

積読方法の検討

－ 本でアーチは作れるか －

2018(平成30).08.24

菅原 政治郎

1. 背景

読書家にとっては、購入した本を短期間で全て読了することは困難で、積読(つんどく)をされた経験は全ての人が持っている事ではないでしょうか。今回は、この積読について、皆さんの頭を少しお借りしようと思います。

J. Walker著の「The Flying Circus of Physics With Answers」(「ハテ・なぜだろうの物理学 I」戸田盛和等訳、1979年12月、培風館)の中に、問題番号2.50があります。これがまさに積読に関連したものです。内容は以下に示すものです。

「2.50 本で斜塔をつくる

本を一方へできるだけ傾けて積み上げるにはどのようにしたらよいだろうか(図2.50)。一番よい積み方は、下の本の中心に次の本のふちを置いていく積み方だろうか。」
と言うものです。

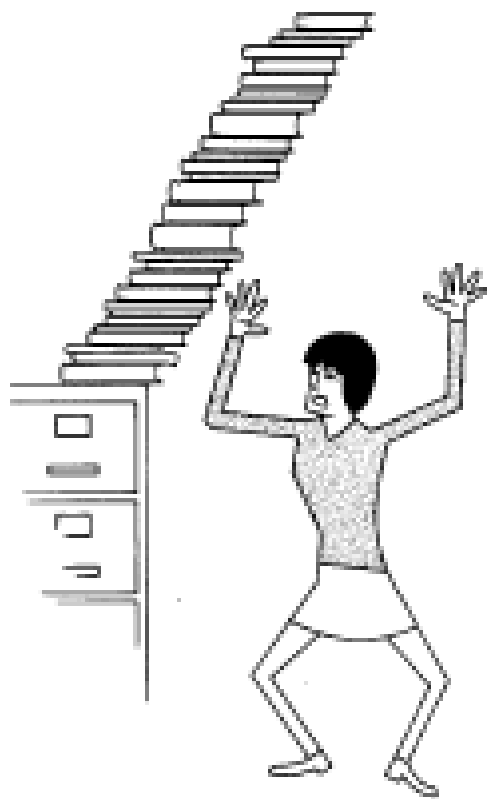


図 2.50

図書館を困らすために
本を傾けて積んでおく

1. 背景（続き）

皆さんはこの問題にどの様に挑戦されるでしょうか。

本資料では、色々の積み方を試行したうえで、最良の方法を考え、その方法でどの位横にずらす事が出来るのかを検討したいと思います。

1.1 仮定

- (1) 本はご存じの様に、紙でできており、剛体では無いので、積み上げていくうちに本がしなって上手く積み上がらない事が有ります。本資料では、厚みの有るアクリルの様な剛体の本を仮定し、しならないものとしします。
- (2) 本の横幅を W とし、横方向にずらして積み上げるものとしします。下から i 番目の本の中心位置を X_i としします。
- (3) 積み上げた本が崩れないとは、 i 番目以上 n 番目までの本の重心位置が、 $(i-1)$ 番目の本以内に有る場合で、任意の i について成り立つ場合としします。
- (4) 積み上げは一方向にするものとし、逆方向への積戻しはないものとしします。

2. 簡単な方法による試行

2.1 簡単なずらし方法

先ず頭に浮かぶのが、前述図2.50の様に、単純に等間隔で横にずらしていく積み方です。ずらし幅を d とします。 i 番目の本の中心位置 X_i は $(i-1) \cdot d$ となります。本の総数を n としますと、 i 番目以降の重心位置 XCG_i 及び、 $i-1$ 番目の本の範囲 XB_{i-1} は以下で与えられます。(但し、 $i \geq 2$)

$$XCG_i = \frac{\sum_{k=i}^n (k-1) d}{(n-i+1)} \quad (2.1)$$

$$(i-2)d - \frac{W}{2} \leq XB_{i-1} \leq (i-2)d + \frac{W}{2} \quad (2.2)$$

式(2.1)で与えられる重心位置が、崩れないためには、仮定の(3)を満足することが必要です。即ち、 XCG_i が XB_{i-1} の範囲内で有ることが必要です。

ここで $i = 2$ の場合について考えますと、 XCG_2 は以下となります。

$$XCG_2 = \frac{d}{(n-1)} \sum_{k=2}^n (k-1) = \frac{d}{(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (k) = \frac{d \cdot n \cdot (n-1)}{2(n-1)} = \frac{d \cdot n}{2} \quad (2.3)$$

2.1 簡単なずらし方法（続き）

本が崩れないためには、 XCG_2 が XB_1 の範囲内で有る必要が有ります。以下です。

$$-\frac{W}{2} \leq \frac{d \cdot n}{2} \leq +\frac{W}{2} \quad (2.4)$$

式(2.4)で与えられる本の冊数は、最大で W/d となります。これ以上に本を積み上げると崩れます。A4版の本を考えます。この場合、 $W = 21\text{cm}$ となります。本を1cmずつずらして積み上げます。 $n = 30$ まで考えました。結果を図2.1-1及び2.1-2に示します。崩れない冊数は21冊で、22冊になると崩れます。

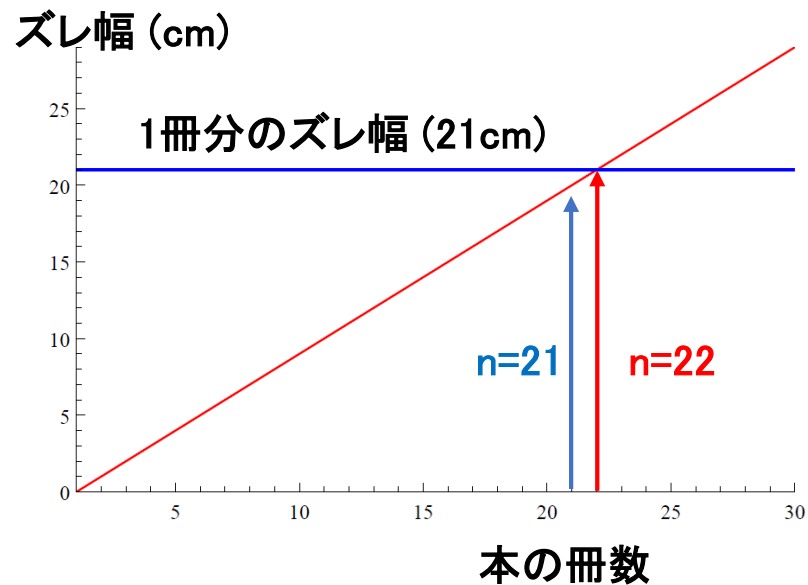


図2.1-1 本の冊数とズレ幅

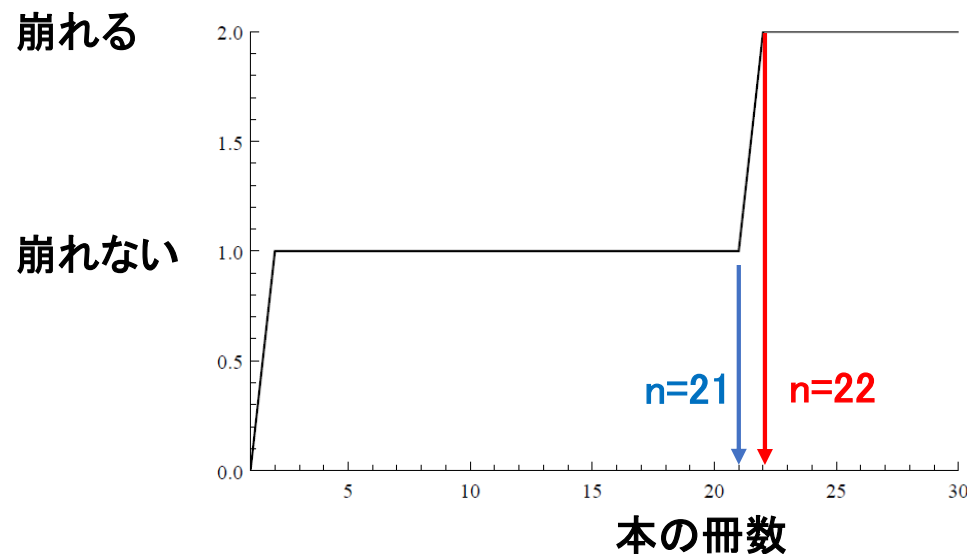


図2.1-2 本の冊数と崩れ判定

2.1 簡単なずらし方法（続き）

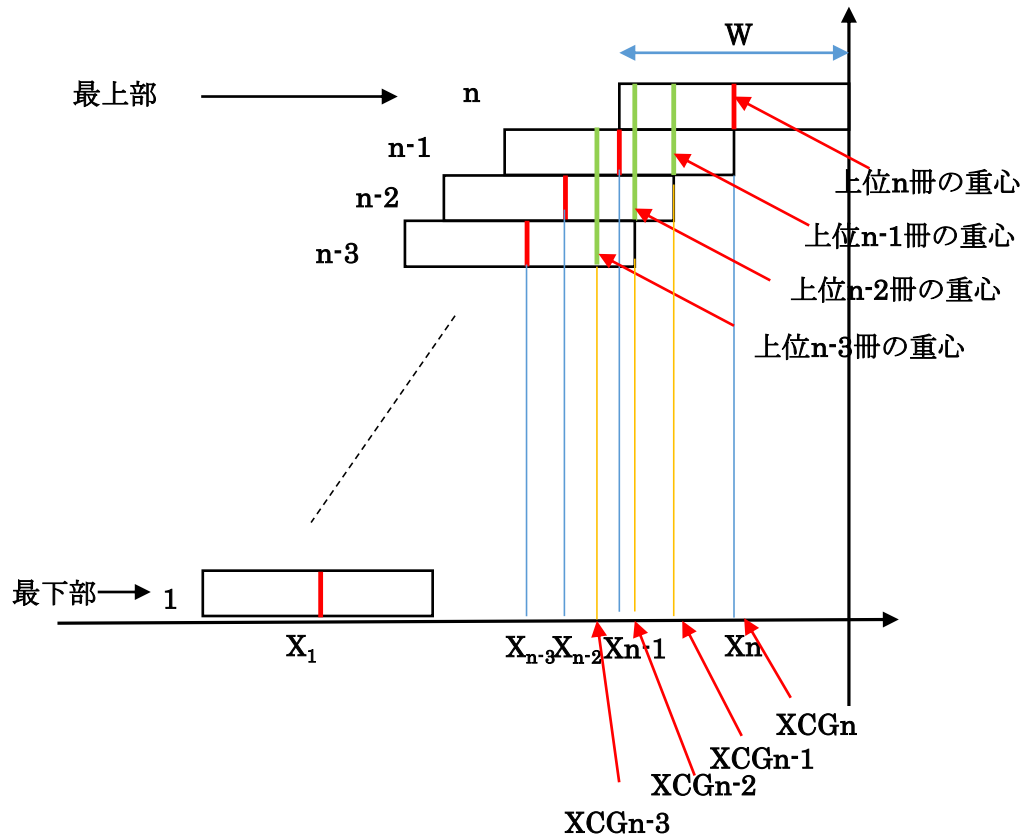
図2.1-2及び式(2.4)より分かる様に、崩れない最大冊数は21となります。この場合の横ずれ幅は図2.1-1より20cmとなります。即ち、簡単な横ずれ法では、1冊分を超える事は出来ません。このため、大胆な斜塔を作ることは出来ません。少なくとも、図2.50の様な積み方は架空のものであり、実際には存在しません。

どうしたら良いのでしょうか。

3. 論理的な方法

大胆な斜塔を作るヒントは、仮定(3)に有りそうです。即ち、 i 番目以降の重心 XCG_i が $i-1$ 番目の範囲以内に設定すれば良い訳で、その時に XCG_i を $i-1$ 番目の本の縁に設定すれば、最大限のズレ幅を獲得出来るそうです。

上記を図示したのが、図3.1です。



ここに、

X_i : i 番目の本の中心位置。但し $X_1 = 0$ とします。

XCG_i : i 番目以降 n 番目までの全体の重心

XB_{i-1} : $i-1$ 番目の本の範囲

W : 本の幅

上記より、以下となることを再掲します。

$$XCG_i = \frac{\sum_{k=i}^n X_k}{(n - i + 1)} \quad (3.1)$$

$$X_{i-1} - \frac{W}{2} \leq XB_{i-1} \leq X_{i-1} + \frac{W}{2} \quad (3.2)$$

図3.1 積み方

3. 論理的な方法（続き）

さて、 $i=1$ から検討するより $i=n$ から検討する方が簡単(イメージが掴み易い)かもしれません。式(3.1) 及び(3.2)から以下となります。

$$\left. \begin{aligned} XCG_n &= X_n \\ X_{n-1} &= XCG_n - \frac{W}{2} = X_n - \frac{W}{2} \\ X_{i-1} &= XCG_i - \frac{W}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} XCG_{n-1} &= (X_n + X_{n-1})/2 \\ XCG_i &= \frac{\sum_{k=i}^n X_k}{(n-i+1)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

式(3.3)より、以下の式が得られます。

$$X_{i-1} = X_i - \frac{W}{2(n-i+1)} \Rightarrow X_i = X_{i-1} + \frac{W}{2(n-i+1)} \quad (3.4)$$

式(3.4)において、 $i=2$ とすると、最初のずらし幅(Δ)が得られます。即ち、以下の式が得られます。

$$\Delta = X_2 - X_1 = \frac{W}{2(n-1)} \quad (3.5)$$

3. 論理的な方法（続き）

式(3.4)に式(3.5)を代入すると、 $i=3$ での X_3 が求められます。

$$X_3 = X_2 + \frac{W}{2(n-2)} = \frac{W}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \right) \quad (3.6)$$

式(3.6)より類推すると、 $i = n$, 即ち最終冊の中心位置 X_n が求められます。

$$X_n = \frac{W}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{1} \right) \quad (3.7)$$

さて、本題に戻って、どこまでアーチを作れるのだろうかを検討しようと思います。本のズレ冊数を η としますと、以下の式を満たす必要冊数 n を求めれば良いことになります。

$$X_n = \frac{W}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{1} \right) \geq \eta W \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{1} \right) \geq 2\eta \quad (3.8)$$

3. 論理的な方法（続き）

近似式の導入

式(3.8)の左辺は、Eulerの定数に似ています。Eulerの定数 γ は以下で与えられます。

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \text{Ln}[n] \right) = 0.5772156649 \dots \dots \dots \quad (3.9)$$

ここに、Ln[]: 自然対数

式(3.9)は無限大の状態で成り立つことを承知の上で、 η 冊ズレのための必要冊数 n の簡易推定のために、以下の様にします。

$$\gamma + \text{Ln}[n - 1] \geq 2\eta \quad \Rightarrow \quad n \geq \text{Exp}[2\eta - \gamma] + 1 \quad (3.10)$$

4. A4版本への応用

前章で検討した手法を用い、A4版本へ応用した結果を表4.1及び図4.1-1～4.6-2に示します。必要冊数 n の推定は簡易ですので、確実にするため確認計算をしています。

表4.1 結果

η	簡易必要数	最低必要数 n	備考
1	5.15⇒6	5	図4.1-1、図4.1-2 計算では6だったが、確認のため $n=5$ 、4も計算しました。
2	31.65⇒32	32	図4.2-1、図4.2-2 計算では32だったが、確認のため $n=31$ も計算しました。
3	227.51⇒228	228	図4.3-1、図4.3-2 計算では228だったが、確認のため $n=227$ も計算しました。
4	1674.69 ⇒1675	1675	図4.4-1、図4.4-2 計算では1675だったが、確認のため $n=1674$ も計算しました。
5	12367.97 ⇒12368	12368	図4.5-1、図4.5-2 計算では12368だったが、確認のため $n=12367$ も計算しました。
6	91381.22 ⇒91382	91381	図4.6-1、図4.6-2 計算では91382だったが、確認のため $n=91381$ 、91380も計算しました。
10	～ 2.8×10^8	～ 2.8×10^8	本の解答では 10^{44} と有りましたが、誤記と思われます。

4.1 $\eta = 1$ 冊分のズレの検討

ズレ幅(cm)

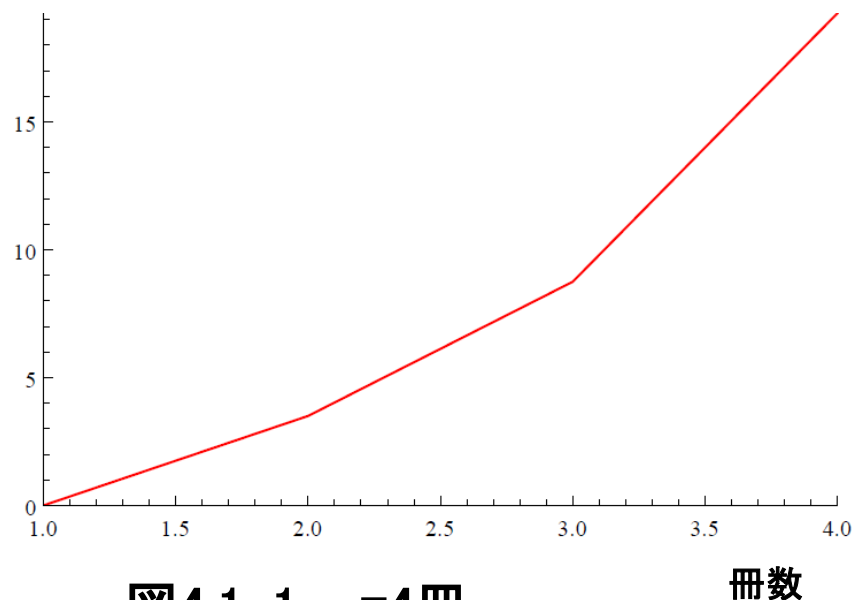


図4.1-1 $n=4$ 冊

ズレ幅(cm)

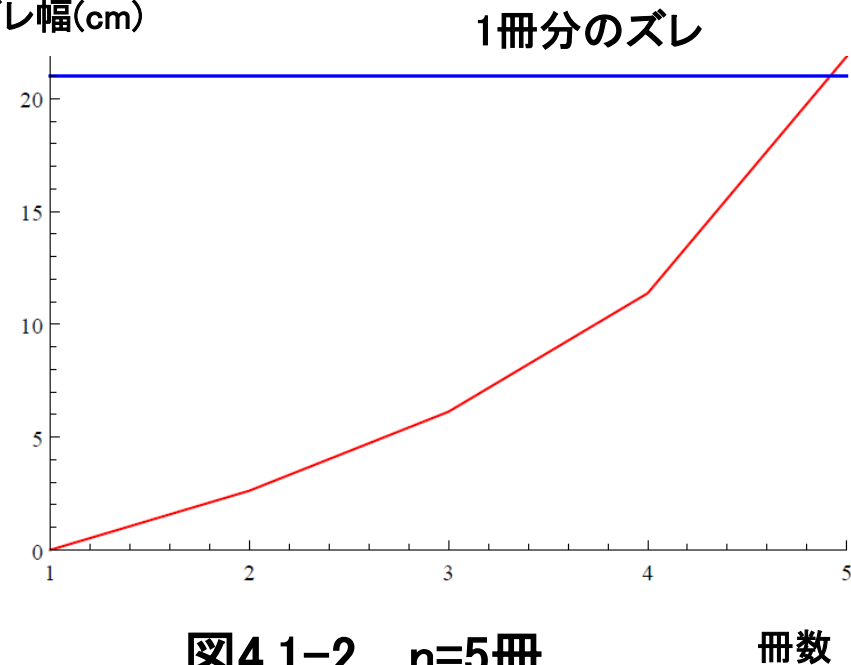


図4.1-2 $n=5$ 冊

冊数

図4.1-1及び4.1-2は、それぞれ $n=4$ 及び 5 の場合の、ズレ幅を示したものです。図より分かります様に、最低5冊あれば、1冊分のズレを作る事が出来ますが、4冊では駄目でした。

簡易計算の推定では、 $n=6$ との事でしたが、式(3.10)の推定式は n が十分大きな場合に成立するもので、 n が小さい場合には、誤差が大きく出たものと思います。

5冊の中心位置は、(0., 2.625, 6.125, 11.375, 21.875 cm) です。皆さん、試してください。

尚、 $n=6$ でも1冊分のズレを作ることは出来ます。この場合、式(3.5)で与えられる最初のズレ幅は、 $n=5$ の場合よりも小さくなります。

4.2 $\eta = 2$ 冊分のズレの検討

ズレ幅(cm)

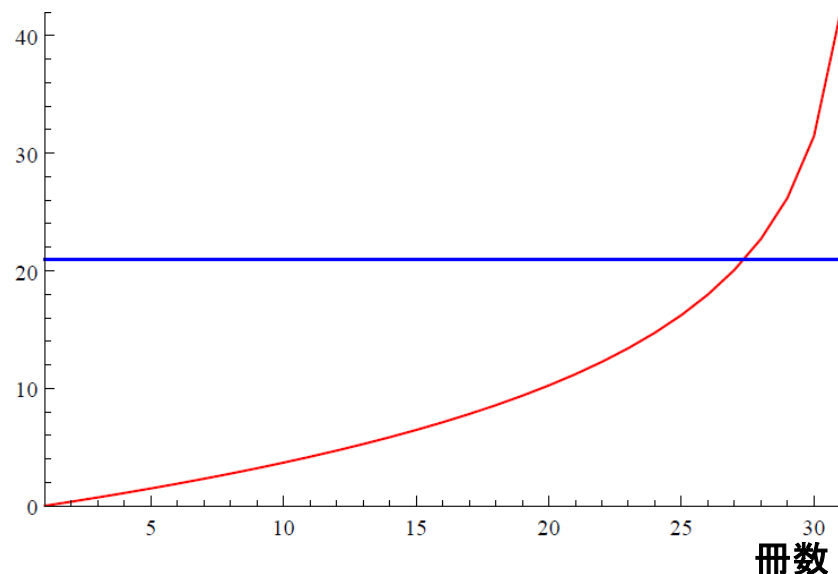


図4.2-1 $n=31$ 冊

ズレ幅(cm)

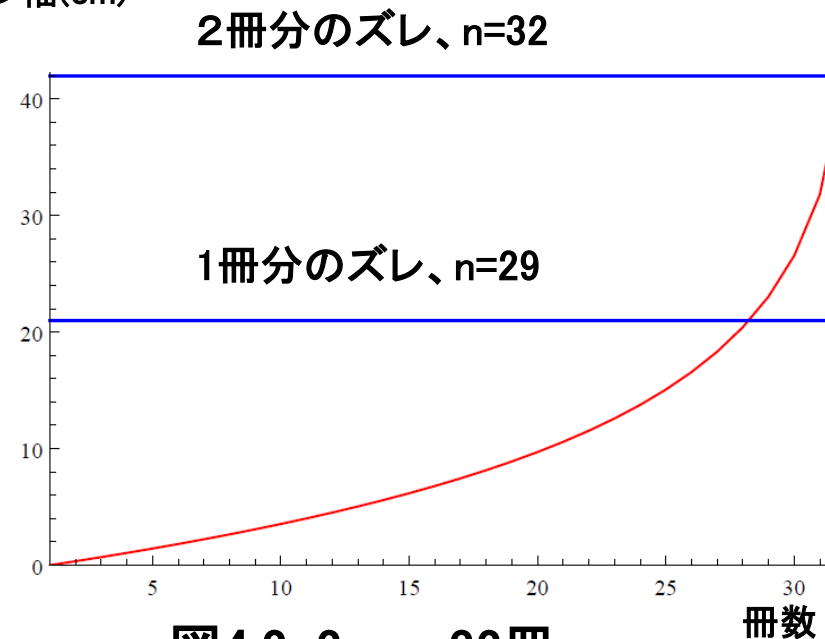


図4.2-2 $n=32$ 冊

図4.2-1及び4.2-2は、それぞれ $n=31$ 及び 32 の場合の、ズレ幅を示したものです。図より分かります様に、最低32冊あれば、2冊分のズレを作る事が出来ますが、31冊では駄目でした。

図4.2-2より分かります様に、1冊のズレ幅を作るのに29冊、2冊のズレを作るのに32冊掛かります。

32冊の中心位置は、(0., 0.33871, 0.68871, 1.05078, 1.42578, 1.81467, 2.21851, 2.6851, 3.07601, 3.53254, 4.00981, 4.50981, 5.03481, 5.58744, 6.17077, 6.78842, 7.44467, 8.14467, 8.89467, 9.70236, 10.5774, 11.5319, 12.5819, 13.7486, 15.0611, 16.5611, 18.3111, 20.4111, 23.0361, 26.5361, 31.7861, 42.2861 cm) です。時間が有りましたら、試してください。

全体の冊数に対する1冊のズレに必要な冊数の比率を仮に土台率と定義すると、 $\eta=2$ の土台率は0.906です。1冊目のズレを作るための基礎部分に多くの本が費やされている事が分かります。

4.3 $\eta = 3$ 冊分のズレの検討

ズレ幅(cm)

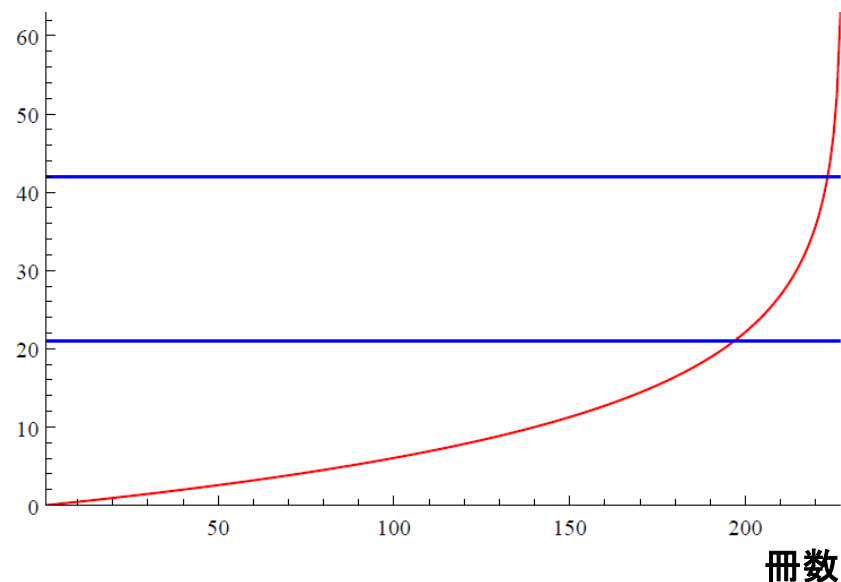


図4.3-1 $n=227$ 冊

ズレ幅(cm)

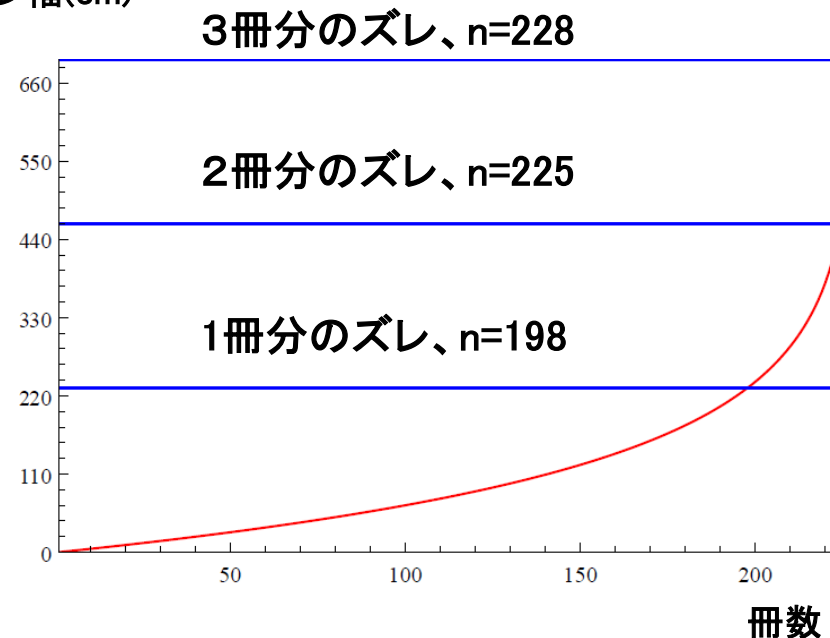


図4.3-2 $n=228$ 冊

図4.3-1及び4.3-2は、それぞれ $n=227$ 及び 228 の場合の、ズレ幅を示したものです。図より分かります様に、最低228冊あれば、3冊分のズレを作る事が出来ますが、227冊では駄目でした。 $\eta=3$ の場合の土台率は0.868です。 $\eta=2$ の場合と同様、高い値となっています。

仮に本の厚さが1cmとした場合、実に2.28mの高さになります。左右対称に積み上げれば、肩幅60cmで身長が170cmの大人の人、本に接触せずにこのアーチを通り抜ける事が出来そうです。

4.4 $\eta = 4$ 冊分のズレの検討

ズレ幅(cm)

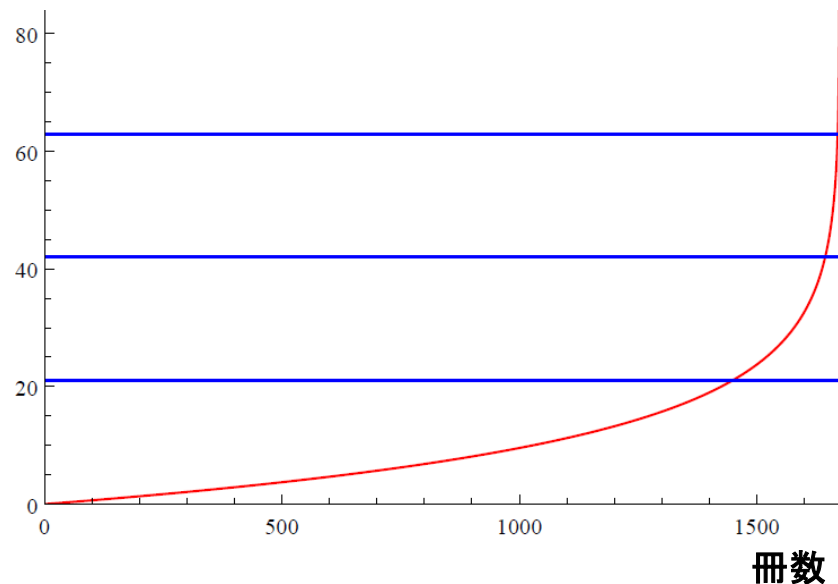


図4.4-1 $n=1,674$ 冊

ズレ幅(cm)

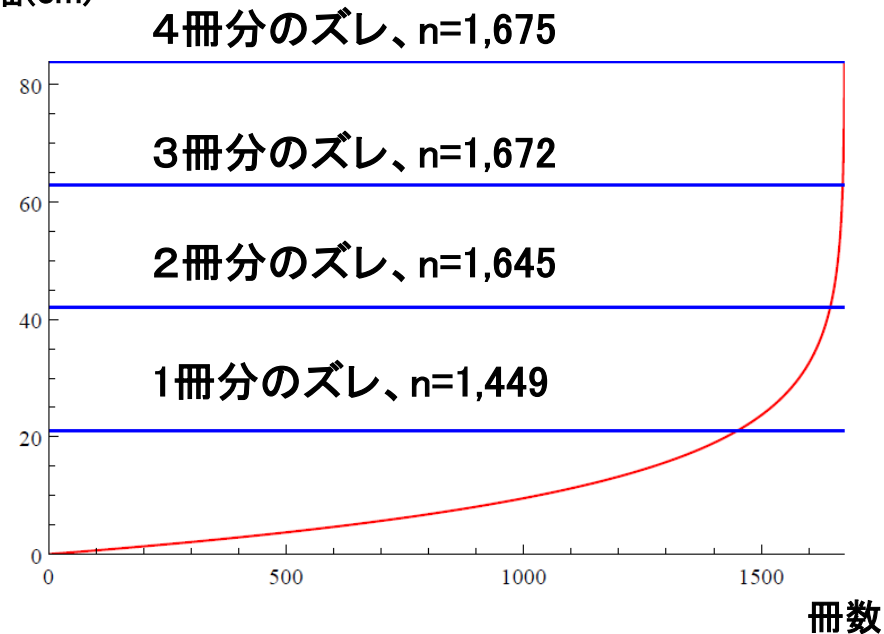


図4.4-2 $n=1,675$ 冊

図4.4-1及び4.4-2は、それぞれ $n=1,674$ 及び $1,675$ の場合の、ズレ幅を示したものです。図より分かります様に、最低 $1,675$ 冊あれば、4冊分のズレを作ることができますが、 $1,674$ 冊では駄目でした。

$\eta=4$ の場合の土台率は 0.865 です。

仮に本の厚さが 1cm とした場合、実に 16m 以上の高さになります。左右対称に積み上げれば、誰でも自由に本に接触せずにこのアーチを通り抜ける事が出来そうです。

4.5 $\eta = 5$ 冊分のズレの検討

ズレ幅(cm)

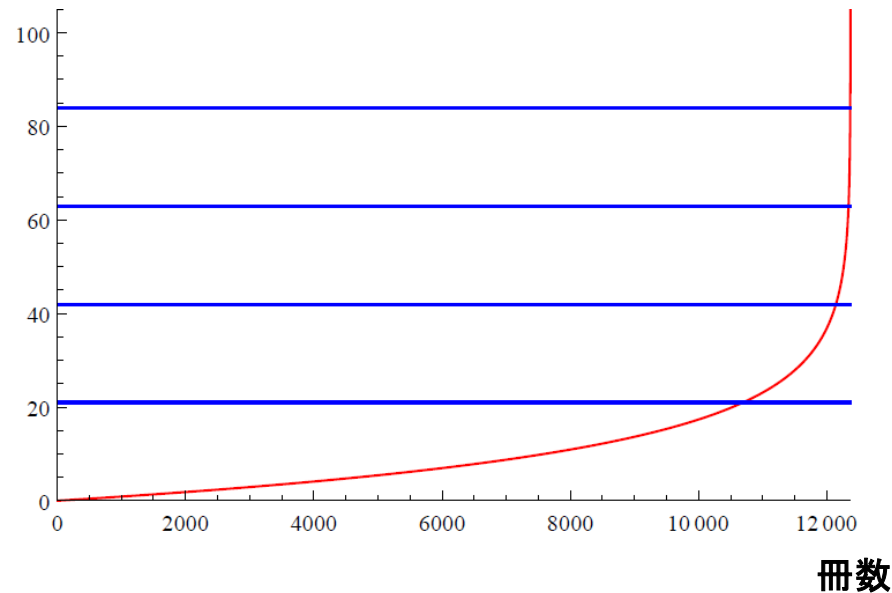


図4.5-1 $n=12,367$ 冊

ズレ幅(cm)

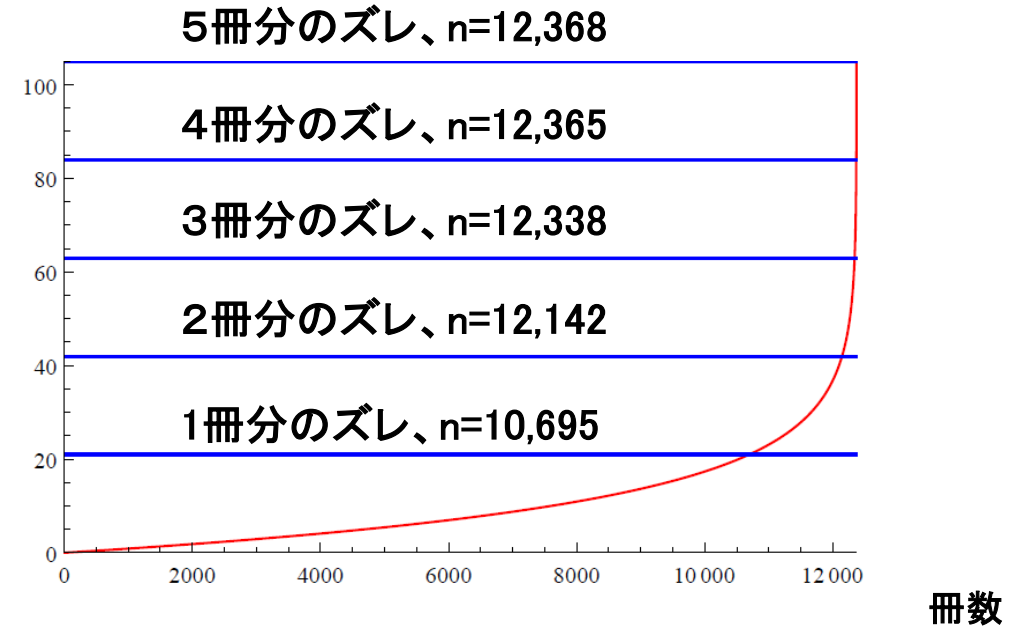


図4.5-2 $n=12,368$ 冊

図4.5-1及び4.5-2は、それぞれ $n=12367$ 及び 12368 の場合の、ズレ幅を示したものです。図より分かります様に、最低 $12,368$ 冊あれば、5冊分のズレを作る事が出来ますが、 $12,367$ 冊では駄目でした。

$\eta=5$ の場合の土台率は 0.865 です。

仮に本の厚さが 1cm とした場合、実に 123m 以上の高さになります。5冊分のズレを作るためだけの目的で 123m ものアーチを作るのは馬鹿げた話です。

4.6 $\eta = 6$ 冊分のズレの検討

ズレ幅(cm)

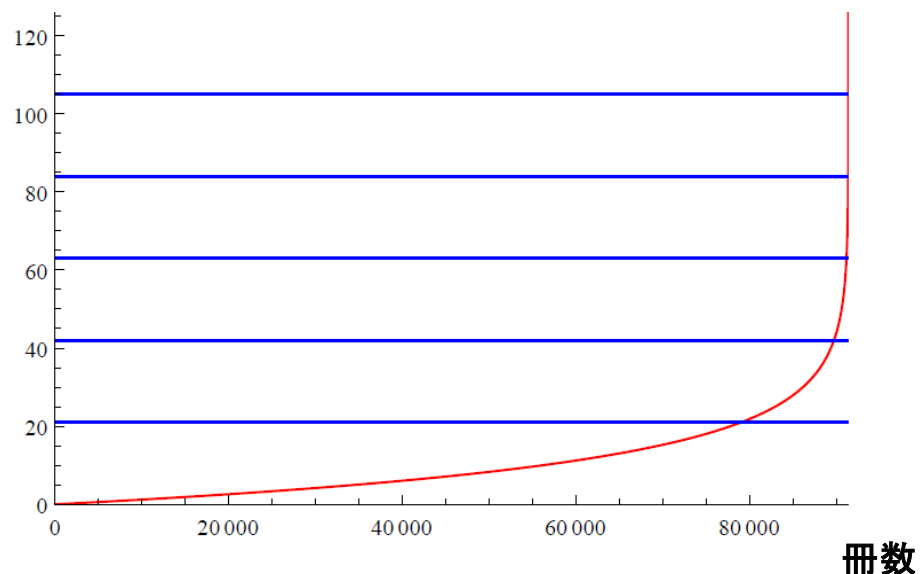


図4.6-1 $n=91,380$ 冊

ズレ幅(cm)

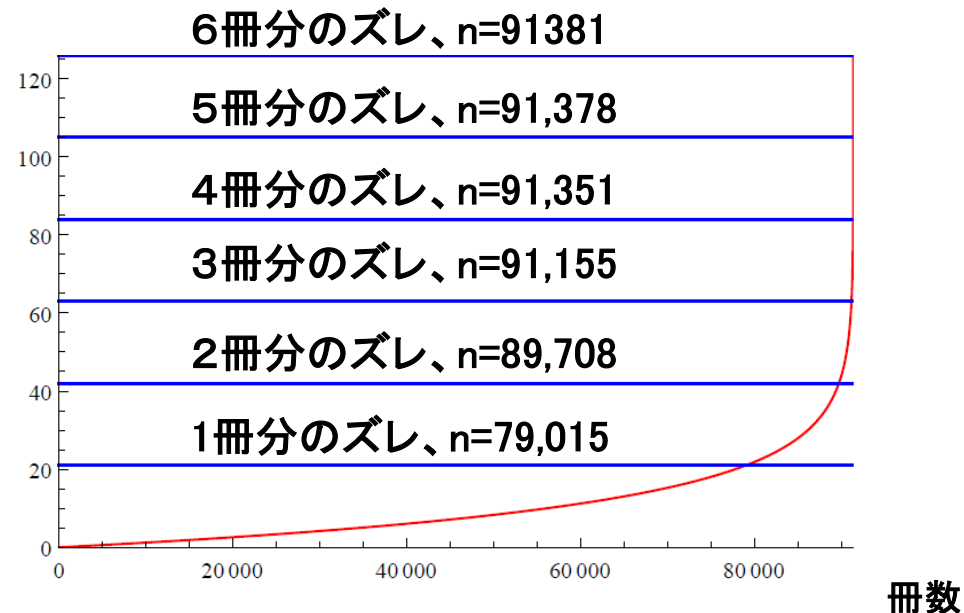


図4.6-2 $n=91,381$ 冊

図4.6-1及び4.6-2は、それぞれ $n=91,380$ 及び $91,381$ の場合の、ズレ幅を示したものです。図より分かります様に、最低 $91,381$ 冊あれば、 6 冊分のズレを作る事が出来ますが、 $91,380$ 冊では駄目でした。

$\eta = 6$ の場合の土台率は 0.865 です。

4.7 横ズレ冊数 η に関するまとめ

表4.2 横ズレ冊数 η に関するまとめ

η	必要冊数n	土台率	$\eta=1\sim$ 2間冊数	$\eta=2\sim$ 3間冊数	$\eta=3\sim$ 4間冊数	$\eta=4\sim$ 5間冊数	$\eta=5\sim$ 6間冊数
1	5						
2	32	0.906	3				
3	228	0.868	27	3			
4	1675	0.865	196	27	3		
5	12368	0.865	447	196	27	3	
6	91381	0.865	10,693	447	196	27	3

土台率: 全体の冊数に対する第1冊目のズレに必要な冊数の比率と定義

表4.2より分かる様に、 η がどのような値で有ろうとも、崩れないでアーチ状のズレを作るには、冊数が決まっている事が分かります。

5 考察

前章の結果より、以下の知見を得ました。

- (1)崩れないでアーチ状の本を積み上げる方法を習得しました。その方法は、 i 番目以降の重心 XCG_i が $i-1$ 番目の本の縁に設定すれば良いと言う事です。
- (2)単純な横ズレ方法で崩れずに積む方法では、1冊分を超える横ズレは得られません。
- (3)全体の冊数に対する第1冊目のズレに必要な冊数の比率を土台率と定義すると、その値は0.865に収束する様に見えます。この事は1冊目のズレを作るための基礎部分に多くの本が費やされている事を示しています。
- (4)仮に本をA4版とし、その厚さが1cmとした場合、 $\eta=4$ のズレを作ると、実に16m以上の高さになります。左右対称に積み上げれば、誰でも自由に本に接触せずにこのアーチを通り抜ける事が出来そうです。
- (5)しかし、それ以上のズレを作ろうとした場合、高さが100mを越えていくことになります。心ある読者諸氏は決して実行しないでください。