生)

科学研究費補助金 基盤研究(C)研究課題番号:22540198
(研究代表者: 門脇 光輝 先生)

科学研究費補助金 基盤研究(C)研究課題番号:24540161
(研究代表者: 木下 保 先生)

函館偏微分方程式研究集会　参加者名簿（敬称略）

髙村 博之	(公立はこだて未来大学)【会場責任者】
＊若狭 恭平	(公立はこだて未来大学・Ｍ２)
久保 英夫	(東北大学)
Trushin Igor	(東北大学)
＊渡邊 道之	(新潟大学)
＊木下 保	(筑波大学)
＊上坂 洋司	(日本大学)
松山 登喜夫	(中央大学)
＊梅田 典晃	(東京大学)
☆横田 智巳	(東京理科大学)
＊吉井 健太郎	(東京理科大学)
＊杉山 裕介	(東京理科大学・Ｄ２)
＊齋藤 純一	(都立産業技術高専)
＊石田 晴久	(電気通信大学)
望月 清	(東京都立大学)
小林 康麿	(首都大学東京)
間庭 正明	(工学院大学)
中澤 秀夫	(日本医科大学)
山口 勝	(東海大学)
＊土井 一幸	(富山県立大学)
＊肥田野 久仁男	(三重大学)
門脇 光輝	(愛媛大学)
吉川 周二	(愛媛大学)
＊白石 克郎	(愛媛大学・Ｍ２)
＊八木 航己	(愛媛大学・Ｍ２)
＊市川 享祐	(愛媛大学・Ｍ２)
＊廣澤 史彦	(山口大学)
湯澤 泰生	(九州情報大学)
五十嵐 威文	(日本大学)【幹事】

以上　29名

※　☆印は特別講演者。＊印は一般講演者。

特別講演

「Global existence of weak solutions to general quasilinear degenerate Keller-Segel systems」

横田 智巳 先生

（東京理科大学 理学部第一部 数学科）

Global existence of weak solutions to general quasilinear degenerate Keller-Segel systems*

Tomomi Yokota (Tokyo University of Science)†

1. Introduction

In this talk we consider the global existence of weak solutions to the following Cauchy problem for general quasilinear degenerate Keller-Segel systems:

$$\text{(KS)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (f(u)\nabla u - g(u)\nabla v), & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u, & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

where $u, v : \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ are unknown functions, and we assume that $N \in \mathbb{N}$, $u_0, v_0 \geq 0$, $f \in C([0,\infty)) \cap C^1((0,\infty))$, $g \in C^1([0,\infty))$, $f, g > 0$ on $(0,\infty)$ and

$$f(0) = g(0) = 0.$$

In particular, if $f(u) = 1$ and $g(u) = u$, then (KS) is the so-called (minimal) Keller-Segel model proposed by [4] in 1970. The model describes a part of cellular slime molds with the chemotaxis at the life cycle. Usually $u(x,t)$ shows the density of cellular slime molds and $v(x,t)$ shows the density of the semiochemical at place x and time t. There are biological and mathematical generalizations of the Keller-Segel model. For example, Sugiyama [5] and Sugiyama-Kunii [6] started mathematical studies on the global existence of weak solutions to (KS) with $f(u) = u^{m-1}$ and $g(u) = u^{q-1}$; note that such porous medium-type diffusion is motivated from a biological point of view (see [7]) and nonlinear diffusion has been suggested by Hillen-Painter [1].

In general, the study on quasilinear degenerate parabolic systems is a challenging issue. To study (KS), we encounter the following difficulties. Firstly, the well known theory for non-degenerate parabolic equations (existence theorem, maximum principle, etc.) can not be applied directly to (KS). Even if $f(u)$ is replaced with the approximation $f(u+\varepsilon)$, the results depend strongly on $\varepsilon > 0$. Secondly, there is no representation formula for the solution u, and hence it is very difficult to obtain apriori estimates of solutions.

The purpose of this talk is to establish the global existence of weak solutions to (KS) (for the definition of weak solutions see Section 2). More precisely, we generalize the following two existence results for (KS) with $f(u) = u^{m-1}$ $(m \geq 1)$ and $g(u) = u^{q-1}$ $(q \geq 2)$ which were recently obtained by [2] and [3], respectively:

- if $q < m + 2/N$, then (KS) has a global weak solution without any restriction on the size of initial data;
- if $q \geq m + 2/N$, then (KS) has a global weak solution for small initial data.

---

*This talk is based on a joint work with Sachiko Ishida (Tokyo University of Science).

†E-mail: yokota@rs.kagu.tus.ac.jp

2. Main results

Before stating our result we define weak solutions to (KS).

Definition 1. Let $T > 0$. A pair (u, v) of non-negative functions defined on $\mathbb{R}^N \times (0, T)$ is called a *weak solution* to (KS) *on* $[0, T)$ if

(a) $u \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^N))$ $(\forall p \in [1, \infty])$, $F(u) := \int_0^u f(r)\,dr \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^N))$;

(b) $v \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^N))$;

(c) (u, v) satisfies (KS) in the distributional sense, i.e., for every $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T))$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla F(u) \cdot \nabla\varphi - g(u)\nabla v \cdot \nabla\varphi - u\varphi_t)\,dxdt = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x, 0)\,dx,$$
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \cdot \nabla\varphi + v\varphi - u\varphi - v\varphi_t)\,dxdt = \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x, 0)\,dx.$$

We now state the main results.

Theorem 2.1 (the sub-critical case). *Let $N \in \mathbb{N}$ and $T > 0$. Assume that there exist constants $c_0, c_1, c_2 > 0$ and $M \geq m \geq 2$ such that*

$$c_0\, r^{m-1} \leq f(r) \leq c_1 r^{M-1} \quad (r \geq 0); \tag{2.1}$$

$$g(r) \leq c_2\, f(r) r^\alpha \quad (r \geq 0) \quad \textit{for some } \alpha < 2/N. \tag{2.2}$$

Then for any $u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ with $\Delta v_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (for some $p_0 > 1$) there exists a non-negative (global) weak solution (u, v) to (KS) *on* $[0, T)$.

Theorem 2.2 (the super-critical case). *Let $N \geq 2$ and $T > 0$. Assume that there exist constants $c_0, c_1, c_3, c_4 > 0$ and $M \geq m \geq 2$ satisfying* (2.1) *and*

$$c_3\, f(r) r^\alpha \leq g(r) \leq c_4\, f(r) r^\alpha \quad (r \geq 0) \quad \textit{for some } \alpha \geq 2/N. \tag{2.3}$$

Assume further that $u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\Delta v_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (for some $p_0 > 1$) and $\|u_0\|_{L^{\frac{N}{2}}}$, $\|u_0\|_{L^{\frac{N\alpha}{2}}}$, $\|\Delta v_0\|_{L^{\frac{N}{2}+1}}$, $\|\Delta v_0\|_{L^{\frac{N\alpha}{2}+1}}$, $\|\Delta v_0\|_{L^{\frac{N}{2}+m+\alpha+1}}$, $\|\Delta v_0\|_{L^{\frac{N\alpha}{2}+m+\alpha+1}}$ are sufficiently small. Then there exists a non-negative (global) weak solution (u, v) to (KS) *on* $[0, T)$.

References

[1] T. Hillen, K. J. Painter, *A user's guide to PDE models for chemotaxis*, J. Math. Biol. **58** (2009), 183–217.

[2] S. Ishida, T. Yokota, *Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type*, J. Differential Equations **252** (2012), 1421–1440.

[3] S. Ishida, T. Yokota, *Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type with small data*, J. Differential Equations **252** (2012), 2469–2491.

[4] E. F. Keller, L. A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol. **26** (1970), 399–415.

[5] Y. Sugiyama, *Time global existence and asymptotic behavior of solutions to degenerate quasi-linear parabolic systems of chemotaxis*, Differential Integral Equations **20** (2007), 133–180.

[6] Y. Sugiyama, H. Kunii, *Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term*, J. Differential Equations **227** (2006), 333–364.

[7] Z. Szymanska, C. Morales-Rodrigo, M. Lachowicz, M. A. J. Chaplain, *Mathematical modelling of cancer invasion of tissue: the role and effect of nonlocal interactions*, Math. Models Methods Appl. Sci. **19** (2009), 257–281.

一般講演

The Poincaré inequality for vector fields on Riemannian manifolds with positive sectional curvature

齋藤　純一

(都立産業技術高等専門学校, Tokyo Metroporitan College of Industrial Technology)

(M,g) を 2 次元 C^∞ Riemann 多様体とする.
M は $\mathbf{R}^3$ にはめ込まれているとし，$f : M \to \mathbf{R}^3$ を C^∞ のはめ込み (immersion) とする．さらに g は，$\mathbf{R}^3$ の標準的内積 (inner metric)$\langle\cdot,\cdot\rangle$ の f による引き戻し (pull-back) で定義されているとする.

$$g_p(u,v) = \Big\langle Df_p(u), Df_p(v)\Big\rangle, \text{ for } \forall u, v \in T_pM,$$

ここで Df_p は 写像 f の p における微分である.

(M,g) 上の連続関数 φ における測度 (measure) $\displaystyle\int_M \varphi\, d\nu_g$ から，M 上のベクトル場に関する L^2 ノルム $|\cdot|_{L^2(M)}$ を次のように定義する.

$$|u|^2_{L^2(M)} = \int_M g(u,u)\, d\nu_g \quad \text{for } u \in TM.$$

2 次元球面 $S^2 = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1^2\right\}$ に，包含写像 (inclusion mapping) $\iota : S^2 \to \mathbf{R}^3$ による $\mathbf{R}^3$ の標準的な内積の引き戻しで，Riemannian metric h を導入する.

$$h_p(u,v) = \Big\langle D\iota_p(u), D\iota_p(v)\Big\rangle, \text{ for } \forall u, v \in T_pS^2.$$

S^2 上のベクトル場に関する Poincaré タイプの不等式については，次が得られている[1].

$$|u|_{L^2(S)} \leqq 2\pi |\nabla u|_{L^2(S)} \quad \text{for } u \in TS^2,$$

ここで ∇ はレビチビタ接続である.

この不等式を利用して，M 上のベクトル場に関する Poincaré タイプの不等式をつくる．球面 S^2 と M とにある程度の関連を持たせるため，M に次の仮定を加える.

(仮定) M を完備かつ単連結とし，M の断面曲率 K は次の不等式を満たすとする.

$$\frac{1}{4} < \delta \leqq K \leqq 1.$$

この仮定により M はコンパクトになり，さらに次の定理が成り立つことが知られている.

Theorem 1 (球面定理). (仮定) を満たす M は S^2 に同相である.

講演ではこの定理を利用して，S^2 の L^2 ノルムと M の L^2 ノルムの同値関係を示して Poincaré タイプの不等式を導く方法の概要を説明する.

[1] 前回の講演で示した係数とは異なっている.

非斉次線形微分方程式系の解の Lyapunov 数

石田 晴久 (電気通信大学 共通教育部 数学部会)

於：公立はこだて未来大学

この講演では昨年の第２６回松山キャンプで話した可積分な非斉次項をもつ線形微分方程式系の特殊解の Lyapunov 数を可積分でない非斉次項をもつ場合に拡張した結果について述べる．これは李 炯宙氏の修士論文の一結果 ([3] の定理 5.2) である．ここでは次のような変数係数の線形常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + f(t) \quad \text{in} \quad [t_0, \infty) \tag{2}$$

を考察する．但し，$A(t)$ は n 次の正方行列で，各成分は $[t_0, \infty)$ で有界連続と仮定する．同様に，$f(t)$ は $[t_0, \infty)$ で連続で，$x(t)$, $y(t)$ は $[t_0, \infty)$ で連続的微分可能な解である．

まず，手始めに定数係数の場合を思い出すと，基本行列 e^{tA} のスペクトル分解によって，(1), (2) の一般解の精密な漸近挙動を知ることができる (§2, Ishida-Lee [2])．ここで，e^{tA} のスペクトル分解とは

$$e^{tA} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{h(\lambda)-1} \frac{t^j}{j!}(A - \lambda E)^j P_\lambda$$

を指す．但し，$\sigma(A)$ は A の固有値全体の集合，P_λ は一般固有空間 $G(\lambda, h(\lambda)) = \{\, x \mid (A - \lambda E)^{h(\lambda)} x = 0 \,\}$ への射影行列，$h(\lambda)$ は固有値 λ の重複度をそれぞれ表す．また，初期データ $x(t_0) = w$ に対して，その度数 $d_w(\lambda)$ を

$$d_w(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{if } P_\lambda w = 0, \\ k & \text{if } (A - \lambda E)^{k-1} P_\lambda w \neq 0,\ (A - \lambda E)^k P_\lambda w = 0 \end{cases}$$

で定める．そのとき，(1) の初期データ $x(t_0) = w$ をもつ任意の解 $x(t)$ について

$$\|x(t)\| = \text{const.}\ e^{\alpha t} t^\beta + o\left(e^{\alpha t} t^\beta\right) \quad (t \to \infty)$$

が成立する．ここで，$\alpha = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re} \lambda$, $\beta = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} d_w(\lambda)$ である．そこで，変数係数の場合にも $\limsup\limits_{t \to \infty} \|A(t)\| < \infty$ のときに α の代替物として，ベクトル値関数 $u : [t_0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ の Lyapunov 数を

$$\lambda(u) = \limsup_{t \to \infty} \frac{\log \|u(t)\|}{t}$$

と定義する．この定義は A. M. Lyapunov 自身のものではなく，O. Perron [4] に負う．勿論，a, b が定数のとき，$\lambda\left(e^{at} t^b\right) = \operatorname{Re} a$ である．さて，変数係数のときによく研究されているのは次の２つの場合である：

(i) $A(t)$ が或る定数行列 A_0 に近づく．

(ii) $A(t)$ が対角行列に近づく．つまり，$\lim\limits_{t \to \infty} a_{jk}(t) = 0$ $(j \neq k)$

(i) の場合は一昨年に李君が新潟で述べたので割愛する．(ii) の場合を考える動機は，$A(t)$ が対角行列の場合，$A(t) = \mathrm{diag}(a_{11}(t), \cdots, a_{nn}(t))$ のときには，(1) は n 個の単独方程式 $x_j'(t) = a_{jj}(t)x_j(t)$ になり，その解の Lyapunov 数が直ちに

$$\lambda(x_j) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\, a_{jj}(s)\, ds \tag{3}$$

で与えられるためである．(ii) の場合に最初に重要な結果を得たのは Perron [4] である．便宜上，以下では十分大きな t に対して，$\mathrm{Re}\, a_{11}(t) \geqq \mathrm{Re}\, a_{22}(t) \geqq \cdots \geqq \mathrm{Re}\, a_{nn}(t)$ を仮定しておく．

定理 1 (Satz 7 in Perron [4], p. 765). 次の２つの条件を課す．

$$\lim_{t\to\infty} a_{jk}(t) = 0 \quad \text{if} \quad j \neq k, \tag{4}$$

$$\liminf_{t\to\infty} (\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) - \mathrm{Re}\, a_{j+1,j+1}(t)) > 0. \tag{5}$$

そのとき，(1) の n 個の一次独立な解 $x^1(t), \cdots, x^n(t)$ が存在して

$$\lambda(x^j) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\, a_{jj}(s)\, ds. \tag{6}$$

その後，Wang-Mai [5] が条件 (5) を弱められることを示した．

定理 2 (Corollary 2 in Wang-Mai [5], p. 903). $a^\sharp(t) = \max_{j\neq k} |a_{jk}(t)|$ とおく．次の２つの条件を仮定する．

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} a^\sharp(s)\, ds = 0, \tag{7}$$

$$\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) - \mathrm{Re}\, a_{j+1,j+1}(t) \geqq 2en\, a^\sharp(t) \ \text{ for large } t. \tag{8}$$

そのとき，(1) の n 個の一次独立な解 $x^1(t), \cdots, x^n(t)$ が存在して，(6) を満たす．

注意 1．(7) で，特に $\lim_{t\to\infty} a^\sharp(t) = 0$ の場合が考えられる．よって，$\lim_{t\to\infty} (\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) - \mathrm{Re}\, a_{j+1,j+1}(t)) = 0$ のときに定理 1 と同じ結論が成立する場合がある．

例 1 (Example 2 in Wang-Mai [5], p. 903). $\alpha > 0$ として

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 + 4e\, t^{-\alpha} & t^{-\alpha} \\ t^{-\alpha} & 1 \end{bmatrix}$$

とする．このとき，$\lambda(x^1) = 1$, $\lambda(x^2) = 1$ がわかる．

非斉次系 (2) については次の結果を昨年紹介した．

定理 3 (李 [3] の系 3.2). $f^\sharp(t) = \max_{j=1,2,\cdots,n} |f_j(t)|$ とおく．条件 (7) および十分大きな t に対して次の３つの条件を課す．

$$\int^{\infty} f^\sharp(t)\, dt < \infty, \tag{9}$$

$$\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) - \mathrm{Re}\, a_{j+1,j+1}(t) \geqq 2e\left(n a^\sharp(t) + f^\sharp(t)\right), \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) \geqq a^\sharp(t) + e\, f^\sharp(t) \tag{11}$$

そのとき，(2) の n 個の一次独立な特殊解 $y^1(t), \cdots, y^n(t)$ が存在して

$$\lambda(y^j) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\, a_{jj}(s)\, ds.$$

注意 2．(10) は (8) に対応している．しかし，定理 2 では余分な条件 $\mathrm{Re}\, a_{jj}(t) \geqq a^\sharp(t)$ は要らないので，定理 3 は定理 2 を含んでいない．後述するように，(11) は技術的なもので，本質的でない．

次に定理３を拡張するために必要な概念を幾つか準備する．その最良の文献は Adrianova [1] である．いま，(1) の任意の基本行列を $X(t) = [x^1(t), \cdots, x^n(t)]$ とし，$\lambda(x^j)$ $(j = 1, \cdots, n)$ と (1) の全ての解の Lyapunov 数 $\mu_1, \cdots, \mu_r$ $(r \leqq n)$ との関係を調べる．$\lambda(x^k) = \mu_j$ となる k の個数を n_j と表すと，等式

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(x^k) = \sum_{j=1}^{r} n_j \mu_j \tag{12}$$

が成立する．以下，この値を σ_X で表す．

注意３．$\mu_1, \cdots, \mu_r$ は $A(t)$ で定まり，基本行列 $X(t)$ の取り方に依らない．よって，(12) の右辺から，σ_X は有限個の値をとる．

命題１ (Lyapunov の不等式, Theorem 2.5.1 in [1])．$\sigma_X \geqq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A(s)\,ds.$

定義１．(1) の基本行列 $X(t) = [x^1(t), \cdots, x^n(t)]$ に対して，σ_X が最小値をとるとき，$\{x^1(t), \cdots, x^n(t)\}$ を (1) の標準基底 (normal basis) という．

定義２．極限 $\eta := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A(s)\,ds$ が存在し，$\sum_{k=1}^{n} \lambda(x^k) = \eta$ となる，(1) の基本解 $X(t) = [x_1(t), \cdots, x_n(t)]$ が存在するとき，(1) は (Lyapunov の意味で) 正則 (regular) であるという．

主結果 (定理 5.2 in 李 [3])．定理２の２条件 (7), (8) を仮定し，（上極限でなく）極限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,a_{jj}(s)\,ds \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が存在すると仮定する．このとき，非斉次項 f の可積分条件 (9) を課すことなく

$$\lambda(f) < \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,a_{nn}(s)\,ds \tag{13}$$

ならば，定理３と同じ結論が成立する．

注意４．(9) ならば，$\lambda(f) \leqq 0$ である．実際，$\lambda(f) > 0$ ならば，$f(t)$ は非有界で，$\int^{\infty} f^\sharp(t)\,dt = \infty$ である．特に，例えば $a_{jj}(t) = 2 - \frac{2enj}{t}$ $(j = 1, \cdots, n)$ のとき，非有界な $f^\sharp(t) = e^t$ を選べる．また，(11) が取り除かれ，対角成分の差に関する条件も (10) から (8) に弱められている．

主結果は (i) の場合の或る補題を精密化したものと定理２によって示される．１つの鍵は Perron [4] による正則系の特徴付け (Theorem 3.6.1 in [1]) を援用することである．その詳細は講演時に説明する予定である．

参考文献

[1] L. Ya. Adrianova, *Introduction to Linear Systems of Differential Equations*, Trans. Math. Monographs, Vol. 146. AMS, Providence, RI, 1995.

[2] H. Ishida and H. -J. Lee, On asymptotic behaviour of solutions to linear differential systems with variable coefficients via characteristic numbers, Funkcial. Ekvac. **53** (3) (2010), 359–379.

[3] 李 炯宙 (LEE Hyung-Ju), 線形微分方程式系の解の漸近挙動とリャプノフ数について, 電気通信大学大学院 電気通信学研究科 情報工学専攻 修士論文, 57 頁, 2011 年 1 月 28 日.

[4] O. Perron, Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, Math. Z. **31** (1930), 748–766.

[5] S. H. Wang and J. H. Mai, Estimation of the characteristic numbers of systems of linear ordinary differential equations (Chinese), Acta Math. Sinica (Chinese Ser.) **40** (6) (1997), 901–912.

On the Wavelets Having Gevrey Regularities and Subexponential Decays

N. Fukuda, T. Kinoshita and I. Uehara

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

An MRA wavelet ψ is determined by a scaling function φ as

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{m\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Meyer found orthonormal wavelets having polynomial decays or especially subexponential decays. Actually, the subexponential decay implies the degeneracy of the order of Gevrey type. In this talk, we shall define the subexponential decay as follows:

Definition *Let $s > 1$. A function f is called to have a subexponential decay of order s, written $f \in \Gamma^s(\mathbf{R}_x)$, if there exist some $C > 0$ and $\rho > 0$ such that*

$$|f(x)| \le C \exp\left[-\rho |x|^{\frac{1}{s}}\right].$$

This kind of estimate is used in the frequency domain with the well-known Paley-Wiener theorem and gives the regularity in the time domain. Meyer constructed $\hat{\varphi}(\xi)$, which belongs to the Gevrey class in the frequency domain, for any compact set $K \subset \mathbf{R}_x$

$$\sup_{\xi\in K}\left|\partial_\xi^n \hat{\varphi}(\xi)\right| \le C_K R^n n!^s \quad \text{for } n \in \mathbf{N} \quad (C_K > 0,\ R > 0).$$

The regularity of $\hat{\varphi}(\xi)$ comes from just the regularity of the low-pass filter $m(\xi)$. However, it would be difficult to control the decay rate of $\hat{\varphi}$ except the band-limited case. Indeed, such a wavelet seems not to be found; there are two blanks in the following table.

	A_x	G^s_x	C^r_x
A_ξ	nonexistence	nonexistence	Battle-Lemarié, Daubechies
G^s_ξ	Meyer		HWW
C^r_ξ	Meyer		HWW

In the above table HWW denotes the wavelets introduced by E. Hernández, X. Wang and G. Weiss [3]. Here the word "nonexistence" is shown by the following theorem (see [1], [2], etc.):

Theorem A *There is no orthonormal wavelet belonging to C^∞_x and having an exponential decay.*

The Daubechies type avoids this restriction by relaxing the regularity C^∞_x and thus attains $\mathcal{A}_\xi$, especially, compact-support in the time domain. Our strategy is to relax the regularity $\mathcal{A}_\xi$ in the frequency domain and seek orthonormal wavelets having regularities beyond C^∞_x. We shall construct new orthonormal wavelets which fill in the blanks of the table, i.e., new wavelets having Gevrey regularities both in time and frequency.

Main Theorem *Let $s^* > 1$. There exists a wavelet ψ satisfying both $\psi \in G^s_x$ and $\hat{\psi} \in G^{s^*}_\xi$ for*

$$s = \max\{1, s^* - 1\}.$$

References

[1] *Ingrid Daubechies. Ten Lectures on Wavelets.* Society for Industrial Mathematics, 1992.

[2] *Jacek Dzibański; Eugenio Hernàndez. Band-Limited Wavelets with Subexponential Decay.* Canad. Math. Bull. Vol. 41, No. 4, 398-403 (1998).

[3] *Eugenio Hernàndez; Xihua Wang; Guido Weiss. Smoothing Minimally Supported Frequency Wavelets: Part II.* The Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 1, No. 1, 23-41 (1997).

[4] *Shinya Moritoh; Kyoko Tomoeda. A Further Decay Estimate for the Dzibański-Hernàndez Wavelets.* Canad. Math. Bull. Vol. 53, No. 1, 133-139 (2010).

ON BEHAVIOR OF SIGNS FOR THE HEAT EQUATION AND A DIFFUSION METHOD FOR DATA SEPARATION

梅田典晃　(東京大学大学院数理科学研究科 特任研究員)

本研究は儀我美保氏 (東大数理)、儀我美一教授 (東大数理) 及び大塚岳氏 (群馬大工) との共同研究であり、本講演ではこの中で特に講演者が関わった部分を扱う.

線形熱方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^d, \end{cases} \tag{1}$$

を考える。ここで $d \geq 1$ とする。この解が初期値 u_0 の影響をどのように受けるかを考える.

問題 (1) の解は熱核を使い

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} u_0(y) \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} dy \tag{2}$$

の形で表されることはよく知られている. 初期値の形状によって、原点における初期値の時間方向における符号変化について考える. 問題 (1) の解に対して次のように定義される diffusive sign:

$$S_D[u_0](x) = \lim_{t \downarrow 0} \operatorname{sgn} u(x,t)$$

を用いる. ここで符号は

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

と定義される. この $S_D[u_0](x)$ は $\operatorname{sgn} u_0(x)$ と必ずしも一致しない. 例えば $d = 1$ のとき初期値が

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x > 2, \\ 0, & -2 < x \leq 2, \\ -1, & x \geq -2. \end{cases}$$

としたとき、$S_D[u_0](1) = 1$、$\operatorname{sgn} u_0(1) = 0$ となり、この二つの値は異なる. また、$S_D[u_0]$ は well-defined とは限らない.

本講演では次の２つの定理について考える. 一つ目の定理は $S_D[u_0]$ が well-defined にならない場合をあげる.

Theorem 1. 次元 $d=1$ とする。初期値 u_0 が $k \geq 8$ に対し

$$u_0(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{k}\right)^n x, & x \in \left[\frac{2^n+1}{2^n}, \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}\right) \quad \text{with } n \geq 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

の形をしているとする. このとき (1) の解は原点において $t=0$ の近くで無限回符号変化する. つまり $S_D[u_0](0)$ は well-defined ではない.

二つ目の定理では $S_D[u_0]$ が well-defined になることが必ずしも自明でない場合をあげる. この定理で扱う A の特性関数 χ_A は

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

と定義される。

Theorem 2. 次元 $d=2$ とする. 初期値 u_0 が

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{l} \chi_{A_k}(x) \tag{4}$$

の形をするとする. ここで自然数 l は有限値、A_k は各 $k=1,2,...,l$ に対してそれぞれが軸に平行な辺を持つ長方形の領域とする. このとき、(1) の解は任意の $x \in \mathbf{R}^2$ において $t=0$ の近くで解の符号変化は有限回しか起きない. つまり任意の $x \in \mathbf{R}^2$ に対して $S_D[u_0](x)$ は well-defined である.

Pointwise positivity of solutions of high dimensional wave equations and its application to nonlinear problems [1]

若狭恭平

公立はこだて未来大学大学院システム情報科学研究科修士２年
e-mail : g2111045@fun.ac.jp

本講演では、非コンパクト台かつ非ゼロ初期値をもつ半線形波動方程式に対する初期値問題の解の爆発定理が得られたことを報告する。

次の未知関数 $u = u(x,t)$ に対する初期値問題を考える。

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F(u) & \text{in} \quad \mathbf{R}^n \times [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & \text{for} \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{0.1}$$

ここで、$n \geq 2$ であり、$f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ と仮定する。非線形項に対する仮定は、$F(u) = |u|^p$ または、$F(u) = |u|^{p-1}u$ $(p > 1)$ である。

非コンパクト台な初期値をもつ (0.1) に対しては、以下のような考察が知られている;

【浅倉予想 [1]】 ある正定数 C に対し (f, g) は、

$$f(x) \equiv 0, \quad g(x) \geq \frac{C}{(1+|x|)^{1+\kappa}} \tag{0.2}$$

をみたすとする。このとき、$0 < \kappa < \kappa_0$ ならば (0.1) の解は有限時間内に爆発し、

$$(1+|x|)^{1+\kappa} \left(\sum_{|\alpha| \leq [n/2]+2} |\nabla_x^\alpha f(x)| + \sum_{|\beta| \leq [n/2]+1} |\nabla_x^\beta g(x)| \right) \tag{0.3}$$

が十分小さく、$\kappa \geq \kappa_0$ かつ $p > p_0(n)$ ならば解が時間大域的に存在する。ここで、$\kappa_0 = \dfrac{2}{p-1}$ である。$p_0(n)$ は、Strauss 指数と呼ばれ、(0.1) の初期値の台がコンパクトの場合の解の時間大域存在と有限時間内爆発を分ける臨界冪であり、$(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$ の正根である。この予想は、$n = 3$ の場合に Asakura [1] が $\kappa = \kappa_0$ の場合を除き解決し、その後、様々な研究者によって他の空間次元に拡張され完全に解決された経緯がある。

ここで、(0.2) の爆発条件の下では、時間大域解の存在条件 (0.3) の f に関する条件の最適性が不明であることに注意する。この最適性を調べるためには、$f \not\equiv 0$ かつ $g \equiv 0$ の場合の爆発定理を与える必要がある。この場合の

[1] Mohammad A. Rammaha 先生 (University of Nebraska-Lincoln)、高村博之 先生 (公立はこだて未来大学)、上坂洋司 先生 (日本大学) との共同研究

爆発解析は、空間２次元の場合に Uesaka [3] によって始められたが、最終的には、Takamura & Uesaka & Wakasa [2] によって一般次元 ($n \geq 2$) での爆発解析がなされ、さらには、(0.3) の条件を改良することに成功した。それが、以下の "改良型" 浅倉予想である。

【"改良型" 浅倉予想 [2]】ある正定数 R が存在して (f, g) は、$|x| \geq R$ に対して

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{かつ} \quad g(x) \geq \frac{\phi(|x|)}{(1+|x|)^{1+\kappa}}, \tag{0.4}$$

または

$$f(x) > 0,\ \Delta f(x) + F(f(x)) \geq \frac{\phi(|x|)}{(1+|x|)^{2+\kappa}} \quad \text{かつ} \quad g(x) \equiv 0, \tag{0.5}$$

をみたすとする。このとき

$$0 < \kappa < \kappa_0 \quad \text{かつ} \quad \phi \equiv \text{正定数}, \tag{0.6}$$

または

$$\kappa = \kappa_0 \quad \text{かつ} \quad \phi \text{ は正値, 単調増加で } \lim_{|x|\to\infty} \phi(|x|) = \infty \tag{0.7}$$

ならば、(0.1) の解は有限時間内に爆発する。他方、

$$(1+|x|)^{1+\kappa}\left(\frac{|f(x)|}{1+|x|} + \sum_{0<|\alpha|\leq[n/2]+2} |\nabla_x^\alpha f(x)| + \sum_{|\beta|\leq[n/2]+1} |\nabla_x^\beta g(x)|\right) \tag{0.8}$$

が十分小さく、$\kappa \geq \kappa_0$ かつ $p > p_0(n)$ ならば (0.1) の解は時間大域的に存在する。

本講演では、一般次元において、(0.4) と (0.5) の双方で扱われていない $f \not\equiv 0$ かつ $g \not\equiv 0$ の場合の (0.1) の解の爆発定理が得られたことを報告する。また、この結果を応用して、(0.1) の非線形項が $|u|^p|u_t|^q$ (ここで、$p = 0$ または $p > 1$ かつ $q > 1$) の場合の解の爆発定理が得られることも紹介したい。

References

[1] F.Asakura, *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decaying initial data in three space dimensions*, Comm. in Partial Differential Equations, **11(13)**(1986), 1459-1487.

[2] H.Takamura & H.Uesaka & K.Wakasa, *Sharp blow-up for semilinear wave equations with non-compactly supported data*, Discrete and Countinuous Dynamical Systems-Supplement 2011, W.Feng & Z.Feng & M.Grasselli & A.Ibragimov & X.Lu & S.Siegmund & J.Voigt (eds.), "Dynamical Systems, Differential Equations and Applications" vol. II, pp.1351-1357, AIMS, 2011.

[3] H.Uesaka, *Non-negative solutions of the Cauchy problem for semilinear wave equations and non-existence of global non-negative solutions*, More Progress in Analysis (ed. H.G.W.Begehr & F.Nicolosi), Proceedings of the 5th International ISAAC Congress (Catania, Italy, 25-30 July 2005), 571-579, World Scientific, 2009.

Error estimates for schemes by discrete variational derivative method for some evolution equations

愛媛大学 大学院理工学研究科 生産環境工学専攻　市川 享祐

自由エネルギーの変分から導かれる偏微分方程式に対する数値解析手法として, D. Furihata and M. Mori [4] によって離散変分導関数法という方法が提案されている. これはいわゆる構造保存数値解法の一つであり, 系が元々持っているエネルギー保存則や散逸則などの性質を, 離散系で再現するような差分スキームを構築するための方法である. この "連続系で元々持っていた性質を離散系で再現する" という事実は, 物理現象を数値シミュレーションする上で重要になるだけでなく, スキームの安定性の数学的証明に有効であることが知られている ([1]). また, その安定性の証明をもとに誤差の評価も行われている. しかしながら, その誤差の評価方法は一部の特殊な偏微分方程式の差分スキームに対してのみ適用できるものであり, 一般的な偏微分方程式の差分スキームへの適用は行われていない. そこで我々は, 離散化を行う際の刻み幅 (離散化幅) にある条件を与えることを仮定して, 誤差評価を行うことを提案する. これにより, より一般的な偏微分方程式の差分スキームの誤差評価が可能になり, スキームを評価する上での一つの指標になると考えている.

さて, 離散変分導関数法の概要を説明するために, 有限差分法との違いを図 1 に示す. ここで矢印 (a) は, 連続系において, 自由エネルギーの変分から偏微分方程式を導出し, エネルギー保存則などの性質を証明するまでの流れを表している. その偏微分方程式に対し, 有限差分法を適用したときの流れが矢印 (b) であり, 離散変分導関数法を適用したときの流れが矢印 (c) である. 有限差分法 (矢印 (b)) の場合は, 偏微分方程式を離散化して差分スキームを導く. ここで離散誤差が発生するため, 連続系で元々持っていたエネルギー保存則などの性質が, 離散系で再現されているとは限らない (一般的に証明できない) . これに対し離散変分導関数法 (矢印 (c)) の場合は, まず自由エネルギーを離散化して離散自由エネルギーを求めることから始める. そして, 連続系の流れ (矢印 (a)) に対応するような式変形を離散系で行う. すなわち, 連続系で偏微分方程式の導出と保存則などの証明ができたように, 離散系でも差分スキームの導出と離散的な保存則などの証明を試みる方法が離散変分導関数法である. より具体的な理論は本発表や参考文献の [2], [3] を参考にされたい.

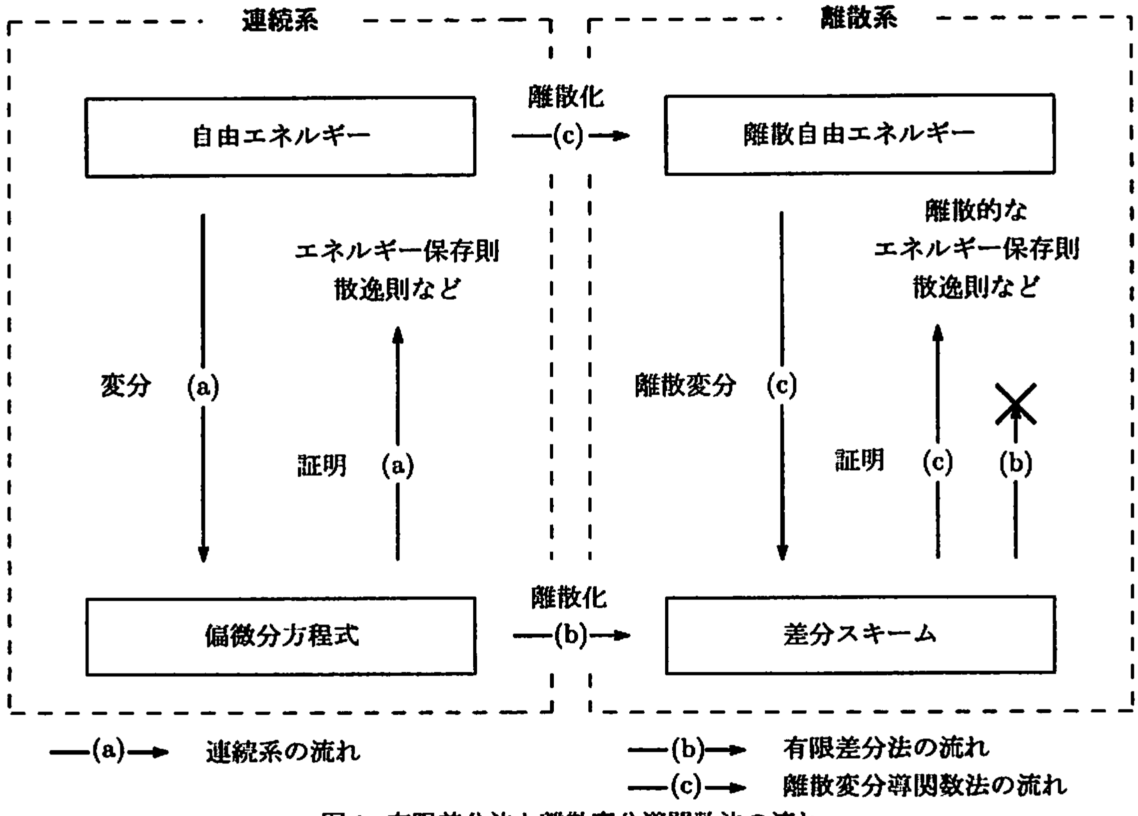

図 1: 有限差分法と離散変分導関数法の流れ

本稿の最後に, 数式を見通しやすくするための演算子を定義する. 離散条件として, 空間変数 x に対する分割数を N, 刻み幅を Δx で, 時間変数 t に対する刻み幅を Δt でそれぞれ表す. ただし, 空間については1次元の区間 $(0, L)$ を考える. また, $x = k\Delta x$, $t = n\Delta t$, $(k = 0, 1, \ldots, N; n = 0, 1, \ldots)$ における $f(x, t)$ の離散値を $f_k^{(n)}$ と略記する. 連続的な微分と積分を, 差分と和分で近似することを考察する. まずは, $f_k^{(n)}$ に対して作用する差分演算子 δ^+, δ^-, $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ を次のように定義する.

$$\delta_k^+ f_k^{(n)} \equiv \frac{f_{k+1}^{(n)} - f_k^{(n)}}{\Delta x}, \quad \delta_k^- f_k^{(n)} \equiv \frac{f_k^{(n)} - f_{k-1}^{(n)}}{\Delta x},$$

$$\delta_k^{(1)} f_k^{(n)} \equiv \frac{f_{k+1}^{(n)} - f_{k-1}^{(n)}}{2\Delta x}, \quad \delta_k^{(2)} f_k^{(n)} \equiv \frac{f_{k+1}^{(n)} - 2f_k^{(n)} + f_{k-1}^{(n)}}{\Delta x^2}.$$

更に, 高階の差分演算子を次のように与える.

$$\delta_k^{(2m+1)} \equiv \delta_k^{(1)} \delta_k^{(2m)}, \quad \delta_k^{(2m+2)} \equiv \delta_k^{(2)} \delta_k^{(2m)}. \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

和分には台形公式を採用する. そこで, 台形公式を表す和分演算子 $\sum{}''$ を次のように定義する.

$$\sum_{k=0}^{N}{}'' f_k^{(n)} \Delta x \equiv \left(\frac{1}{2} f_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{N-1} f_k^{(n)} + \frac{1}{2} f_N^{(n)} \right) \Delta x \approx \int_0^L f(x, t)\, \mathrm{d}x.$$

関数値を平均する平均演算子 $s^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ を次のように定義する.

$$s_k^{(1)} f_k^{(n)} \equiv \frac{f_{k+1}^{(n)} + f_{k-1}^{(n)}}{2}, \quad \mu_k^{(1)} f_k^{(n)} \equiv \frac{f_{k+1}^{(n)} + 2f_k^{(n)} + f_{k-1}^{(n)}}{4}.$$

以上のように定義したとき, 差分と和分は次の関係を満たす.

(1) $$\sum_{k=0}^{N}{}'' \delta_k^{(1)} f_k^{(n)} \Delta x = \left[\mu_k^{(1)} f_k^{(n)} \right]_0^N, \quad \sum_{k=0}^{N}{}'' \delta_k^{(2)} f_k^{(n)} \Delta x = \left[\delta_k^{(1)} f_k^{(n)} \right]_0^N.$$

すなわち, 微分と積分が逆演算の関係であるように, 差分と和分も逆の関係をもつことが分かる. また, 部分積分公式に対応するような, 次の部分和分公式が成立する.

(2) $$\sum_{k=0}^{N}{}'' f_k^{(n)} \left(\delta_k^{(1)} g_k^{(n)} \right) \Delta x + \sum_{k=0}^{N}{}'' \left(\delta_k^{(1)} f_k^{(n)} \right) g_k^{(n)} \Delta x = \frac{1}{2} \left[f_k^{(n)} \left(s_k^{(1)} g_k^{(n)} \right) + \left(s_k^{(1)} f_k^{(n)} \right) g_k^{(n)} \right]_{k=0}^N,$$

(3) $$\sum_{k=0}^{N}{}'' \frac{\left(\delta_k^+ f_k^{(n)} \right) \left(\delta_k^+ g_k^{(n)} \right) + \left(\delta_k^- f_k^{(n)} \right) \left(\delta_k^- g_k^{(n)} \right)}{2} \Delta x + \sum_{k=0}^{N}{}'' \left(\delta_k^{(2)} f_k^{(n)} \right) g_k^{(n)} \Delta x$$
$$= \frac{1}{2} \left[\left(\delta_k^{(1)} f_k^{(n)} \right) \left\{ \left(s_k^{(1)} + 1 \right) g_k^{(n)} \right\} + \left\{ \left(s_k^{(1)} - 1 \right) f_k^{(n)} \right\} \left(\delta_k^{(1)} g_k^{(n)} \right) \right]_{k=0}^N.$$

上述の離散変分導関数法の説明において "連続系の流れ（矢印 (a)）に対応するような式変形を離散系で行う" と記述したが, 実際, 微分積分の関係に対応する差分和分の関係 (1) や, 部分積分公式に対応する部分和分公式 (2), (3) を用いる.

参考文献

[1] D. Furihata, "A stable and conservative finite difference scheme for the Cahn-Hilliard equation," *Numer. Math.*, **87** (2001), 675-699.

[2] D. Furihata, M. Matsuo, *Discrete Variational Derivative Method*, Numerical Analysis and Scientific Computing series, CRC Press/Taylor & Francis, 2010.

[3] S. Koide, D. Furihata, "Nonlinear and linear conservative finite difference schemes for regularized long wave equation," *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **26** (2009), 15-40.

[4] 降旗大介, 森正武, 「偏微分方程式に対する差分スキームの離散的変分による統一的導出」, 『日本応用数理学会論文誌』, **8** (1998), 317-340.

2次元半無限領域における Rayleigh 波に関する数値計算

愛媛大学大学院理工学研究科　機械数理研究室　白石克郎

緒言

一般に地震波などに代表される3次元波動伝播問題は、縦波 (P 波)、横波 (S 波) に加え、Rayleigh 波と呼ばれる表面波が組み合わさり、複雑な挙動を示すことが知られている。本研究は半無限領域における弾性波動方程式に R 波が発生するような境界を与え、数値解析によって R 波の伝播の様子を検証することを目的とする。しかいs、差分化した3次元方程式は数値解析が困難であるため、2次元における次のような方程式を考える。

$$
\begin{cases}
\rho\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}(x_1,x_2,t) = (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}(x_1,x_2,t)+\mu\Delta\boldsymbol{u}(x_1,x_2,t) & (-\infty<x_1<\infty, 0\le x_2<\infty, t>0) \\
\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\delta_{j2}+\mu(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_j}(x_1,0,t)=0 & (-\infty<x_1<\infty, t>0, j=1,2) \\
\boldsymbol{u}(x_1,x_2,0)=\boldsymbol{f}_1(x_1,x_2) & (-\infty<x_1<\infty, 0\le x_2<\infty) \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(x_1,x_2,0)=\boldsymbol{f}_2(x_1,x_2) & (-\infty<x_1<\infty, 0\le x_2<\infty)
\end{cases}
\tag{1}
$$

ただし、$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ は2次元の変位を表し、ρ は領域の密度、λ,μ は Lame の弾性定数、δ は Kronecker delta である。この境界条件は R 波が発生する Neumann 条件である。Neumann 境界以外の境界には波の反射を防ぐため、波が抜ける境界条件を与えた。

数学的準備

フーリエ解析

式 (1) を変数分離して得られる Helmholtz 方程式の基本解

$$
\begin{cases}
\text{P 波入射とその反射波を記述する } \Psi_P(x,\, k) \\
\text{S 波入射とその反射波を記述する } \Psi_S(x,\, k) \\
\text{R 波入射とその反射波を記述する } \Psi_R(x,\, p)
\end{cases}
$$

を用いて定義される一般化された Fourier 変換を、次のように書く。

$$
\begin{cases}
F_j\,\mathbf{f}(k) = \int_{R^2_+} \overline{\Psi_j(x,\, k)}\cdot\mathbf{f}(x)\rho dx \quad (j=P,S) \\
F_R\,\mathbf{f}(p) = \int_{R^2_+} \overline{\Psi_R(x,\, p)}\cdot\mathbf{f}(x)\rho dx
\end{cases}
$$

このとき式 (1) の解 $\mathbf{u}(x,\, t)$ は

$$
\sum_{j=P,S} F_j^*\left\{\cos(C_j|k|t)F_jf_1(x)+\frac{\sin(C_j|k|t)}{C_j|k|}F_jf_2(x)\right\}+F_R^*\left\{\cos(C_R|p|t)F_Rf_1(x)+\frac{\sin(C_R|p|t)}{C_R|p|}F_Rf_2(x)\right\}
$$

と書けることが知られている。ただし、C_P, C_S, C_R はそれぞれ P 波、S 波、R 波の速さである。これによって $\mathbf{u}(x,\, t)$ は、P 波、S 波、そして R 波成分にそれぞれ分解することができる。

差分化

波動方程式を中心差分を用いて差分化する。まず、空間 x_1, x_2 方向の間隔を h_1, h_2、時間 t の間隔を s とする。次に $x_1 = x_i = ih_1, x_2 = x_j = jh_2, t = t_k = ks$ として $u(x_i, x_j, t_k) = u_{i,j}\ k$ と置き換えると、式 (1) は以下のように差分化できる。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{i,j}^{k+1} =& 2\mathbf{u}_{i,j}^{k} - \mathbf{u}_{i,j}^{k-1} + \frac{s^2}{\rho {h_1}^2} B_{11}\left(\mathbf{u}_{i+1,j}^{k} - 2\mathbf{u}_{i,j}^{k} + \mathbf{u}_{i-1,j}^{k}\right) \\ &+ \frac{s^2}{4\rho h_1 h_2} B_{12}\left(\mathbf{u}_{i+1,j+1}^{k} - \mathbf{u}_{i+1,j-1}^{k} - \mathbf{u}_{i-1,j+1}^{k} + \mathbf{u}_{i-1,j-1}^{k}\right) \\ &+ \frac{s^2}{\rho {h_2}^2} B_{22}\mathbf{u}_{i,j+1}^{k} - 2\mathbf{u}_{i,j}^{k} + \mathbf{u}_{i,j-1}^{k})\end{aligned}$$

ただし、$B_{11} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda+\mu \\ \lambda+\mu & 0 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu \end{pmatrix}$ であり、i, j, k の範囲は I, J を十分大きくとり、それぞれ $i = 1, 2, \cdots, I-1$, $j = 1, 2, \cdots, J-1$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ である。

エネルギー

式 (1) の解に対するエネルギー密度関数 $e(\mathbf{u}(t))$ は、以下の通りである。

$$e(\mathbf{u}(t)) = \frac{1}{\rho}\left\{\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right\} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2$$

ここで、式 (2.1) の $e(\mathbf{u}(t))$ を用いてエネルギー密度の領域全体の総和を

$$E(\mathbf{u}(t)) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e(\mathbf{u}(t))\, dx_1 dx_2$$

と書くと、$E(\mathbf{u}(t)) = E(\mathbf{u}(0))$ が成り立つことが知られている。この等式を利用することで、差分化された式 (1.1) が正しく計算されているかどうか確認できる。

2次元物体散乱に関する数値計算

愛媛大学大学院　理工学研究科　機械数理研究室　八木　航己

1. 緒　言

本講演では既知の形状関数を持つ，2次元物体散乱に関する数値計算について報告する。
Ω を2次元無限領域とする次の波動方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \Delta v(x,t) = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (1) \\ v(x,t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \quad (2) \end{cases}$$

ただし,

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2) \\ \Delta : 2\text{次元ラプラシアン} \end{cases}$$

である.

文頭で述べた散乱波は, この方程式から時間と空間の変数分離で得られるヘルムホルツ方程式 (空間変数と分離定数・固有値の方程式) から求められる. この散乱波 v から散乱振幅と呼ばれる散乱体の散乱特性を表す量が導かれる. これらの量は散乱体の情報を反映している量として逆問題において必要不可欠なものとなっている.
本講演は境界要素法をもちいた数値解析により散乱振幅を求めた.

2. 数学的考察

Ω を摂動された2次元半無限空間とする.
式 (1),(2) を変数分離すれば次の x に関する Helmholtz 方程式と境界条件を得る.

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)u(x) = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (3) \\ u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \quad (4) \end{cases}$$

物理的直感に基づいて全波 $u(x)$ を

$$u(x) = u_0(x) + u_s(x)$$

とおく. また,$u_0(x)$ は次のように与える.

$$u_0(x) = (2\pi)^{-1}\{exp(ix\hat{\kappa}) - exp(ix\kappa)\}$$

なお,

$$\begin{cases} \kappa = (\kappa_1, \kappa_2) \\ \hat{\kappa} = (\kappa_1, -\kappa_2) \end{cases}$$

となっている.
$u_s(x)$ は摂動に関する散乱波である.

$u_0(x)$ は Helmholtz 方程式を満たすので, 散乱波 $u_s(x)$ も同様に Helmholtz 方程式を満たすことが分かる. ここで散乱波 $u_s(x)$ に次の無限遠方で反射しない条件であるゾンマーフェルトの放射条件:

$$\frac{\partial u_s(x)}{\partial r} - \kappa u_s(x) = o(\frac{1}{\sqrt{r}}) \quad (r = |x| \to +\infty)$$

のもとで積分方程式化すれば次の式 (5) を得る.

$$u_s(\xi) = \int_{\partial\Omega_c} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(x)G(x,\xi) - \frac{\partial G}{\partial n}(x,\xi)u(x) \right\} d\Gamma \quad (5)$$

Dirichlet 条件より (5) は次の式 (6) のように表される.

$$u_s(\xi) = \int_{\partial\Omega_c} \frac{\partial u}{\partial n}(x) G(x,\xi) d\Gamma \quad (6)$$

以上より

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \int_{\partial\Omega_c} \frac{\partial u}{\partial n}(x) G(x,\xi) d\Gamma \quad (7)$$

ここで $G(x,\xi)$ は Helmholtz 作用素の基本解であり,Hankel 関数を用いて次のように表される.

$$G(x,\xi) = \frac{i}{4}\{H_0^{(1)}(\kappa|x-\xi|) - H_0^{(1)}(\kappa|x-\hat{\xi}|)\}$$

なお,$H_0^{(1)}$ は 0 次の Hankel 関数である.
散乱振幅 $A(r,w,\phi)$ は次の漸近展開で表すことができる:

$$u(x) = u_0(x) + A(r,w,\phi)\frac{e^{i\kappa R}}{\sqrt{R}} + o(R^{-\frac{1}{2}}) \quad (R = |\xi|\ ,\ \theta = \frac{\xi}{R})$$

この式を以下のようにして解き, 散乱振幅 $A(r,w,\phi)$ を求める.$R \to \infty$ において

$$\{u(x) - u_0(x)\}\sqrt{R}e^{-i\kappa R} = A(r,w,\phi) + o(1)$$

3. 数値解析

境界要素法を用いて数値解析をする. 境界要素法は式 (7) の右辺の被積分関数 $u(x)$ に該当する Neumann データの近似解を割り出し, それをもとに再び式 (7) から $u(\xi)$ の近似解を求める手法である. 近似解は, 境界を N 個の節点を結ぶ多角形で近似し, それぞれの節点に対する基底関数の 1 次結合で求める. また, 実際の計算は C 言語を用いておこなった.

研究結果は講演時に述べる.

第二音波の方程式の解の爆発

杉山 裕介（すぎやま ゆうすけ）
東京理科大学大学院理学研究科数学専攻 D2

1　導入

本講演では以下のような非線形波動方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = u\partial_x(u\partial_x u), & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

ここで $u(t,x)$ は実数値未知関数である.
この方程式は第二音波と呼ばれる超流動体中の温度波を記述する方程式である.

初期値 u_0 について次を仮定する. ある正定数 A が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して次を満たす.

$$u_0(x) \geq A. \tag{2}$$

この仮定によって, 時刻 $t=0$ で (1) の方程式が退化しなくなるため, 強圧的な双曲型方程式と見なすことができる. 時間局所解の存在定理を紹介する ([3]).

proposition 1 (K. Kato and S.). $s > \frac{1}{2}$ とし, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\partial_x u_0$, $u_1 \in H^s(\mathbb{R})$ とする. さらに正定数 A があって $u_0(x) \geq A$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ と仮定する. この時, 初期値問題 (1) の 時間局所解 u は次のクラスで一意的に存在する.

$$u - u_0 \in \bigcap_{j=0,1,2} C^j([0,T]; H^{s-j+1}(\mathbb{R})),$$
$$u(t,x) \geq A/2, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}.$$

2　主結果 (解の爆発)

第二音波の方程式の解の爆発について考える. Proposition 1 を繰り返し用いて, (1) の解を延長していくことを考えると, 解の延長 (Proposition 1 を用いた解の延長) ができなくなる時刻 T において次の (A) と (B) のどちらかが起こる.

$$\text{(A)} \quad \overline{\lim_{t \nearrow T}} \|\partial_t u(t)\|_{H^s} + \|\partial_x u(t)\|_{H^s} = \infty.$$

または

$$\text{(B)} \quad \lim_{t \nearrow T} \inf_{[0,t] \times \mathbb{R}} u(t,x) = 0.$$

この講演では, (A), (B) どちらかが起きるとき解が爆発すると呼び, (A), (B) が起こる十分条件をそれぞれ与える ([2]).

Theorem 2. A を正定数, $s > \frac{1}{2}$, $\phi \in H^{s+1}(\mathbb{R})$ として, $u(t,x)$ は, 次を初期値に持つ (1) の解とする.

$$u_0(x) = A + \epsilon\phi(\frac{x}{\epsilon}) \quad u_1(x) = -u_0(x)\partial_x u_0(x), \tag{3}$$

この時, ϵ が十分小ならば, ある時刻 T が存在して次が成り立つ.

$$\lim_{t \nearrow T} \|\partial_t u(t)\|_{H^s} + \|\partial_x u(t)\|_{H^s} = \infty. \tag{4}$$

Theorem 3. A を正定数とする, (1) の初期値 $u(0,x) = A + \phi(x) > 0$, $\partial_t u(0,x) = u_1(x)$ が次を満たすとする,

$$\phi \in H^{s+1}\backslash\{0\}, \ u_1 \in H^s,$$
$$\phi, \ u_1 \text{ compact な台を持つ},$$
$$u_1(x) \pm u_0(x)\partial_x u_0(x) \leq 0, \ \text{for } x \in \mathbb{R},$$

この時, ある時刻 T が存在して, (1) の一意解 $u \in C^1([0,T); H^s(\mathbb{R}))$ が存在しある $x_0 \in \mathbb{R}$ について $\lim_{t \to T} u(t, x_0) = 0$ が成り立つ.

3 証明方針

第二音波の方程式と似た方程式 :

$$\partial_t^2 u = c(u)\partial_x(c(u)\partial_x u) \tag{5}$$

の初期値問題の解爆発が R. T .Glassey, J. K. Hunter, Y. Zheng ([1]) によって考えられている. しかしながら彼らは, この方程式にある定数 c_1, c_2 があって

$$0 < c_1 \leq c(r) \leq c_2, \quad r \in \mathbb{R},$$

という仮定を付している. この仮定に代わるアプリオリ評価を行い彼らの証明に倣って Theorem 1 は示される.

Theorem 2 は, P. Zhang, Y. Zheng([4]) による (5) の初期値問題の解の大域可解性定理を応用する.

References

[1] R. T. Glassey, J. K. Hunter, Y. Zheng, Singularities of a variational wave equation. J. Differential Equations **129** (1996). 49-78.

[2] K. Kato, Y. Sugiyama,Blow up of solution to the second sound equation in one space dimension, to appear in Kyusyu J. Math..

[3] K. Kato, Y. Sugiyama, Local existence and uniqueness theory for the second sound equation in one space dimension, J. Hyperbolic Differential Equations **9** (2012), 177-193.

[4] P. Zhang, Y. Zheng, Rarefactive solutions to a nonlinear variational wave equation of liquid crystals, Comm. Partial differential equations **26** (2001), 381-419.

双曲型発展方程式に対する抽象的コーシー問題*

吉井 健太郎 (東京理大・理)

本講演では, [5] に基づいて Hilbert 空間における線形発展方程式の抽象定理を紹介し, 定理が時間に依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 型方程式の Cauchy 問題に適用されることを示す.

1. Problem

Hilbert 空間 X 上の 閉線形作用素族 $\{A(t);\, t \in I := [0,T]\}$ について, 次のような線形発展方程式の抽象的 Cauchy 問題を考える:

$$\text{(ACP)} \qquad \begin{cases} (d/dt)u(t) + A(t)u(t) = f(t), & t \in I, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

2. Main Result

$\{A(t);\, t \in I\}$ についての仮定を述べるために正値自己共役作用素 S_0 と正値自己共役作用素族 $\{S(t);\, t \in I\}$ を用意する:

Assumption on $\{S(t)\}$. 作用素族 $\{S(t)\}$ は次の 3 条件を満たすものとする:

(S1) $Y := D(S_0^{1/2}) = D(S(t)^{1/2})$ かつある 定数 $K \geq 1$ で

$$\frac{1}{K}\|S_0^{1/2}u\|^2 \leq (u, S(t)u) \leq K\|S_0^{1/2}u\|^2, \quad u \in D(S(t)),\ t \in I.$$

(S2) $S(\cdot)^{1/2} \in C_*(I; B(Y,X))$. ここで $B(Y,X)$ は Y から X への有界線形作用素の全体であり, 添え字の $*$ は強作用素位相での連続性を意味する.

(S3) ある非負関数 $\sigma \in L^1(I)$ で

$$\left|\|S(t)^{1/2}v\| - \|S(s)^{1/2}v\|\right| \leq \left|\int_s^t \sigma(r)\,dr\right| \max_{r\in\{s,t\}} \|S(r)^{1/2}v\|, \quad v \in Y,\ t,s \in I.$$

Assumption on $\{A(t)\}$. 作用素族 $\{A(t)\}$ は次の 4 条件を満たすものとする:

(I) ある非負定数 $\alpha \geq 0$ で $|\mathrm{Re}\,(A(t)v,v)| \leq \alpha\|v\|^2$, $v \in D(A(t))$, $t \in I$.

(II) $Y \subset D(A(t))$, $t \in I$.

(III) ある非負定数 $\beta \geq \alpha$ で $|\mathrm{Re}\,(A(t)u, S(t)u)| \leq \beta\|S(t)^{1/2}u\|^2$, $u \in D(S(t))$, $t \in I$.

(IV) $A(\cdot) \in C_*(I; B(Y,X))$.

主定理 ([5]). 上記の仮定の下, (ACP) は初期値 $u_0 \in Y$ 及び非斉次項 $f(\cdot) \in C(I;X) \cap L^1(I;Y)$ に対して Y-値解 $u(\cdot) \in C^1(I;X) \cap C(I;Y)$ を一意にもつ.

注意. 主定理は Okazawa [3] の一般化に他ならず, $S(t) \equiv S_0$ をたんに S とすると一致する. 言い換えれば, 主定理は [3] の S の役割を S_0 と $\{S(t)\}$ に振り分けているとみなせる.

*本講演は岡沢登氏 (東京理大・理) との共同研究に基づくものである.

3. Schröinger equation with moving nuclei

$\Sigma^2(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^2(\mathbb{R}^N); (1+|x|^2)u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ とする. このとき, 次のような中心が動く複数の Coulomb ポテンシャルを伴った Schrödinger 方程式の初期値問題を考える:

$$\text{(SE)} \qquad \begin{cases} i\,\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + V(t,x)u + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{e_j u}{|x - c_j(t)|} = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in \Sigma^2 = \Sigma^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

ここで $N \geq 3$, u は複素数値の未知関数 $u : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $e_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ とする. ベクトル値関数 $c_j : I \to \mathbb{R}^N$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ と実ポテンシャル $V_1 : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は以下の仮定を満たすものとする:

$$\text{(c1)} \qquad c_j \in W^{2,1}(I; \mathbb{R}^N) \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\text{(c2)} \qquad c_j(t) \neq c_k(t) \quad (t \in I,\ j \neq k),$$

$$\text{(V1)} \qquad (1 + |x|^2)^{-1} V \in W^{1,1}(I; L^\infty(\mathbb{R}^N)),$$

$$\text{(V2)} \qquad V \in L^1(I; W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)).$$

このとき, (SE) は Σ^2-値解 $u \in C^1(I; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C(I; \Sigma^2(\mathbb{R}^N))$ を一意にもつ.

ポテンシャルの特異点が動くため, 直接 (SE) に主定理を適用させることはできないが, u に局所擬 Galilei 変換 ([5]; cf. Kato-Yajima [2]) という特殊な変換を施すことで特異点を固定し, (SE) を次の問題に書き換えることができる:

$$\text{(SE-}v\text{)} \qquad \begin{cases} i\,\dfrac{\partial v}{\partial t} + Da(t,y)Dv + q(t,y)v + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{e_j v}{|y - c_j(0)|} = 0, \\ v(\cdot, 0) = u_0 \in \Sigma^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

ここで $D := i^{-1}\nabla - b(t,y)$, $a : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N \times N}$, $b : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $q : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(SE-v) に主定理を適用することで (SE-v) 及び, (SE) の解が得られる.

特に, $m = 1$ のとき, 通常の Galilei 変換 (平行移動) $v(t,y) := u(t, y + c_1(t))$ により特異点を固定できる. この場合については Baudoin-Kavian-Puel [1] や, Okazawa-Yokota-Y [4], Y [6] といった先行結果がある.

References

[1] L. Baudouin, O. Kavian and J.-P. Puel, *Regularity for a Schrödinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control*, J. Differential Equations **216** (2005), 188–222.

[2] T. Kato and K. Yajima, *Dirac equations with moving nuclei*, Ann. Inst. H. Ponicaré, Phys. Théor. **54** (1991), 209–221.

[3] N. Okazawa, *Remarks on linear evolution equations of hyperbolic type in Hilbert space*, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998), 399–423.

[4] N. Okazawa, T. Yokota and K. Yoshii, *Remarks on linear Schrödinger evolution equations with Coulomb potential with moving center*, SUT J. Math. **46** (2010), 155-176.

[5] N. Okazawa and K. Yoshii, *Linear Schrödinger evolution equations with moving Coulomb singularities*, preprint.

[6] K. Yoshii, *Classical solutions to a linear Schrödinger evolution equation involving a Coulomb potential with a moving center of mass*, Funkcialaj Ekvacioj **54** (2011), 485–493.

On second order weakly hyperbolic equations and the ultradifferentiable classes

Fumihiko Hirosawa[a], Haruhisa Ishida[b]

[a] Department of Mathematical Sciences, Yamaguchi University, Yamaguchi 753-8512, Japan

[b] Department of Computer Science, The University of Electro-Communications, Tokyo 182-8585, Japan

1 Introduction

We study the Cauchy problem for second order weakly hyperbolic equations with time dependent coefficients:

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - a(t)^2\Delta\right) u = 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbf{R}^n, \\ (u(0,x), u_t(0,x)) = (u_0(x), u_1(x)), \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

where $a(t) \geq 0$ and $T > 0$. The pioneer paper [1] shows that the *smoothness* of the coefficient $a(t)$ is crucial for the well-posedness of (1). Precisely, if $a(t)$ is smoother in the sense of Hölder continuity, then (1) is well-posed in the Gevrey class of larger order. Furthermore, it is studied in [2] that (1) is well-posed in the appropriate functions space, which is set between C^∞ class and the Gevrey class, if $a(t)$ belongs to an intermediate class between C^∞ and real analytic class. In particular, it is studied in [4] that if $a(t) > 0$ on $[0,T)$ and $a(T) = 0$ then (1) can be C^∞ well-posed for $a(t) \in C^2$ under suitable assumptions to $a(t)$ for the orders of *degeneration* and *oscillation* as $t \to T$. Generally, we cannot expect that further smoothness of $a(t)$ than C^2 brings a benefit as the results [1, 2] for the model of one point degeneration. However, we can do it if we introduce an additional property of the coefficient, which is called the *stabilization* property. Indeed, it is proved in [3] that there exists an example of $a(t)$ such that the C^∞ well-posedness cannot be proved by [4] but can be done if we assume a suitable stabilization condition and $a(t) \in C^\infty$ simultaneously. The main purpose of this talk is to consider a possibility that further smoothness of $a(t)$, which belongs to the ultradifferentiable class, bring a benefit for the C^∞ well-posedness of (1).

2 Main theorem

For a function $\lambda(t)$ satisfying

$$\lambda'(t) \leq 0, \quad \lambda(t) > 0 \ \text{ on } \ [0,T) \ \text{ and } \ \lambda(T) = 0 \tag{2}$$

we denote

$$\Lambda(t) = \int_t^T \lambda(s)\, ds. \tag{3}$$

Moreover, we define the positive monotone decreasing function $\Theta(t)$ by

$$\Theta(t) = \int_t^T |a(s) - \lambda(s)|\, ds. \tag{4}$$

Let us introduce the following hypothesis:

(H1) There exists a constant $C_0 > 1$ such that

$$C_0^{-1}\lambda(t) \leq a(t) \leq C_0\lambda(t). \tag{5}$$

(H2)

$$\Theta(t) = o(\Lambda(t)) \quad (t \to T). \tag{6}$$

(H3) $a(t) \in C^\infty([0,\infty))$ satisfies

$$\frac{|a^{(k)}(t)|}{\lambda(t)} \le M_k \rho(t)^k \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{7}$$

for a positive and strictly increasing function $\rho(t) \in C^0([0,T))$ satisfying $\lim_{t\to T} \rho(t) = \infty$, and a sequence of positive real numbers $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ satisfying

$$\frac{M_k}{kM_{k-1}} \le \frac{M_{k+1}}{(k+1)M_k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Here we define the associated function $\mathcal{M}(r)$ of $\{M_k\}$ by

$$\mathcal{M}(r) = \mathcal{M}(r; \{M_k\}) := \sup_{k\ge 1} \left\{ \frac{r^k}{M_k} \right\} \quad (r > 0). \tag{9}$$

Then our main theorem is represented as follows:

Theorem 1. *If there exist $\lambda(t) \in C^1([0,T])$ satisfying (2) and a sequence $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ such that (H1), (H2) and (H3) with*

$$\rho(t) = \frac{\lambda(t)}{\mathcal{M}^{-1}\left(\frac{\Lambda(t)}{\Theta(t)}\right)} \sigma\left(\frac{1}{\Theta(t)}\right) \tag{10}$$

are valid for a positive strictly increasing function $\sigma(r) \in C^0([0,\infty))$, then there exists a positive constant C such that the following estimate is established

$$\|(u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))\|_{L^2} \le \left\| e^{C\mu(\langle D\rangle)} (u_0(\cdot), u_1(\cdot)) \right\|_{L^2}, \tag{11}$$

where

$$\mu(\tau) = \frac{\tau}{\sigma^{-1}(\tau)}. \tag{12}$$

References

[1] F. Colombini, E. Jannelli, and S. Spagnolo, Well-posedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for a nonstrictly hyperbolic equation with coefficients depending on time. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **10** (1983) 291-312.

[2] F. Colombini and T. Nishitani, On second order weakly hyperbolic equations and the Gevrey classes. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* **31** (2000) 31–50.

[3] F. Hirosawa, On second order weakly hyperbolic equations with oscillating coefficients and regularity loss of the solutions. *Math. Nachr.* **283** (2010) 1771–1794.

[4] K. Yagdjian, The Cauchy problem for hyperbolic operators. Multiple characteristics, micro-local approach, Mathematical Topics Vol. 12 (Akademie Verlag, Berlin, 1997).

波動方程式の解の微分に対する重み付き各点評価の考察

久保 英夫 (東北大学大学院情報科学研究科)
土井 一幸 (富山県立大学工学部)

次の非線型波動方程式系の初期値問題を考える:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u_i - c_i^2 \Delta u_i = F_i(\partial u), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^3, \\ u_i(0,x) = \varepsilon \varphi_i(x), \quad \partial_t u_i(0,x) = \varepsilon \psi_i(x), & x \in \mathbf{R}^3 \quad (i = 1, \ldots, N), \end{cases}
$$

ただし $c_i > 0$, $\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial_j^2$, $\partial_t = \partial_0 = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ($j = 1, 2, 3$), $\partial u = (\partial_a u_i)_{1 \le i \le N, 0 \le a \le 3}$, $\varepsilon > 0$ とする. また, 簡単のため, $\varphi_i, \psi_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ とし, 非線型項 $F_i(\partial u)$ は ∂u に関して p 次 ($p \ge 2, p \in \mathbf{Z}$) の斉次多項式とする.

(1) について "SDGE が成り立つ" とは, いかなる $\varphi_i, \psi_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ に対しても十分小さく ε を選べば (1) が時間大域解を持つことを指すものとする. ここで, $p \ge 3$ のときは任意の $\{c_i, F_i\}_{1 \le i \le N}$ に対して SDGE が成り立つが, $p = 2$ のときには必ずしも SDGE が成り立つとは限らないことが知られているため, これを踏まえて以下では $p = 2$ とする. また, $F_i(\partial u)$ を $F_i(\partial u) = F_i^{\mathrm{I}}(\partial u) + F_i^{\mathrm{II}}(\partial u) + F_i^{\mathrm{III}}(\partial u)$ と分けて取り扱う, ただし

$$
F_i^{\mathrm{I}}(\partial u) = \sum_{(j,k) \in \{(j,k) | c_j \ne c_k\}} \sum_{a,b=0}^{3} C_{ijk}^{ab} (\partial_a u_j)(\partial_b u_k) \qquad \text{(互いに共鳴しない項)},
$$

$$
F_i^{\mathrm{II}}(\partial u) = \sum_{(j,k) \in \{(j,k) | c_j = c_k \ne c_i\}} \sum_{a,b=0}^{3} C_{ijk}^{ab} (\partial_a u_j)(\partial_b u_k) \qquad \text{(線型項とは共鳴しない項)},
$$

$$
F_i^{\mathrm{III}}(\partial u) = \sum_{(j,k) \in \{(j,k) | c_j = c_k = c_i\}} \sum_{a,b=0}^{3} C_{ijk}^{ab} (\partial_a u_j)(\partial_b u_k) \qquad \text{(線型項とも共鳴する項)},
$$

$C_{ijk}^{ab} \in \mathbf{R}$ ($1 \le i, j, k \le N, 0 \le a, b \le 3$) とした. Christodoulou [1] 及び Klainerman [3] はそれぞれ独立に, $F^{\mathrm{I}}(\partial u) = \{F_i^{\mathrm{I}}(\partial u)\}_{1 \le i \le N} = 0$ かつ $F^{\mathrm{II}}(\partial u) = \{F_i^{\mathrm{II}}(\partial u)\}_{1 \le i \le N} = 0$ のときに $F^{\mathrm{III}}(\partial u) = \{F_i^{\mathrm{III}}(\partial u)\}_{1 \le i \le N}$ がある条件 (零条件と呼ばれる) を満たせば SDGE が成り立つことを示した. その後, 横山 [4] は $F^{\mathrm{I}}(\partial u)$, $F^{\mathrm{II}}(\partial u)$ に制限を課さずに SDGE が成り立つことを示した:

定理 1 (横山 [4]). $F^{\mathrm{III}}(\partial u)$ が零条件を満たせば SDGE が成り立つ.

我々の目的は, 上の定理の証明を再考察することにある. そのために, 次の非斉次線型波動方程式を考える:

$$
(2) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = g, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^3, \\ u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0, & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases}
$$

ただし $c > 0$ とし, 非斉次項 $g = g(t,x)$ は適当なだけ滑らかなもとのする. 横山 [4] が用いた評価と我々の評価を述べるための記号を用意する.

記号. $\partial = (\partial_t, \nabla)$ とする. また, $\theta \geq 1$ に対して $\Phi_\theta(t) = 1$ $(\theta > 1)$, $= \log(2+t)$ $(\theta = 1)$ とする. さらに $\tilde{c} \geq 0$, $\mu, \nu \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $t \geq 0$ に対して

$$[g(t)]_{k,\tilde{c},\mu,\nu} := \sup_{(s,y)\in(0,t)\times\mathbf{R}^3} \sum_{|\alpha|\leq k} |y|(1+|y|+s)^\nu (1+\big||y|-\tilde{c}s\big|)^\mu |Z^\alpha g(s,y)|,$$

$$\langle g(t)\rangle_{k,\tilde{c},\mu,\nu} := \sup_{(s,y)\in(0,t)\times\mathbf{R}^3} \sum_{|\alpha|\leq k} (1+|y|)^{1+\nu} (1+\big||y|-\tilde{c}s\big|)^\mu |Z^\alpha g(s,y)|$$

と定める, ただし $Z = (Z_0, Z_1, \ldots, Z_6) = (\partial_t, \nabla, \Omega)$, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\Omega = x \times \nabla$ とした. また, $c > 0$, $\mu \geq 1$, $\nu \in \mathbf{R}$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}^3$ に対して, $\mathcal{D}_{c,\mu,\nu}(t,x) := \Phi_\mu(t)(1+|x|)^{-1}(1+\big||x|-ct\big|)^{-\nu}$ と定める.

横山 [4] は定理 1 を示すために, 次で与えられる重み付き L^∞-L^∞ 評価を用いた.

命題 2 (横山 [4]). u を (2) の解, $\tilde{c} \geq 0$, $\mu \geq 1$, $\nu \geq 0$ とする. このとき, 次が成り立つ:

(i) $c = \tilde{c}$ かつ $\nu \geq 1$ ならば $|\partial u(t,x)| \leq C(\mathcal{D}_{c,\mu,\nu}(t,x) + \mathcal{D}_{c,\nu,\mu}(t,x))[g(t)]_{1,\tilde{c},\mu,\nu}$;

(ii) $c \neq \tilde{c}$ ならば $|\partial u(t,x)| \leq C\mathcal{D}_{c,\mu,\nu}(t,x)[g(t)]_{1,\tilde{c},\mu,\nu}$.

これに対して我々は上の評価を改善し, 定理 1 を示すのに十分な次の評価を得た.

定理 3. u を (2) の解, $\tilde{c} > 0$, $\mu \geq 1$, $\nu \geq 0$ とする. このとき, 次が成り立つ:

(i) $c = \tilde{c}$ かつ $\nu \geq 1$ ならば $|\partial u(t,x)| \leq C(\mathcal{D}_{c,\mu,\nu}(t,x) + \mathcal{D}_{c,\nu,\mu}(t,x))\langle g(t)\rangle_{4,\tilde{c},\mu,\nu}$.

(ii) $c \neq \tilde{c}$ ならば $|\partial u(t,x)| \leq C(\mathcal{D}_{c,\mu,\nu}(t,x) + \mathcal{D}_{c,2,\mu}(t,x))\langle g(t)\rangle_{4,\tilde{c},\mu,\nu}$.

命題 2 と定理 3 の違いは, 命題 2 で用いた重みの一部 $(1+|y|+s)$ を定理 3 では $(1+|y|)$ に弱めた点にある. この点を考慮し定理 3 (ii) を用いることで, $F^{\mathrm{II}}(\partial u)$ のア・プリオリ評価が易しくなる. また, L^∞-L^∞ 評価の証明自身も定理 3 のほうが簡略である. 具体的には, 横山 [4] が非斉次解を直接評価したのに対し, 我々はデュアメルの原理を用いることにより斉次方程式

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^3, \\ u(0,x) = 0, \quad \partial_t u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

の解を評価を用いた, それは Klainerman [2] により得られた次の評価である:

命題 4 (Klainerman [2]). $v = v(t,x)$ を (3) の解とする. このとき.

$$|\partial v(t,x)| \leq C\frac{1}{r}\Big(1+\frac{A_c}{r}\Big)\int_{A_c\leq|y|\leq B_c} \frac{1}{|y|^2}|\varphi(y)|_4\,dy + C\frac{1}{rA_c}\int_{|y|=A_c}|\varphi(y)|_2\,dS_y + C\frac{1}{rB_c}\int_{|y|=B_c}|\varphi(y)|_2\,dS_y$$

が成り立つ, ただし $r = |x|$, $A_c = |r-ct|$, $B_c = r+ct$ とし, $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $x \in \mathbf{R}^3$ に対して $|\varphi(x)|_k = \sum_{|\alpha|\leq k}|Z^\alpha \varphi(x)|$ とした.

参考文献

[1] Christodoulou, D., Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 267–282.

[2] Klainerman, S., Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 269–288.

[3] Klainerman, S., Lectures in Appl. Math. **23** (1986), 293–326.

[4] Yokoyama, K., J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 609–632.

非線形シュレーディンガー方程式の固定振幅での逆散乱問題について

渡邊　道之　(新潟大・教育)*

1. 問題の背景

非線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + q(x)|u|^{p-1}u \tag{1}$$

について考える．$U(t)f$ を初期値 f の解とする．$U_0(t)g$ を初期値 g の free solution とする．$t \to \pm\infty$ のとき，$U(t)f \to U_0(t)f_\pm$ であるとする．このとき，対応 $S: f_- \mapsto f_+$ を散乱作用素という．

Strauss は 1974 年の論説 [3] のなかで,「From knowledge of the scattering operator S and the free dynamics $U_0(t)$, we want to recover the perturbed dynamics $U(t)$」という散乱の逆問題について考察し，2 つの例を提示した．1 つは非線形 Klein-Gordon 方程式．もう 1 つは非線形 Schrödinger 方程式 (1) である．この論説のなかで，Strauss は「S と $U_0(t)$ から非線形項の係数 $q(x)$ を決定できる」と述べている．線形 Schrödinger 方程式の散乱の逆問題はこれ以前から研究されているが，非線形 Schrödinger 方程式の散乱の逆問題に関する研究は，Strauss の結果が初めてであろう．

Strauss の方法の骨格は，散乱作用素の積分表示

$$(S\phi)(x) = \phi(x) - i\int_{-\infty}^{\infty} U_0(t)q(x)|u(t,x)|^{p-1}u(t,x)\,dt$$

において，解 $u(t,x)$ を free solution $U_0(t)\phi$ で近似するとき，$\phi(x)$ に小さいパラメータ $\varepsilon > 0$ を入れ，極限をとることである．すなわち，次の等式が成り立つことが重要である．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{i}{\varepsilon^p}\langle (S-I)(\varepsilon\phi),\phi\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} q(x)\,|U_0(t)\phi(x)|^{p+1}\,dx\,dt. \tag{2}$$

ここで，$\phi(x)$ をうまくとると，$q(x)$ の任意の点の値が取り出せる．Strauss が提示した例は，まとめると，次のようになる．非線形指数 p は既知とする．このとき，散乱作用素の「低振幅極限」から，非線形項の係数 $q(x)$ を一意に決定できる．

「低振幅極限」の方法では，(2) の左辺の量は明らかに非線形指数 p に依存する．このため,「低振幅極限」を考える限り，非線形指数 p は既知でなければならない．

Strauss の例から 30 数年経つが，散乱作用素から非線形項を決定する逆問題では,「低振幅極限」を用いた方法が（講演者の知る限り）唯一の方法であった．したがって，散乱作用素から非線形指数 p を決定する問題は未解決であった．さらに,「低振幅極限」を用いると，小さい散乱データしか扱えないため，任意の大きさの散乱データから非線形項を一意に決定できるかについても謎であった．

本研究は科研費 (課題番号:23740104) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 35Q55, 81U40
キーワード：Nonlinear Schrödinger, Inverse scattering
* 〒950-2121 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地　新潟大学 教育学部
e-mail: mwatanab@ed.niigata-u.ac.jp

この講演では，散乱データの「高振動極限」を用いる手法（[1]）を非線形方程式に応用することで，散乱作用素 S から非線形指数 p と非線形項の係数 $q(x)$ を一意に決定できることを紹介する．この方法では，振幅を固定しているので，任意の大きさの散乱データから p と $q(x)$ を一意に決定できることもわかる．

2. 問題の定式化と結果

散乱の逆問題を，次の枠組みの中で考える．p と $q(x)$ は次の仮定を満たすとする．

$$\boldsymbol{A.1}: n \geq 3, \quad p \in I := \left(1+\frac{4}{n}, 1+\frac{4}{n-2}\right), \qquad \boldsymbol{A.2}: q \geq 0, \quad q \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)(=: \mathcal{Q})$$

このとき，散乱作用素 $S(p, q(x)) : H^1(\mathbb{R}^n) \to H^1(\mathbb{R}^n)$ はwell-definedであり，bounded, homeo., isometric $(=: \mathcal{H})$ となる。（[2]）.

散乱の逆問題は，散乱写像

$$S : I \times \mathcal{Q} \ni (p, q(x)) \mapsto S(p, q(x)) \in \mathcal{H}$$

の性質，とくに(1)Sの単射性，(2)S^{-1}の連続性，(3)Sの反転公式，(4)Sの値域，について調べる問題である．

ここでは，単射性の結果について述べる．p と $q(x)$ の再構成公式については，講演のときに紹介する．

$$\textbf{A.1'}: n \geq 3, \quad p \in I' := \left(1+\frac{4}{n}, 1+\frac{4}{n-2}\right) \cap \left(\left[\frac{n}{2}\right], 1+\frac{4}{n-2}\right)$$

A.2': $q \in \mathcal{Q}$,　$q(x)$ は短距離型 $(=: \mathcal{Q}_{SR})$.

定理 2.1. $p \in I'$，$q \in \mathcal{Q}'$ とする。このとき散乱写像 $S : I' \times \mathcal{Q}_{SR} \to \mathcal{H}$ は単射である．

参考文献

[1] Enss, V. and Weder, R., The geometrical approach to multidimensional inverse scattering. J. Math. Phys. 36 (1995), 3902—3921.

[2] Ginibre, J. and Velo, G., Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrdinger equations. J. Math. Pures Appl. (9) 64 (1985), 363—401.

[3] Strauss, W. A., Nonlinear scattering theory, in "Scattering Theory in Mathematical Physics", edited by Lavita, J. A., and Marchand, J.-P. (Reidel, Dordrecht, 1974), pp. 53–78.

A Blow-up Boundary for a Semilinear Wave Equation with Power Nonlinearity

H. Uesaka(Tokyo, Japan)
E-mail: uesaka@math.cst.nihon-u.ac.jp

Caffarelli and Friedman investigated blow-up boundaries for a Cauchy problem of semilinear wave equations with power nonlinearity and showed remarkable results(see [1]). We consider the same problem for initial data with different conditions from theirs.

We consider the following Cauchy problem for a wave equation:

$$\begin{cases} \Box u = (\partial_t^2 - \Delta)u = F(u), \text{ in } \mathbb{R}^3 \times (0,T), \\ u(x,0) = f(x), \ \partial_t u(x,0) = g(x) \text{ in } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{0.1}$$

where $F(u) = |u|^{p-1}u$ or $F(u) = |u|^p$ with $p > 1$.

The integral equation derived from (0.1):

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-s)ds \int_{|\omega|=1} \{F(u(x+(t-s)\omega, s))\}d\omega, \tag{0.2}$$

where

$$\begin{aligned} u_0(x,t) =& \frac{\partial}{\partial t}\frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} f(x+t\omega)d\omega + \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} g(x+t\omega)d\omega \\ =& \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \{g(x+t\omega) + \omega\cdot\nabla f(x+t\omega) + \frac{f(x+t\omega)}{t}\}d\omega. \end{aligned} \tag{0.3}$$

The sequence $\{u_n\}, n = 0, 1, \cdots$ is given by

$$u_n(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-s)ds \int_{|\omega|=1} \{F(u_{n-1}(x+(t-s)\omega, s))\}d\omega. \tag{0.4}$$

Then $u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t)$.

The blow-up boundary Γ is defined by

$$\Gamma = \partial\{(x,t)/u(x,t) < \infty, \ t > 0\}.$$

We can give several suitable conditions to initial data to show in some domain $K_{R,T} \subset \mathbb{R}^3 \times [0, T)$ that

1. (0.1) has a C^2 positive real-valued local solution u,
2. u is monotone increasing in t for any fixed x and moreover satisfies $\partial_t u_n \geq |\nabla u_n|$,
3. there exists a positive $T(x)$ for any x such that u keeps its regularity in $K_{R,T} \cap \{0 < t < T(x)\}$ and $\lim_{t \nearrow T(x)} u(x, t) = \infty$.

Then the blowup boundary Γ exists and is represented by a function $\phi(x) = T(x)$ satisying that

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|. \tag{0.5}$$

We assume the following assumptions to obtain (0.5).

Assumption I

Let $f \in C^3(\mathbf{R}^3)$ and $g \in C^2(\mathbf{R}^3)$, and let R_0 be a positive constant.

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ for } |x| \geq R_0 \\ g(x) + \omega \cdot \nabla f(x) + \frac{f(x)}{1+|x|} \geq 0 \text{ for } |x| \geq R_0, \end{cases} \tag{0.6}$$

where $\omega = x/|x|$.

Assumption III

Let $f \in C^3(\mathbf{R}^3)$ and $g \in C^2(\mathbf{R}^3)$. Let R_0 be a positive constant. Let e be any unit vector in $\mathbf{R}^3$ and $\omega = \frac{x}{|x|}$. Assume for $|x| \geq R_0$

$$\begin{cases} g(x) + e \cdot \nabla f(x) \geq 0, \\ \triangle f(x) + F(f(x)) + e \cdot \nabla g(x) + \omega \cdot \nabla(g(x) + e \cdot \nabla f(x)) \\ + \frac{g(x)+e\cdot\nabla f(x)}{1+|x|} \geq 0. \end{cases} \tag{0.7}$$

References

[1] L.A.Caffarelli and A.Friedman, The blow-up boundary for nonlinear wave equations, *Trans.AMS.* **297** (1986), 223–241.

[2] H.Uesaka, The blow-up boundary for a system of semilinear wave equations, in Proceedings of the 6th ISAAC, (2009).