コマの挙動についての私的検討

2018 (平成30)年5月26日

菅原　政治郎

1.　背景

年配の男の人にとっては、子供の頃にコマを廻した経験をお持ちだろうと思います。関東ではベイゴマが主流だろうと思いますが、小生が育った仙台では、轆轤(ロクロ)で引いた木のコマが主流でした。穴に芯棒を通してコマとしますが、芯棒が少し細いとコマが接地した時に本体が低下して上手く廻りません。そんな時は水に漬けて木を膨らませ、芯棒と本体を一体化させます。

当時(1958年頃)、３寸(9cm)のコマが30円、４寸(12cm)のコマが50円したと記憶しています。一日のこづかいが約5円でしたので、大変な買物でした。コマを廻すには、紐を作らなければなりませんが、端切れを母から貰い、先端は細く、終端に行くほど端切れを足して太くし、適切な長さに撚っていきます。最後に紐が解けないように縛り、房を付けます。

コマ遊びは、専ら喧嘩ゴマでした。友達４～５人で最初に誰がコマを出すかをジャンケンで決め、負けた順に出していきますが、２番目以降の投げ手からは、相手のコマに自分のコマをぶつけて倒します。それを続けて最後まで廻り続けたコマが勝利となります。コマは時間が経つと地面との摩擦により回転が遅くなり倒れてしまいますが、弱くなった時点で、紐の房の部分で芯棒の部分を叩き、回転を持続させます。その頃合と叩き方も子供達のノーハウでした。

そんな事で、コマは芯棒を支点として廻るのが当たり前で、逆立ちするとは思っても見ませんでした。ところが何時の頃か、突然、逆立ちゴマがテレビの画面をにぎわせたことがあり、それに連れて「逆立ちゴマ」が販売され、子供の為にプラスチックの「逆立ちゴマ」を購入しました。

物理好きの友人、物部理(もののべおさむ)氏に、「逆立ちゴマ」の事を話したところ、「新　物理の散歩道」(筑摩書房 2009年)に詳しく記述が有るとのことで、読んで見ると同時にインターネットで関連事項を調べたところ、2、3の資料が見つかりました。そこには理論的展開が有りましたので、小生も本格的に検討したいと思いました。

そこで、本資料では、物部理氏の協力を得て、コマがどの様な挙動をするのかを、運動方程式を作成し、コマの重心位置、回転速度、回転軸方向等を運動方程式に代入し、挙動を解明しようとしました。

尚、本作業の過程で、東洋大学の吉野隆教授及び南山大学の杉浦洋教授に、Mathematicaの解析ソルバーであるNDSolveの使用法について、有益なご指導を頂きました。ここに謝意を表します。

２ コマの運動方程式

戸田盛和 (とだもりかず)氏は、その著「コマの科学」(岩波新書、1980年7月21日)のまえがきで、『コマの運動は、文学や美術や社会の問題ではなくて、力学の問題であるから、どうしても力と運動とについて考えてみなければ、コマの運動を理解することはできない。しかし、この本では全く常識的なことと思われることだけをもとにして、常識からあまり遠くへ行かないで、つまり、できるだけ常識の範囲内で、コマの運動がわかるように努めよう。コマの運動という、力学的にもむずかしい問題を、力学の知識に頼らないで理解しようとするのである。』と記述しています。

小生は、コマの運動については素人同然ですので、コマの運動についての戸田氏や関連の資料、及び物理好きの友人、物部理(もののべおさむ)氏のアドバイスの基に、本資料を展開しようと思います。

2.1 コマの構造

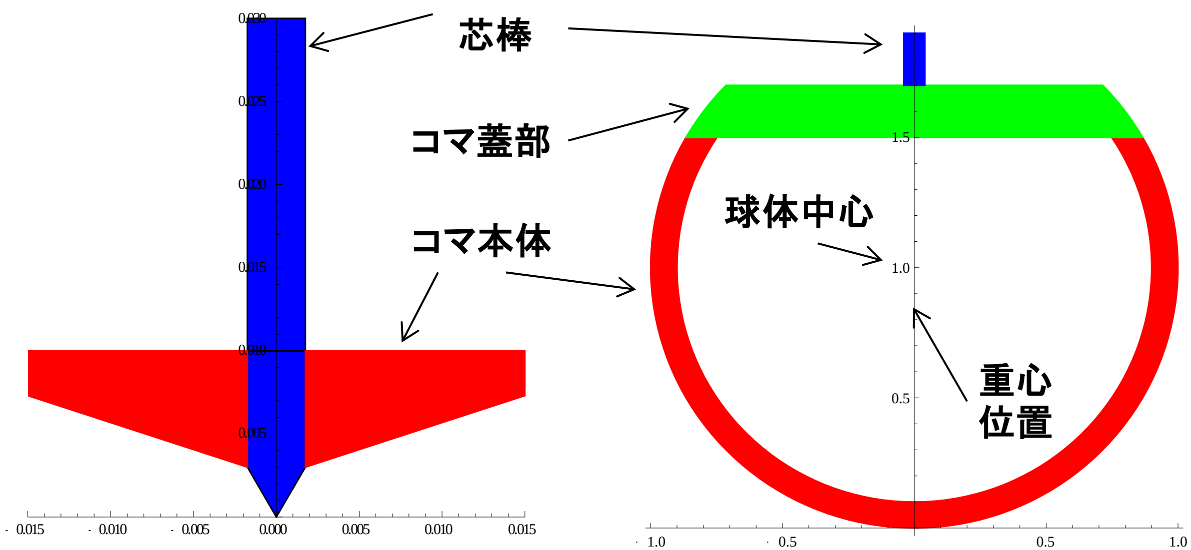


図 2.1-1 普通コマの構造

図 2.1-2 逆立ちコマの構造

一般に見掛ける普通ゴマの断面図を図2.1-1に、逆立ちゴマの断面図を図2.1-2に示します。

普通ゴマでは、長時間廻り続けるように、コマ本体の位置を低くするように設計されます。

一方、逆立ちゴマは、逆立ちし易い様に球体中心よりも重心位置を低くするように設計され、回転と共に重心位置が高く移動して逆立ちする様になっています。

2.2　コマの動き

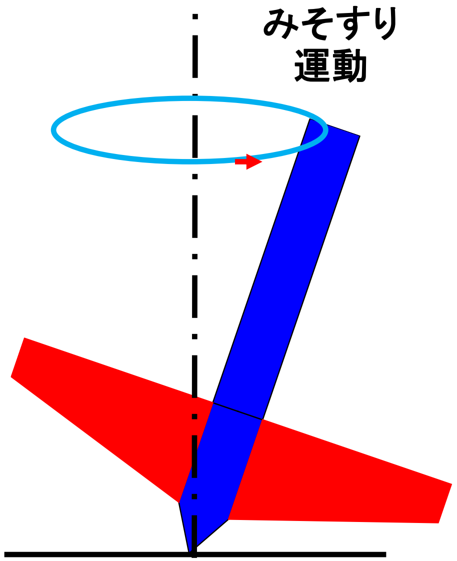


図2.2-1　みそすり運動

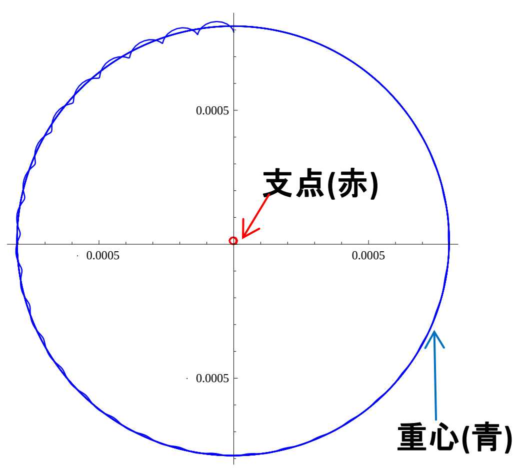


図2.2-2　支点と重心の軌跡

2.2-1　コマは何故倒れないのでしょう　みそすり運動

前著「コマの科学」で、戸田氏は先ず始めに、第一章で「コマはなぜ倒れないか」を取り上げて検討しています。

確かに、倒れそうで倒れないコマの挙動は不思議です。氏は、コマの挙動として、みそすり運動を挙げ、このみそすり運動が倒れることを防止しているとのことです。

みそすり運動とは、図2.2-1に示す様に、コマの軸の上端がゆっくりと円を画くような運動をすること、あるいは重心が余り動かずに、支点が円を描くような運動をすることです。
図2.2-2は、芯棒の支点を細くした(10^{-6} m)場合の支点と重心の軌跡です。支点が細いために支点は殆ど動かず、重心が動いてみそすり運動をしています。

氏は更に言を進め、『コマが傾いたままで立っているためには、コマが回転していることが必要だが、コマが高速で回っていても自由にみそすり運動をさせなければ、コマはすぐに倒れてしまうのである。みそすり運動ができないように軸にゲタのような枠をはかせたりすると、コマは倒れてしまう』と言っています。

矢張り、「みそすり運動」がコマの運動にとって一番重要な動きであることと思います。

2.2-2 運動は重心を押し上げる

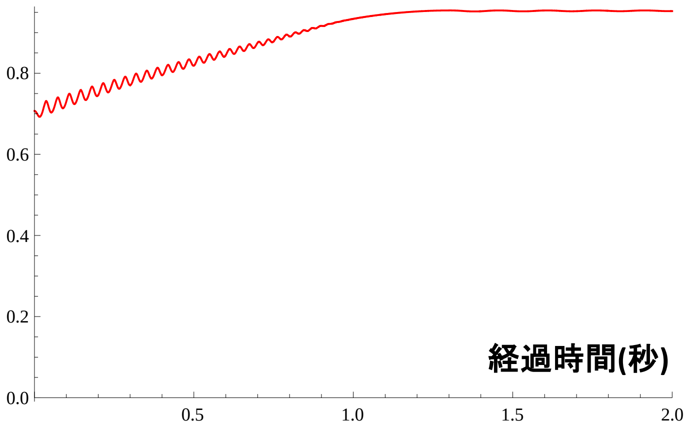


図2.2-3 芯棒の方向ベクトルのZ成分(Kz)

「運動は重心を押し上げる」とは、一体どういうことでしょうか。

一般に相撲でもだるま人形でも重心が低い方が安定しています。このため、重心を押し上げれば不安定になりますが、逆に、コマは回転しているために、より安定な状態になろうとして軸(芯棒)が立って来ます。
軸が立つと言う事は、重心の位置が高くなることを意味します。

図2.2-3は、初期に軸を45度傾けてコマを回した時の軸の方向ベクトルのZ成分Kzを示したものです。値が0の時は、コマが水平状態、1が直立状態を意味します。45度傾けてコマを廻したので、初期値は0.707から始まり、1秒近辺で0.957になり、それ以降同じ傾き(約17度)で推移していることが分ります。

2.2-3 コマを立ち上がらせる摩擦

『摩擦は案外複雑な現象で厳密な扱いは大変むずかしかし、コマを立ち上がらせる力は、コマの軸と床とが触れ合うところに作用する摩擦力であって、この現象を性質的に理解するのはそうむずかしいことではない。』と戸田氏は説明しています。

氏は更に説明を続けています。
『図34に示したように、軸の下端がまるいコマを考え、図に示した向きに回転しているとしよう。図は分り易くするために、床と接触するコマの軸の下端を誇張して画いてある。コマの軸が床と接するところはP点であり、ここには摩擦力 f が作用する。摩擦力 f は床の面内にあり、したがって水平である。P点では、コマの重さを支える抗力も作用する。重さの力と抗力はコマをねじろうとするトルクを生じ、それは図Mにおいて、前方へ向かう矢印で表わされることになるが、繁雑になるので、図ではこれを省略している。』

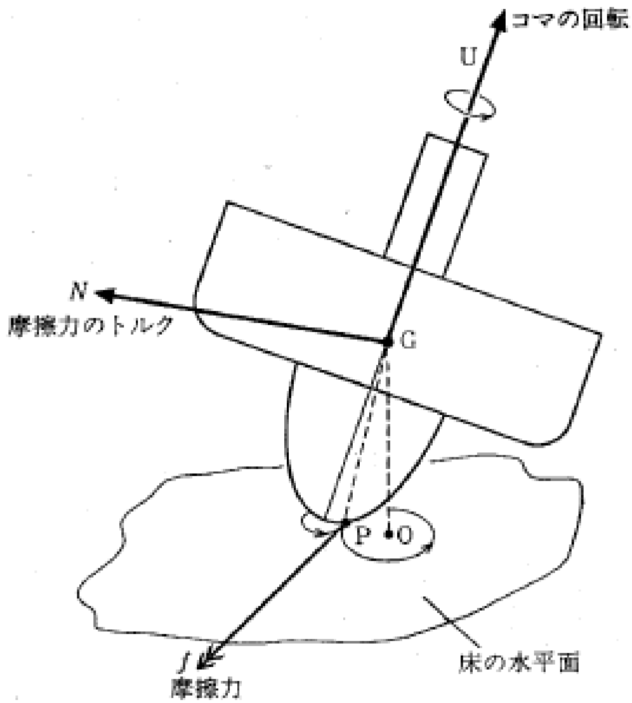


図 34　コマを立てる摩擦

「コマの科学」の93ページより引用

『コマは軸のまわりに高速で回転しているので、みそすりの規則により重心Gを通る鉛直線(図でGO)のまわりにみそすり運動をすることになる。このみそすり運動がだいたい安定で継続されるので、コマは倒れずに立っている。P点でコマが床を押しているのは、倒れないで立っているためであるということもできる。』と説明しています。

最終的に、
『コマが立ち上がる様子を注意して見ると、実際コマの重心はほとんど動かずに、図34 のようなみそすり運動をしながら立ち上がるのが認められるだろう。コマの自転は、Oのまわりの公転よりもずっと速いので、おそらく、床との接触点ではすべりが起こっているであろうが、単に軸がころがっているとしても、とにかく摩擦力 f は、自転によって軸の表面が接触点において走っている向きとは逆方向に作用するだろう。このため、摩擦力 f は図で紙面からこちら向きに作用すると考えられる。このコマは重心のまわりに動き得るので、状況は自由コマ(改良地球ゴマ、あるいはジャイロスコープ)によく似ている。このことに注意すれば、力 f (摩擦力)による重心のまわりのトルクNは、みそすり運動の規則によって、コマの回転を表わす矢印をトルクNの方へ移動させることになり、この移動は軸を立てる向きであることがわかる。』と結んでいます。

2.3 幾何学的配置モデル

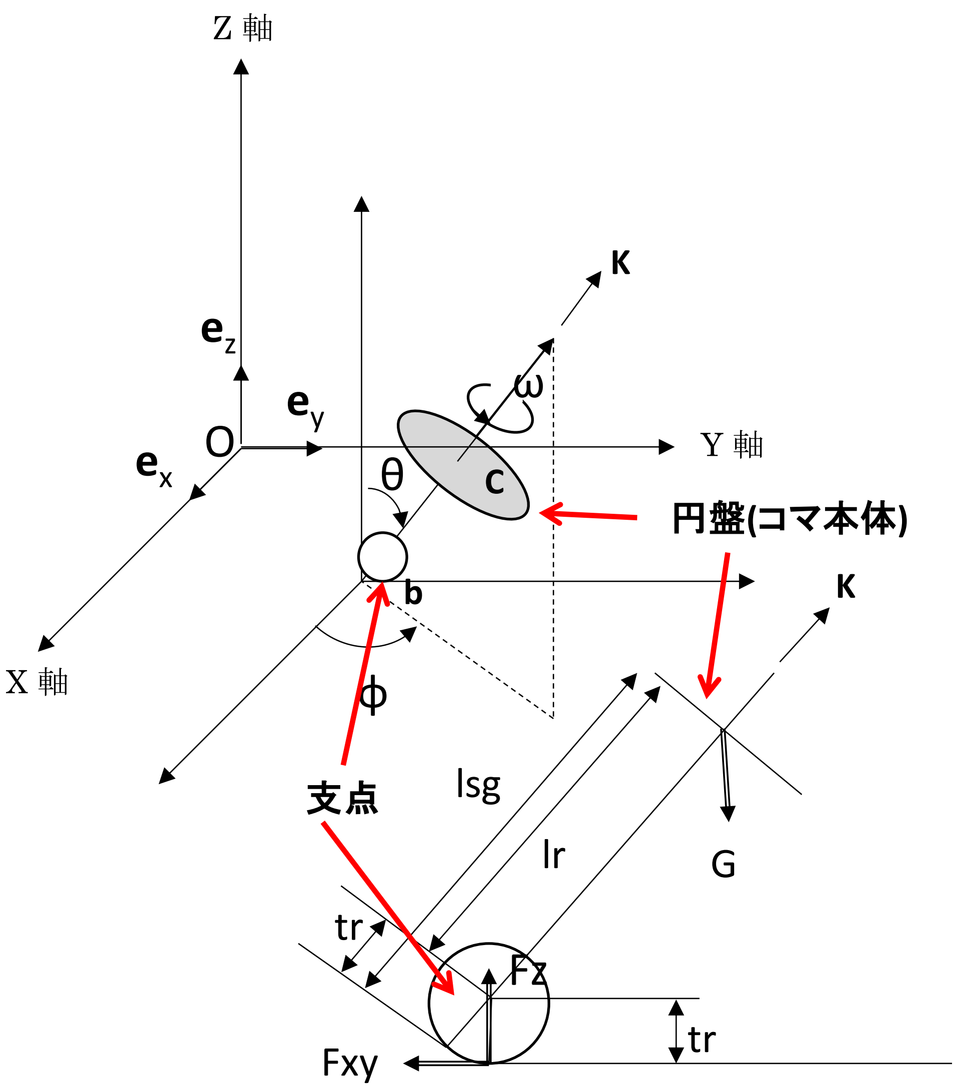


図 2.3-1 コマの幾何学的配置

前節ではコマの挙動について、戸田氏の説明を基にコマの概要を把握しました。本節以降では、実際にコマの挙動を数値化するためのモデルについて説明致します。

①解析体系及びコマのモデルを図2.3-1に示します。

②モデルを簡単化するため、コマの円盤を c とし、コマの接地部分をb とします。b部は本解析では「支点」と呼びます。いわゆるコマの先端部で、半径 tr の半球とします。

③コマの先端から重心位置までの距離を lsgとし、重心にコマの質量m_{top}が掛かるものとします。

④コマの芯棒に対応する単位軸ベクトルをKとします。 $K= (kx^2 + ky^2 + kz^2)^{1/2}$

⑤コマのシミュレーション初期値として、極角 θ 、方位角 ϕ 、角速度 ω、摩擦係数 μ とします。

⑥基本ベクトルをそれぞれ、ex、ey、ez とします。即ち、ex=(1,0,0), ey=(0, 1,0), ez= (0, 0, 1)

⑦コマの質量による垂直抗力 を Fz 、摩擦力を Fxy とします。

2.4　コマの運動に関する方程式

コマの運動を表現するに必要な方程式は、全ての点が同一の速度で移動する並進運動、コマが回転する角運動量、支点がすべることによりコマの安定性を確保するすべり速度、及び摩擦エネルギー算出に必要な支点に働く力の4方程式です。

2.4.1　並進運動方程式

スーパー大辞林によれば「並進運動」とは、「物体が行う運動のうち、それを構成する全ての点が同一の速度で移動する運動」と有りました。コマ重心の位置ベクトルをCとすると、コマに作用する力は、重力ベクトルGと支点に働く抗力FベクトルFを用いると、式(2.1)で与えられます。

$$m_{top}\frac{d^2\mathbf{c}}{dt^2} = m_{top}\frac{d\mathbf{V}_{gc}}{dt} = \mathbf{G} + \mathbf{F} \qquad \text{...(2.1)}$$

ここに、　m_{top} : コマの質量
C　: 重心の位置ベクトル
F　: 支点に働く力　(= Fz + Fxy)
Fxy : 摩擦力
V_{gc} : 重心の速度ベクトル
G　: 重力ベクトル
Fz　: 垂直抗力
t　:　時間

2.4.2　角運動量方程式

コマが角速度ωで回転することにより、角運動量Lが発生します。角運動量はコマの支点から重心を貫く方向に直角に力が働くことにより変化します。これを定式化したものが式(2.2)です。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F} \qquad \text{...(2.2)}$$

ここに、　L　: 角運動量ベクトル
×: 外積記号
b　: 支点の位置ベクトル

2.4.3　すべり速度(Vp)方程式

コマが回転移動する場合、床と支点が接触します。その場合は、支点と床の間にすべり摩擦が生じます。すべり速度Vpは、式(2.3)で与えられます。

$$\mathbf{v_p} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{dt}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{p} - \mathbf{c})$$ …(2.3)

ここに、 Vp : 質点 P のすべり速度ベクトル　　P : 質点 P の位置ベクトル
ω : 角速度ベクトル

Vpは、時刻 t において接地点bにいた質点Pが他の場所へ移動する速度です。上式において、質点 P の位置ベクトルを支点bの位置ベクトルと置き換え、又、後述式(2.8)及び式(2.9)を用いると式(2.3)は以下となります。

$$\mathbf{v_p} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{dt}} - \mathrm{tr.}\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z)$$ …(2.4)

2.4.4　支点に働く力(F)の関係式

式(2.1) 及び(2.2)における摩擦力ベクトルFxyは、摩擦係数 μ を用いると、以下で与えられます。

$$\mathbf{F_{xy}} = -\mu|\mathbf{F_z}|\frac{\mathbf{v}_p}{|\mathbf{v}_p|}$$ …(2.5)

以上より、支点に働く力 F は、以下で与えられます。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_z} + \ \mathbf{F_{xy}} = \mathbf{F}_z - \mu|\mathbf{F_z}|\frac{\mathbf{v}_p}{|\mathbf{v}_p|}$$ …(2.6)

2.4.5　変数を減らすための関係式の検討

微分方程式を解法するためには、変数を減するのが肝要です。ここでは、重心ベクトル C を支点ベクトル b で置き換えてみます。

図2.3-1より、Cベクトル (cx,cy,cz)は以下で与えられます。但し、lr は重心と先端部の丸みの中心間距離です。

$$C_x = b_x + lr.K_x ,\quad C_y = b_y + lr.K_y ,\quad C_z = b_z + lr.K_z + tr \qquad \text{…(2.7)}$$

ここでコマは常時接地していますので、$b_z = 0$とします。

$$\mathbf{b} - \mathbf{C} = - lr.\mathbf{K} - tr.\mathbf{e}_z \qquad \text{…(2.8)}$$

又、K ベクトルの時間微分は、以下で与えられます。

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} \qquad \text{…(2.9)}$$

以上の展開から、運動方程式を書き換えてみますと、以下となります。

$$\mathrm{m_{top}}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{c}}{\mathrm{dt}^2} = \mathrm{m_{top}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}(\mathbf{b} + \mathrm{tr}.\,\mathbf{e}_\mathrm{z} + \mathrm{lr}.\,\mathbf{K}) = \mathbf{G} + \mathbf{F}$$

…(2.10)

$$\mathrm{m_{top}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\mathbf{b}\right) + \mathrm{m_{top}}\,\mathrm{lr}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{K}) = \mathbf{G} + \mathbf{F}_{\boldsymbol{z}} - \mu|\mathbf{F_z}|\frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{p}}}{|\mathbf{v}_{\boldsymbol{p}}|}$$

ここで、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{K})$ は以下となります。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{K}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\mathrm{K} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{K}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\mathrm{K} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{K})$$

…(2.11)

$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\mathbf{K} - |\boldsymbol{\omega}|^2.\mathbf{K} + \boldsymbol{\omega}.(\boldsymbol{\omega}.\mathbf{K})$$

以上より、二階の微分方程式を一階の微分方程式にすると式(2.10)は以下となります

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{b} = \mathbf{v}$$

…(2.12)

$$\mathrm{m_{top}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{v} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_{\boldsymbol{z}} - \mu|\mathbf{F_z}|\frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{p}}}{|\mathbf{v}_{\boldsymbol{p}}|} - \mathrm{m_{top}}\mathrm{lr}.\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\mathbf{K} - |\boldsymbol{\omega}|^2.\mathbf{K} + \boldsymbol{\omega}.(\boldsymbol{\omega}.\mathbf{K})\right\}$$

又、角運動量 L についての関係は以下となります。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}$$
$$= -(\mathrm{lr}.\mathbf{K} + \mathrm{tr}.\mathbf{e}_z) \times (\mathbf{F_z} - \mu|\mathbf{F_z}|\frac{\mathbf{v}_p}{|\mathbf{v}_p|}) \quad \text{...(2.13)}$$

ここまでで、式(2.12)におけるdω/dtが未定義ですので、設定する必要が有ります。

角速度ω、慣性テンソル I (K)、角運動量 L (いずれもベクトル) 間の関係は以下の様になっています。

$$\mathbf{L} = \mathrm{I}(\mathbf{K})\boldsymbol{\omega} \quad \text{...(2.14)}$$

式 (2.14)の時間微分を求め、式(2.13)の関係を代入すると以下となります。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = (\frac{d}{dt}\mathrm{I}(\mathbf{K})).\boldsymbol{\omega} + \mathrm{I}(\mathbf{K})(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega})$$
$$= -(\mathrm{lr}.\mathbf{K} + \mathrm{tr}.\mathbf{e}_z) \times (\mathbf{F_z} - \mu|\mathbf{F_z}|\frac{\mathbf{v}_p}{|\mathbf{v}_p|}) \quad \text{...(2.15)}$$

式(2.15)よりdω/dtを求めると以下となります。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} = (\mathrm{I}(\mathbf{K}))^{-1}.\left\{-\frac{d}{dt}(\mathrm{I}(\mathbf{K})).\boldsymbol{\omega} - (\mathrm{lr}.\mathbf{K} + \mathrm{tr}.\mathbf{e}_z) \times (\mathbf{F_z} - \mu|\mathbf{F_z}|\frac{\mathbf{v}_p}{|\mathbf{v}_p|})\right\} \quad \text{...(2.16)}$$

尚、慣性テンソル I(K) と極角Θ 、方位角 φ 及び主軸慣性テンソル I の間には、式(2.17)の
関係が成り立ちますので、慣性テンソル I(K)はベクトルK の関数となります)

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{K}) = {}^{t}[R_1(\theta)R_2(\varphi)]\mathbf{I}R_1(\theta)R_2(\varphi) \quad \text{…(2.17)}$$

ここに、t　: 転置行列

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad R_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{ima} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{imb} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{imc} \end{pmatrix} \quad \theta = \cos^{-1}(k_z) \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{k_y}{k_x}\right)$$

ima : X 軸廻りの慣性モーメント、imb : Y 軸廻りの慣性モーメント (= ima)
imc : Z 軸廻りの慣性モーメント

(注 : Θ 及び φ はベクトルK の関数となりますので、慣性テンソル　I(K)はベクトルK の関
数となります)

2.5 エネルギー式の検討

前節ではコマの挙動に関する運動方程式を検討しました。
本節では、コマが持っている各エネルギー(位置、回転、並進、摩擦 及び 全エネルギー)について検討し、挙動把握の一助としたいと思います。

2.5.1 位置エネルギー

位置エネルギーは、重心に全質量が集中していると仮定したときのポテンシャルエネルギーで、式(2.5-1)で与えられます。

$$\mathrm{e_{pot}} = \mathrm{m_{top}.\,g.\,h} = \mathrm{m_{top}.\,g.(tr + lr.\,kz)} \quad \text{...(2.5-1)}$$

2.5.2 回転エネルギー

回転エネルギーは、角運動量Lに関係し、式(2.5-2)で与えられます。

$$\mathrm{e_{rot}} = \frac{1}{2}\mathbf{L}.\,\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{I}(\mathbf{K}).\,\boldsymbol{\omega}).\,\boldsymbol{\omega} \quad \text{...(2.5-2)}$$

2.5.3 並進エネルギー

並進エネルギーは、重心の移動に関するエネルギーで、式(2.5-3)で与えられます。

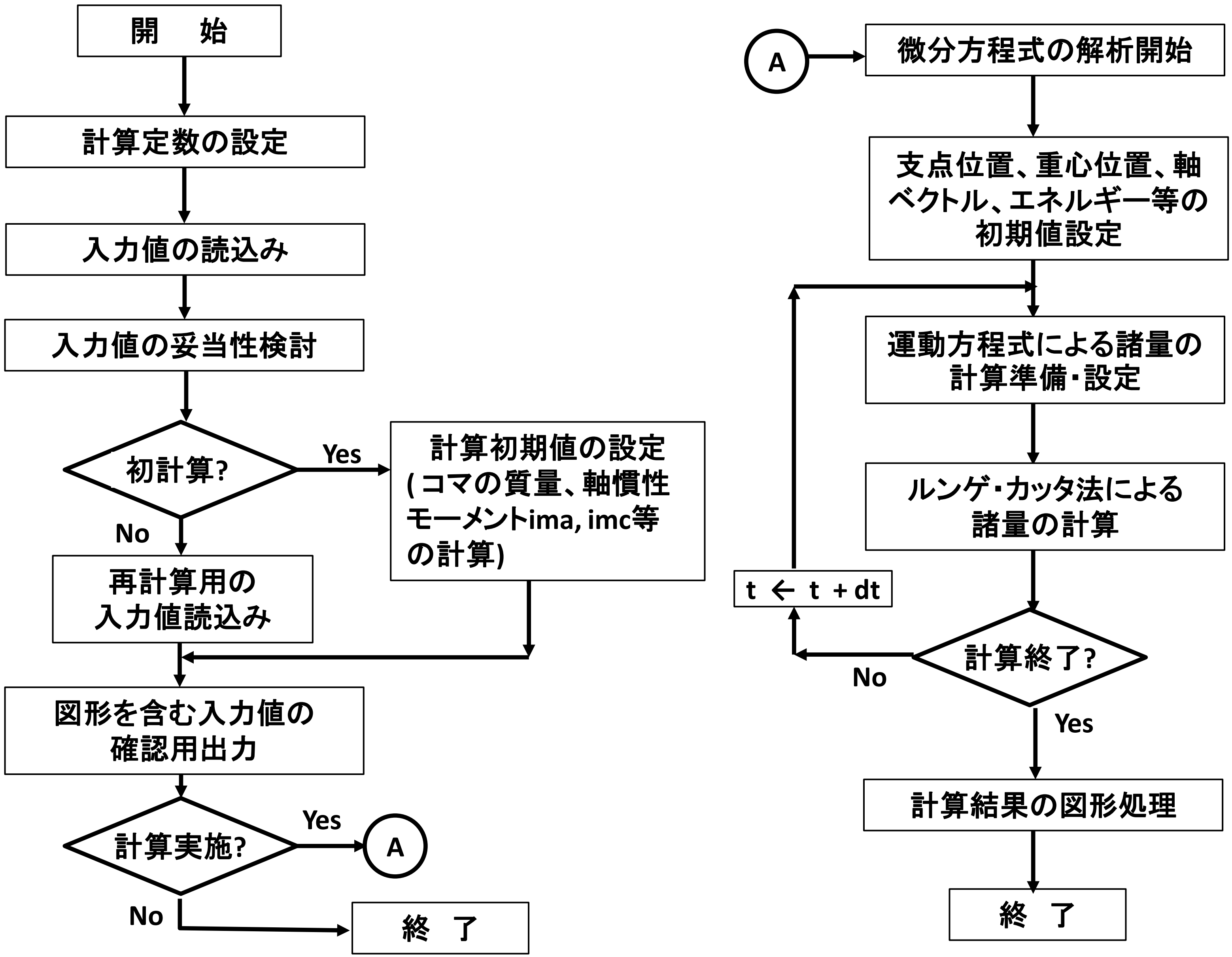
$$\mathrm{e_{trn}} = \frac{1}{2}\mathrm{m_{top}}\boldsymbol{V}^2{}_{\mathrm{gc}} \quad \text{...(2.5-3)}$$

2.5.4 摩擦エネルギー

摩擦エネルギーは、コマの支点が床と接触する際に発生するエネルギーで、式(2.5-4)で与えられます。同式のe_{friB} は、時刻 (t – dt) までの摩擦エネルギーの累積値です。

$$\mathrm{e_{fri}} = \mu.\,\mathbf{F}\mathrm{z}.\,\mathbf{V}\mathrm{p}.\,\mathrm{dt} + \mathrm{e_{friB}} \quad \text{...(2.5-4)}$$

2.6 計算手順



開　始
計算定数の設定
入力値の読込み
入力値の妥当性検討
初計算?
Yes
No
計算初期値の設定
(コマの質量、軸慣性
モーメントima, imc等
の計算)
再計算用の
入力値読込み
図形を含む入力値の
確認用出力
計算実施?
Yes
A
No
終　了
A
微分方程式の解析開始
支点位置、重心位置、軸
ベクトル、エネルギー等の
初期値設定
運動方程式による諸量の
計算準備・設定
ルンゲ・カッタ法による
諸量の計算
t ← t + dt
計算終了?
No
Yes
計算結果の図形処理
終　了

3.　普通ゴマの挙動計算

前章で検討したモデルを使用して、普通ゴマについて計算しました。

解析に使用したデータを表3.1に示します。
尚、解析に当たって、挙動の性格を把握するため、コマの質量(m_{top})、コマと接地面の摩擦係数(μ)、コマの回転数 (rps) 等について、パラメータサーベイを行うこととしました。

(rps：毎秒回転数 , revolutions per second)

表3.1　普通ゴマの解析使用データ

項目		記号	単位	普通ゴマ
質量 (P)		(mtop)	kg	0.004237
支点から重心までの距離		(lsg)	m	0.012266
支点の丸み半径(P)		(tr)	m	0.001
回転数 (P)		Wabs	rad/s	基本20回/s (1200rpm)
摩擦係数　(P)		μ	―	基本　0.1
極角		θ	rad	10度= 10π/180
方位角		φ	rad	90π/180
主軸慣性モーメント	X成分	Ima	kgm²	3.5366 x 10^{-7}
	Y成分	Imb	kgm²	3.5366 x 10^{-7}
	Z成分	Imc	kgm²	3.0330 x 10^{-7}
軸ベクトル初期値	X成分	Kx	―	Sin[θ]Cos[φ]
	Y成分	Ky	―	Sin[θ]Sin[φ]
	Z成分	Kz	―	Cos[θ]
角速度初期値 ω	X成分	Wx	rad/s	Wabs*Kx
	Y成分	Wy	rad/s	Wabs*Ky
	Z成分	Wz	rad/s	Wabs*Kz

(P)：パラメータサーベィ

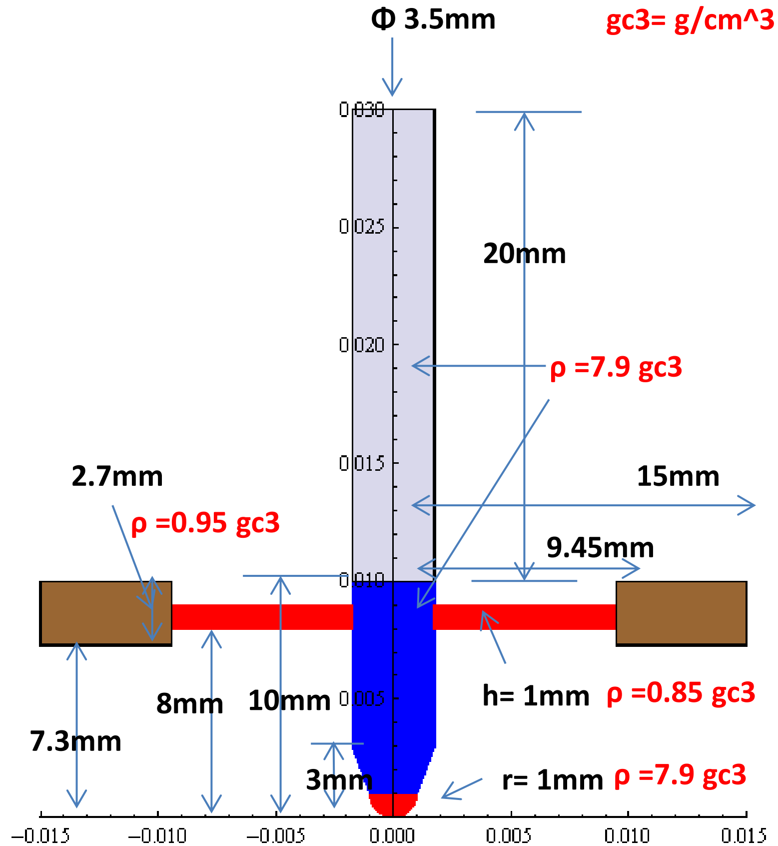


図3.1　普通ゴマ形状

3.2 基本ケースの挙動説明

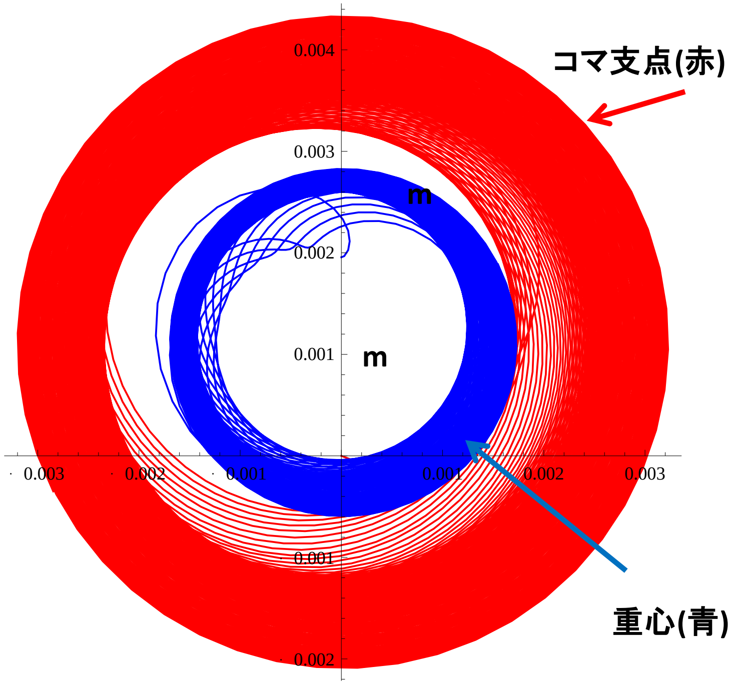


図　3.2-1　コマ支点及び重心の挙動

(1)コマ支点及び重心の挙動

0 ～ 40 秒までの挙動を計算時間幅⊿t= 0.0002秒でシミュレーションしました。**しかし、39.7秒過ぎにコマは転倒してしまいました。**基本ケースの慣性モーメント比は、 ima/imc= 1.17ですので、このコマは本質的に倒れ易いコマです。

コマの挙動を示す主要なパラメータとして、コマ支点及び重心の挙動を図3.2-1に示します。
支点の時刻 0 における位置を原点としました。図より、支点、重心共に時間の経過に従い、みそすり運動をしながら回転半径が大きくなっていきますが、回転半径はそれぞれ、約 3.2 mm 、1.7mmで非常に小さな円を描いています。

(1a)コマ支点 (bx, by)の挙動

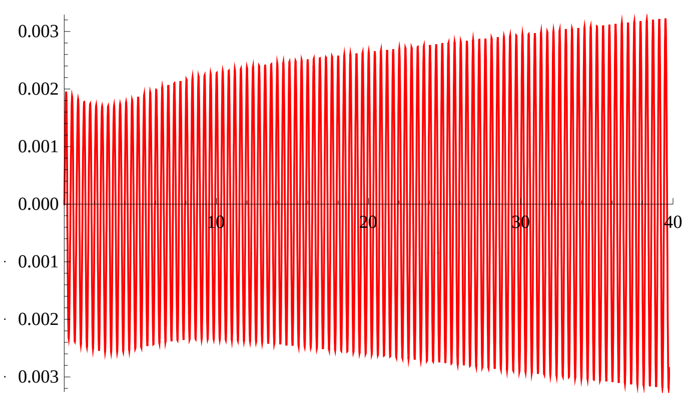


図　3.2-1a1　コマ支点 X方向(bx)の挙動

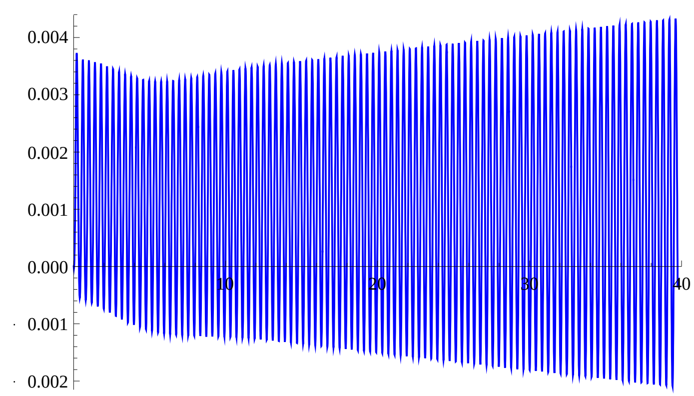


図　3.2-1a2　コマ支点 Y方向(by)の挙動

3.2　普通ゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

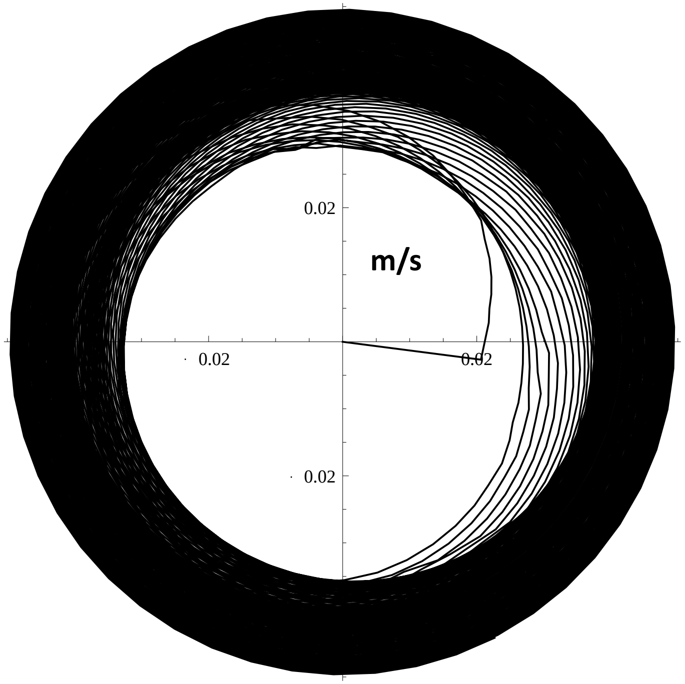


図　3.2-1a3　コマ支点 速度(v_x, v_y)の挙動

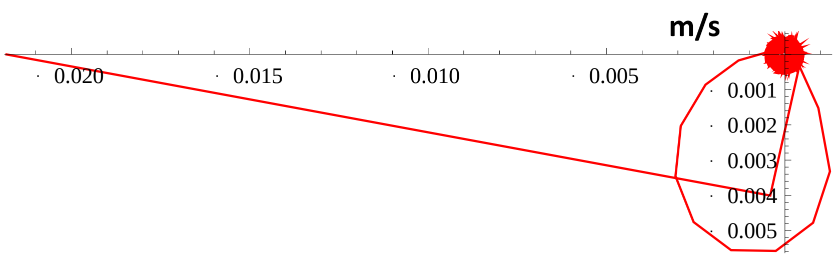


図　3.2-1a4　コマ支点 すべり速度(vp_x, vp_y)の挙動

(1a1) 支点の時間経緯

支点の時間経緯を図3.2-1a1 及び 1a2に示します。図では分り難いですが、X方向及びY方向位置は、約 0.33 秒の周期で単振動しています。

(1a2) 支点の速度

支点の速度変化を図3.2-1a3 に示します。X方向及びY方向の速度は、位置の変化と同様、単振動しています。単振動しているため、それをX-Y平面に投射すると、図の様に円となります。

(1a3) 支点のすべり速度

すべり速度の変化を図3.2-1a4 に示します。図より、X方向へのすべり速度は、支点のX方向速度(V_x)と同程度の大きさで、負の値となっています。

一方、Y方向へのすべり速度は、支点のY速度(V_y)の1/10と小さくなっています。

その後、すべり速度は小さくなり、殆ど滑らなくなります。

3.2　普通ゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

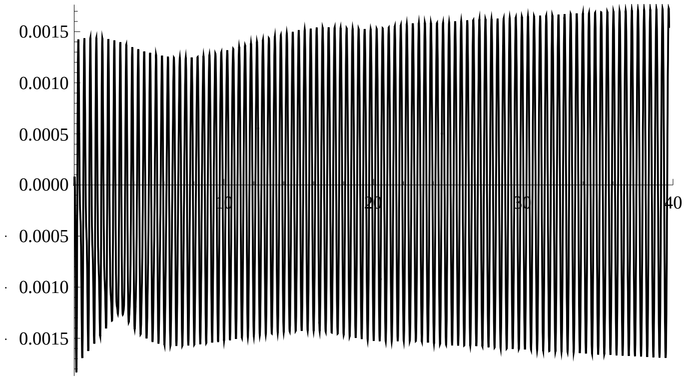


図　3.2-1b1　コマ重心 X方向(gcx)の挙動

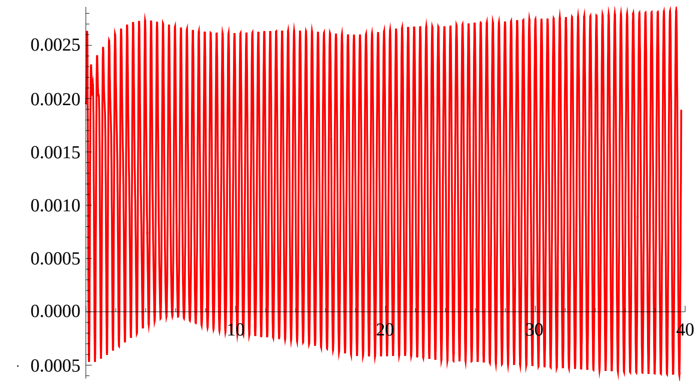


図　3.2-1b2　コマ重心 Y方向(gcy)の挙動

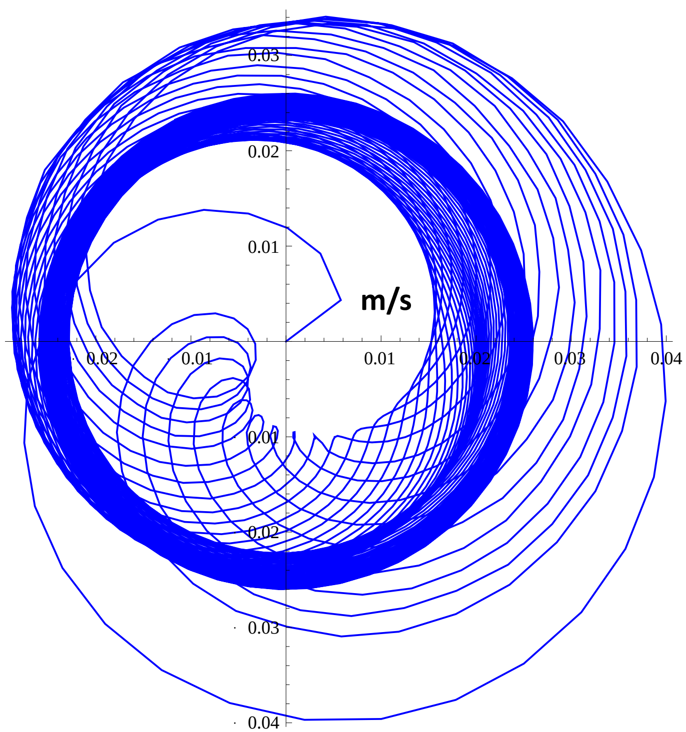


図　3.2-1b3　コマ重心 速度(Vgcx, Vgcy)の挙動

(1b1) 重心の時間経緯

重心の時間経緯を図3.2-1b1 及び 1b2に示します。図では分り難いですが、X方向及びY方向位置は、支点の周期と同じく、約 0.33 秒の周期で単振動しています。

(1b2)重心の速度

重心の速度変化を図3.2-1b3 に示します。X方向及びY方向の速度は、初期はランダムですが次第に単振動になってきます。これをX-Y平面に投射すると、図の様に円となります。その後、軸角度のずれに従い、円からずれたものとなって行きます。

3.2 普通ゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

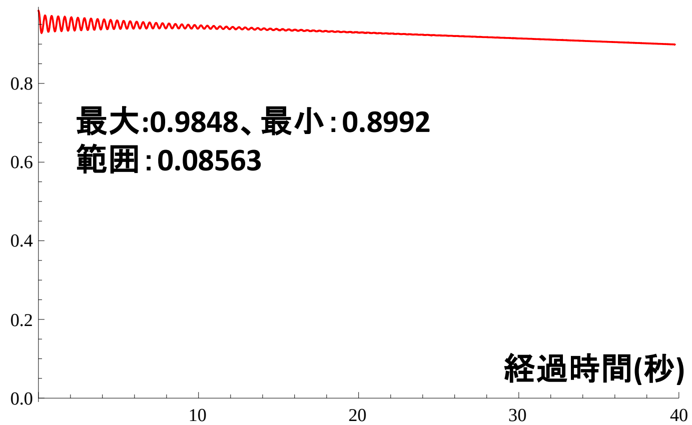


図　3.2-2　軸ベクトルのZ成分Kz の挙動

(2)軸ベクトルZ成分 Kz の挙動

時間の経過と共に軸が微小変動しています。初期はKz= 0.996181、39秒での値はKz= 0.8992です。これらの対応極角θは、それぞれ、10度と26度です。即ち、10度は初期の極角ですし、26度はコマの本体部の輪が床と接触した角度です。このことは、コマがみそすり運動をしながら軸を立てることなくゆっくり倒れていったことを示しています。

もう一つ、軸がゆっくり倒れていったことを示すものとして、後述の位置エネルギー(e_{pot})の減少が挙げられます。

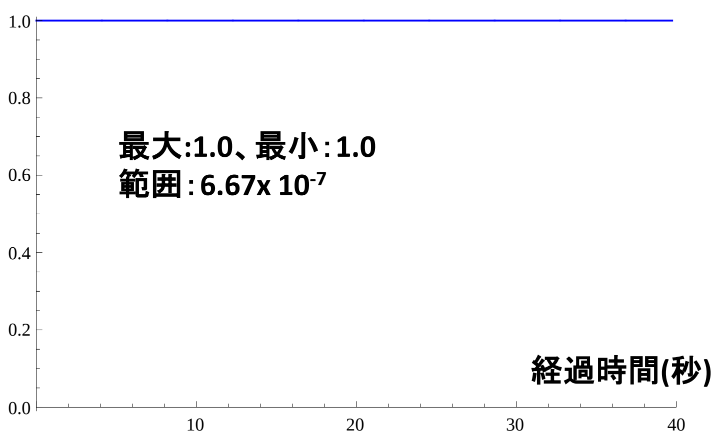


図　3.2-3　軸ベクトル絶対値 |K| の挙動

(3)軸ベクトル絶対値 |K| の挙動

計算の妥当性チェックの一つとして、絶対値|K|が1からどの位変動しているかを見ることが必要です。理論的には、|K|　= 1 で推移することが必要ですが、計算誤差が蓄積するため、1 の前後で振動します。それが 0.1%以下であれば、許容範囲と考えられます。
本計算では、左図に示す様に変動範囲が10^{-7}ですので、結果は妥当なものと考えられます。

3.2 普通ゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

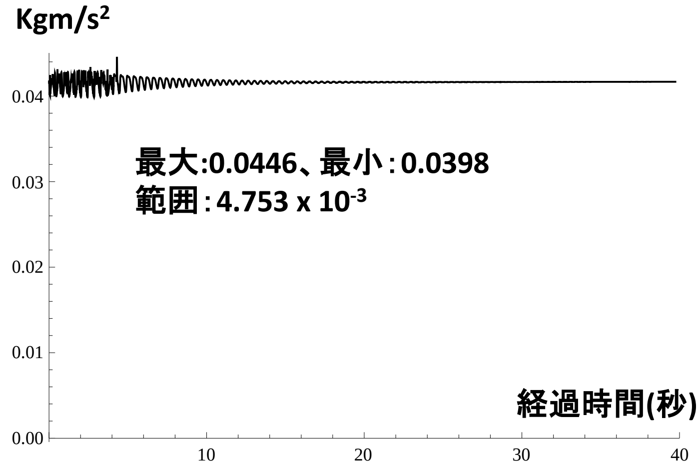


図 3.2-4 垂直抗力 Fz の挙動

(4)垂直抗力 Fz の挙動

もう一つの、計算の妥当性チェックとして、垂直抗力 Fz が負になっていないかを見ることが必要です。
運動方程式の展開においては、垂直抗力が常に床面を押し続けることを前提としています。しかし計算条件によっては、垂直抗力が負になる場合が出て来ます。この様な時は、エネルギーを供給していないに係らず、回転エネルギー(e_{rot})が増加するというおかしな結果が得られます。
本計算では、最小が0.0388 kgm/s^2ですので、負になっておらず、結果は妥当なものと考えられます。

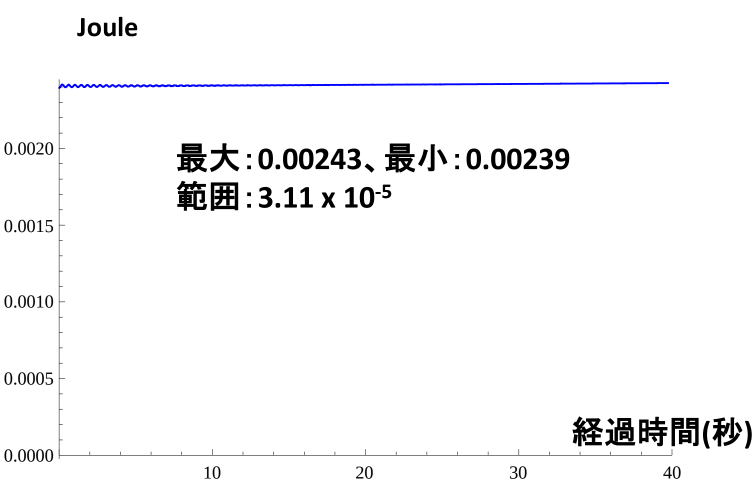


図 3.2-5 回転エネルギー(e_{rot})の挙動

(5)回転エネルギー(erot) の挙動

回転エネルギーを図3.2-5に示します。回転エネルギーは、軸を中心としたコマの回転に拠るもので、運動エネルギーの中心となるものです。計算期間中(0～39.7秒)のエネルギーの増加は3.11×10^{-5} J です。この数値の増加は、コマがゆっくり倒れていくことによる位置エネルギーの減少を補償しようとしたものです。

3.2　普通ゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

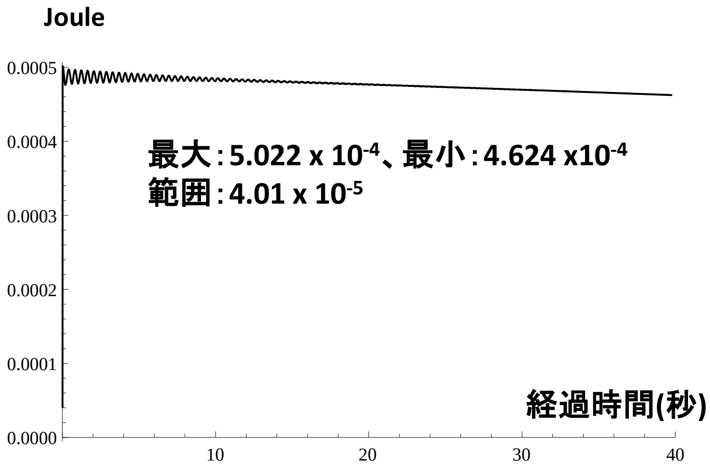


図　3.2-6　位置エネルギー(e_{pot})の挙動

(6)位置エネルギー(e_{pot}) の挙動

位置エネルギー(e_{pot})を図3.2-6に示します。位置エネルギーは、重心の位置が有しているエネルギーです。一般に、コマは時間が経過するに従って立って来ますが、今回のケースでは、説明しています様に、ゆっくりと軸が倒れるケースです。このため、重心がより低い位置に移動しますので、位置エネルギーは減少します。

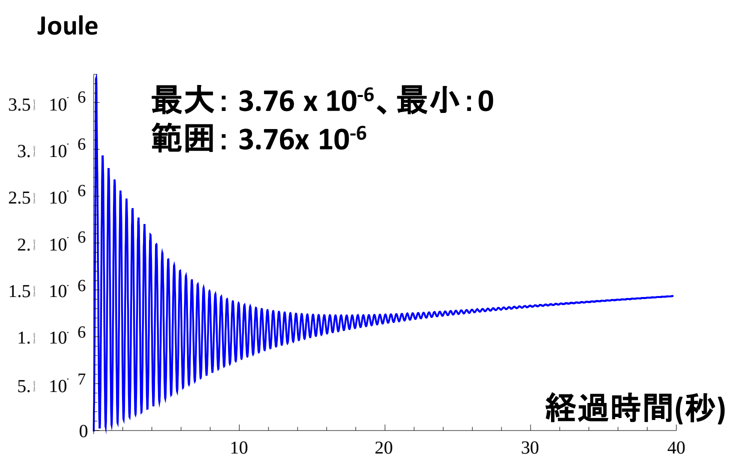


図　3.2-7　並進エネルギー(e_{trn})の挙動

(7)並進エネルギー(e_{trn}) の挙動

並進エネルギー(e_{trn})を図3.2-7に示します。本エネルギーは、重心の移動に伴うエネルギーです。
初期から15秒まで振動しているのは、コマが安定回転するまでの過渡速度変動のためです。

3.2 普通ゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

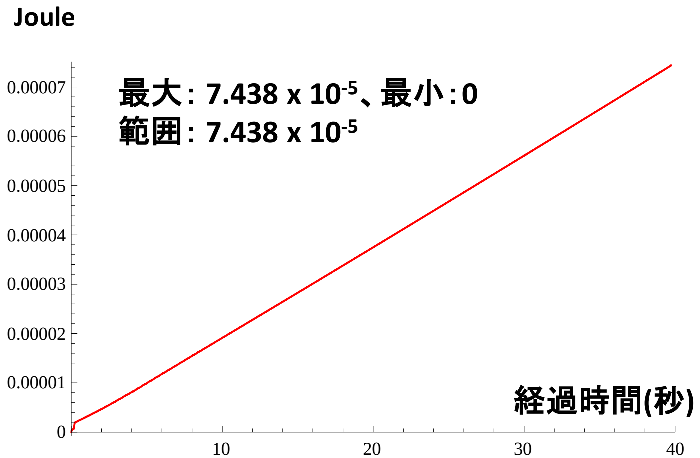


図 3.2-8 摩擦エネルギー(e_{frc})の挙動

(8) 摩擦エネルギー(e_{frc}) の挙動

微分方程式に直接取り込めなかったエネルギーで、唯一時間積分の処理を必要としたものです。このエネルギーはコマが倒れない限り、摩擦が有れば増え続けるものとなります。式(2.5-4)で示した通り、e_{frc} は垂直抗力 Fz 、支点がすべった距離及び摩擦係数を掛け合わせたものとなります。
本計算でのエネルギー増加は、約7.5 x 10^{-5} J でした。

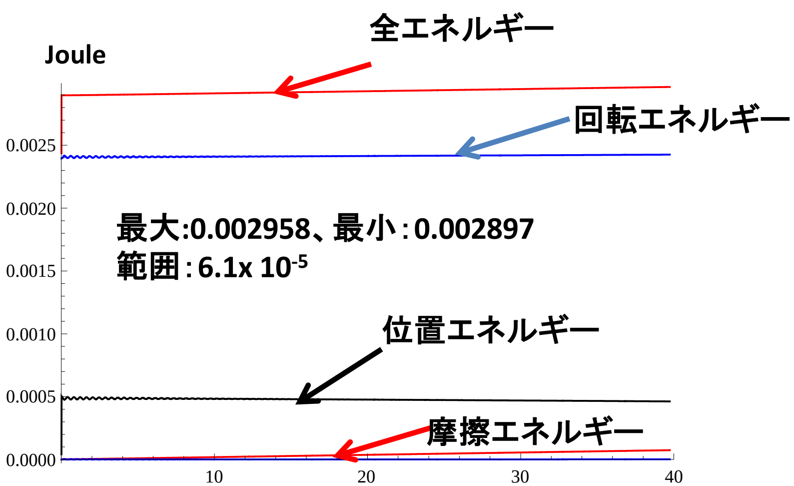


図 3.2-9 全エネルギー(e_{tot}) の挙動

(9) 全エネルギー(e_{tot}) の挙動

以上の各エネルギーを総和した図が、図3.2-9です。
理論上、全エネルギー(e_{tot})は時間で変化しないですが、本計算の範囲では全エネルギーは僅かに6.1 x 10^{-5} J増加していました。これは、回転エネルギーの増加が、位置エネルギーの減少以上に、大きかったものと考えられます。

3.3　普通ゴマ のパラメータサーベィ

(1)　追加データ

表3.1以外のパラメータデータは以下の通りです。

ー質量増加	m_{top}	0.004237 kg ⇒ 0.0139055 kg
ー回転数	tspn =	20 rps ⇒ 100 rps (6000 rpm)、15 rps
ー支点の丸み	tr =	0.001m ⇒ 0.0005, 0.002 m
ー摩擦係数	μ =	0.1 ⇒ 0、 0.6
ー計算刻み幅	dt =	0.0002 秒 ⇒ 0.001、0.0005 秒

(rpm：毎分回転数、revolutions per minute)

3.3.1 ケース1 (質量(m_{top}) の影響)

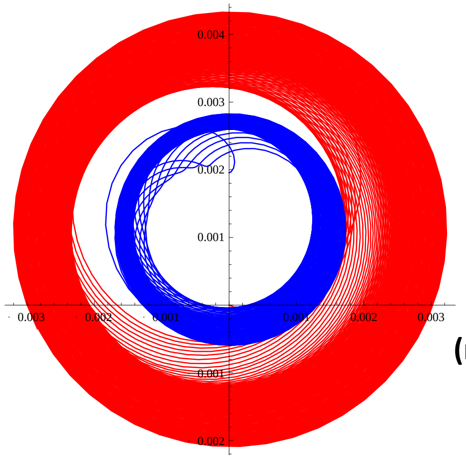
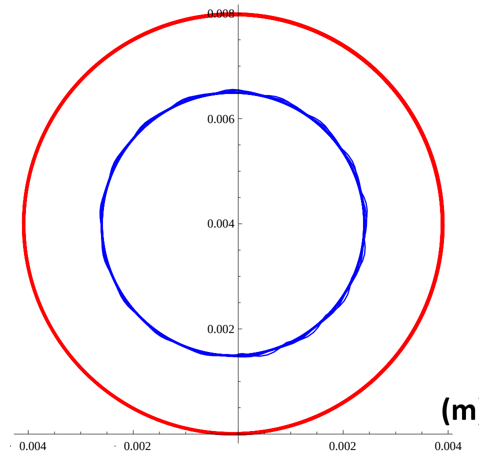
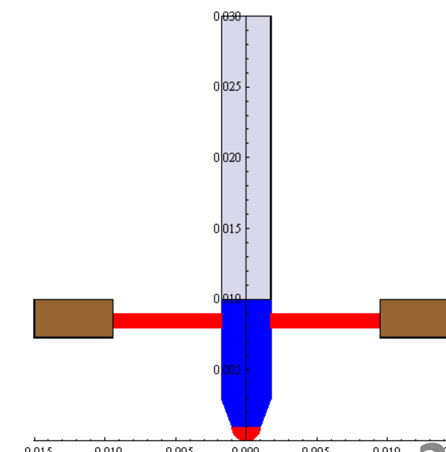
	基本ケース (0.004237 kg)	質量増(0.0139055 kg)	
コマ支点及び重心の挙動			
	図 3.2-1	図 3.3.1-1A	

図3.1 の輪(右図の茶色部分)の密度を1.6 g/cm^3から10g/cm^3に変更しました。これにより、以下の諸量が変化しました。

	基本(1.6g/cm^3)	ケース1 (10 g/cm^3)
質量	4.24 g	13.9 g
重心位置(底面より)	12.27 mm	9.75 mm
軸に垂直な慣性モーメント Ima	3.5366×10^{-7} kgm^2	1.158×10^{-6} kgm^2
軸廻り慣性モーメント Imc	3.0330×10^{-7} kgm^2	1.823×10^{-6} kgm^2



3.3.1　ケース1　(質量(m_{top}) の影響)

一番の変化は、慣性モーメント比 Ima/Imc です。基本ケースの1.16から0.635になっています。即ち、高重心形から低重心形になっています。このため、前図3.3.1-1Aの様に、支点及び重心の軌跡はバタつかずに綺麗な円を描きます。これは下図3.3.1-2A, 2Bに示す支点の時間経緯から分ります。

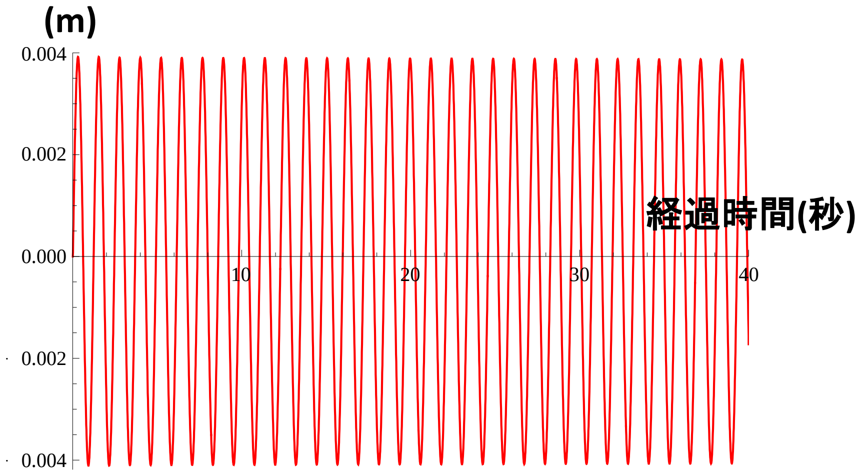


図 3.3.1-2A　支点Xの位置変化

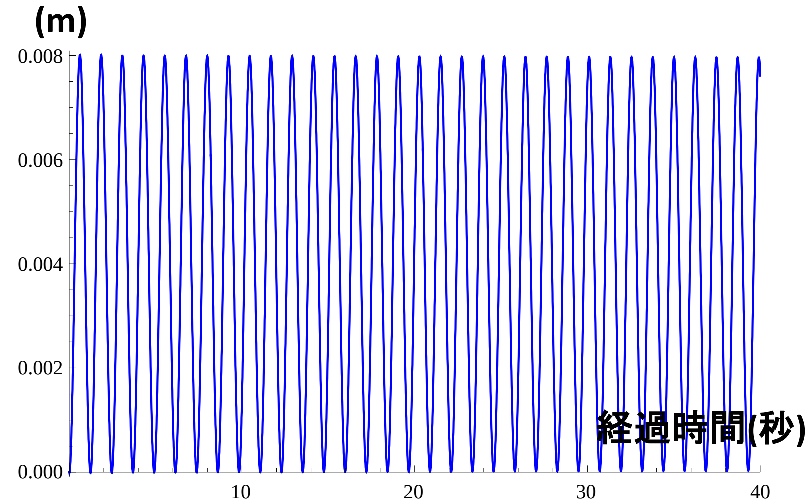
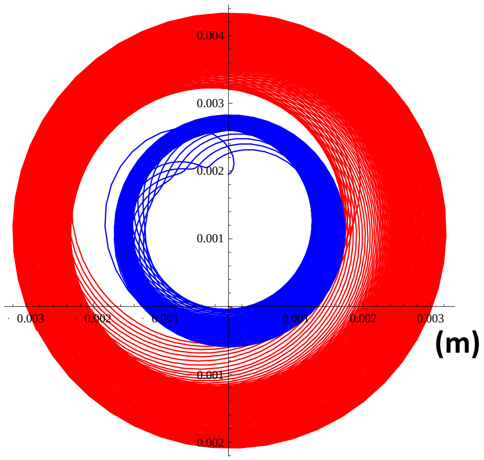
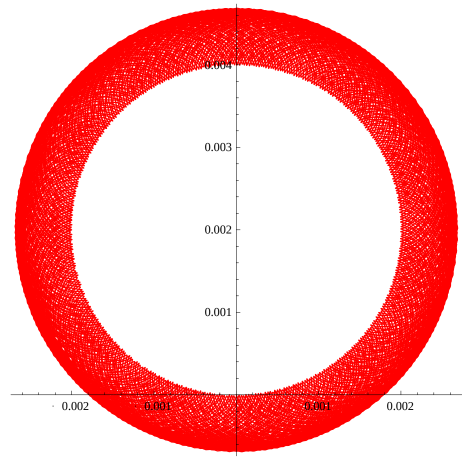
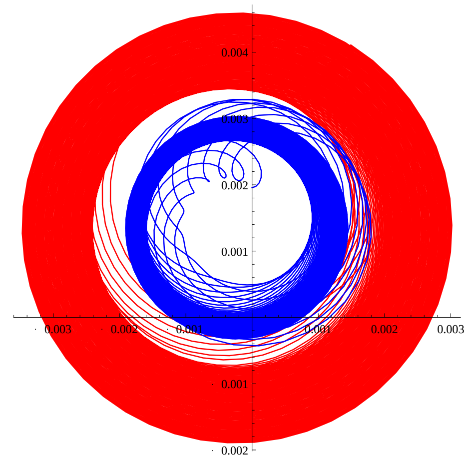


図 3.3.1-2B　支点Yの位置変化

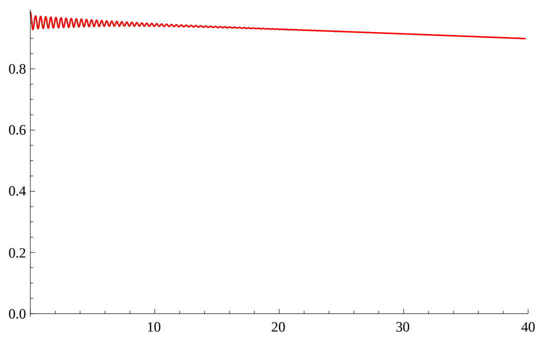
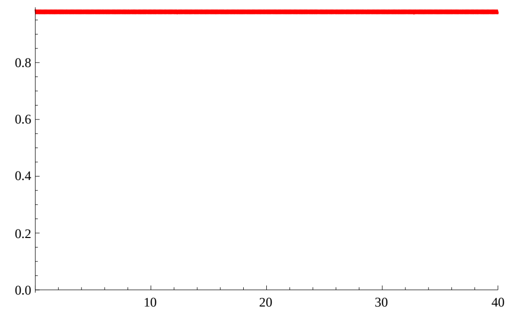
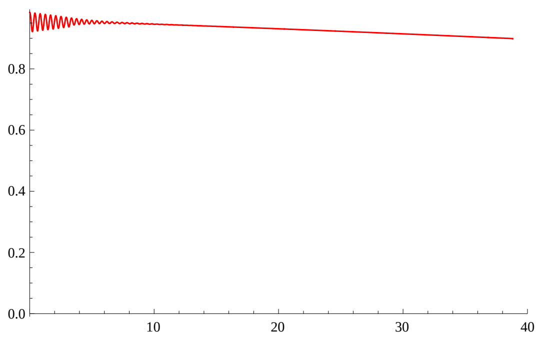
3.3.2 パラメータサーベイ ケース2 (摩擦係数 (μ) の影響)

	基本ケース (μ=0.1)	摩擦無し (μ= 0)	摩擦増 (μ= 0.6)
コマ支点及び重心の挙動			
	図 3.2-1	図 3.3.2-1A	図 3.3.2-2A

摩擦が無い場合、重心の移動が無く、支点のみの挙動となります(図3.3.2-1A)。何故重心は動かないのでしょうか。式(2.1)で重力ベクトルがX,Y方向の成分を持たないことと、μ= 0 のため摩擦力ベクトルが 0 (ゼロ)となり、右辺の項が0となるためです。

摩擦が0.6と増加した場合、ほぼ基本ケースと同様の挙動となります。

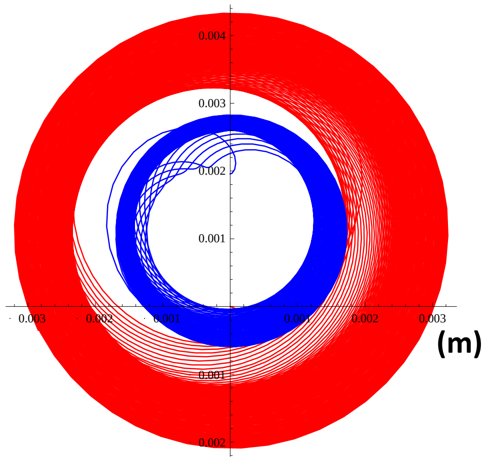
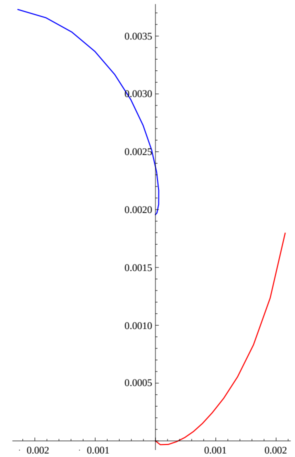
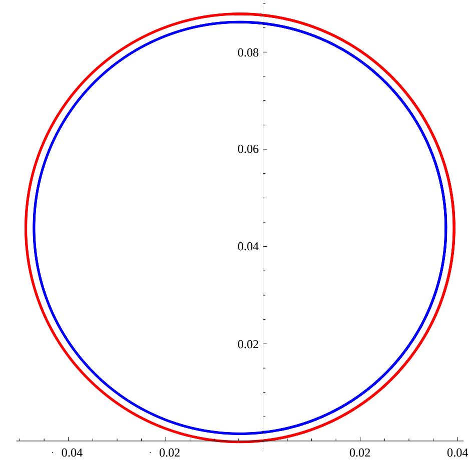
3.3.2 パラメータサーベイ ケース2 (摩擦係数 (μ) の影響) 続き

	基本ケース (μ=0.1)	摩擦無し (μ= 0)	摩擦増 (μ= 0.6)
軸ベクトルのZ成分Kz			
	図 3.2-2	図 3.3.2-1B	図 3.3.2-2B

摩擦が無い場合、X, Y方向の重心の移動が無いため、コマは糸で吊り下げられているように見えます。但し、軸ベクトルのZ成分Kzの挙動を見ると、小刻みに上下に振動していることが分ります。時間的な減衰は有りません。

摩擦が0.6と増加した場合、ほぼ基本ケースと同様の挙動となります。

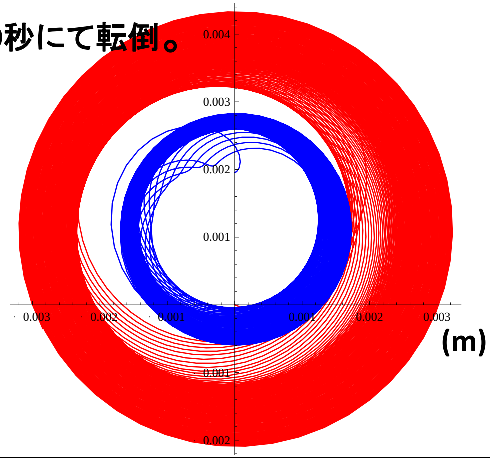
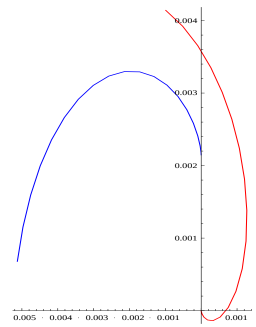
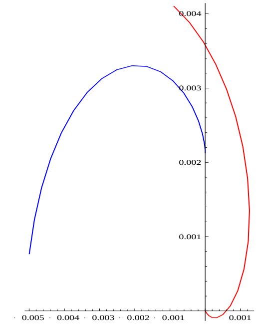
3.3.3 パラメータサーベイ ケース3 (回転数(tspn)の影響)

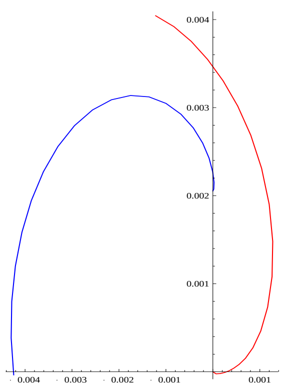
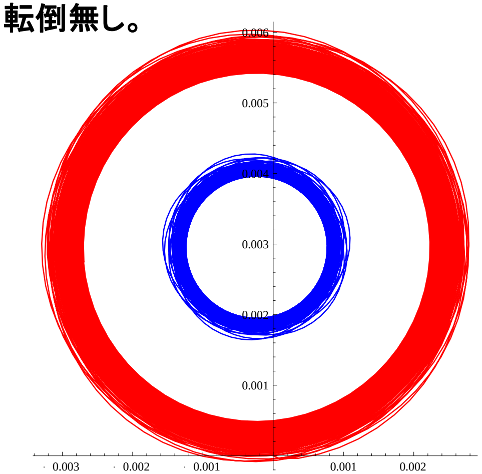
	基本ケース (tspn=20 rps)	回転数減(tspn= 15 rps)	回転数増(tspn= 100 rps)
コマ支点及び重心の挙動			
	図 3.2-1	図 3.3.3-1A	図 3.3.3-2A

回転数を減少した場合(tspn=15 rps = 900回/分)、0.1秒で倒れてしまいました。軸を維持するエネルギーが少なかったためです。

回転数が増加した場合(tspn=100 rps = 6000回/分)、支点と重心はほぼ近い円軌道を描き、基本ケースに比べて半径も10倍程大きくなっています。又、回転数の増加により、初期極角θ = 10度から軸が立って来て40秒の時点で8.5度になっています。

3.3.4 パラメータサーベイ ケース4 (支点丸み(tr)の影響)

	基本ケース (tr= 1 mm)	極細支点丸み(tr= 1 μm)	細支点丸み(tr= 0.1mm)
コマ支点及び重心の挙動	39秒にて転倒。 	0.16秒にて転倒。 	0.16秒にて転倒。 
	図 3.2-1	図 3.3.4-1A	図 3.3.4-2A

	細支点丸み(tr= 0.5 mm)	太支点丸み(tr= 2 mm)
コマ支点及び重心の挙動	0.18秒にて転倒。 	転倒無し。 
	図 3.3.4-3A	図 3.3.4-4A

3.3.4 パラメータサーベイ ケース4 (支点丸み(tr)の影響) 続き

今回のサーベイでは、0.5mmまでの支点丸みまで直ぐに転倒しました。支点半径が小さくなるほど安定位置まで移動するのに時間が掛かりますが、その間に重力により転倒してしまいます。

支点半径が大きくなるほど回転半径も大きく、かつ、安定的な挙動を示します。

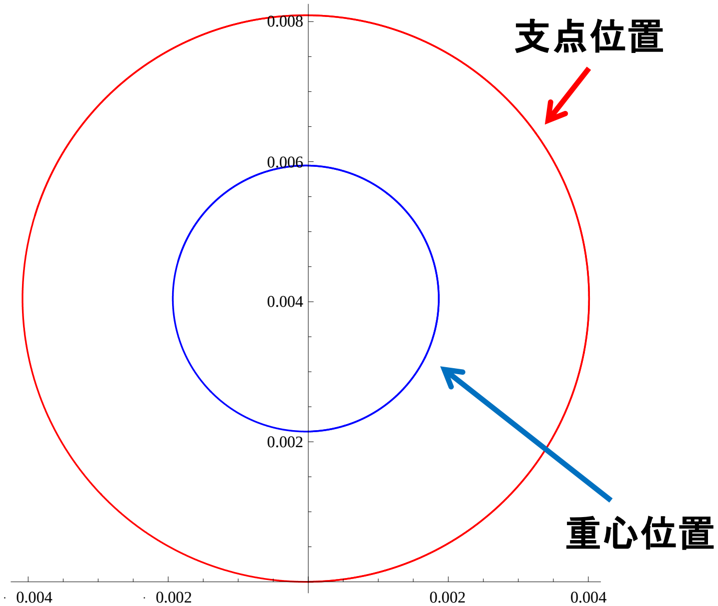


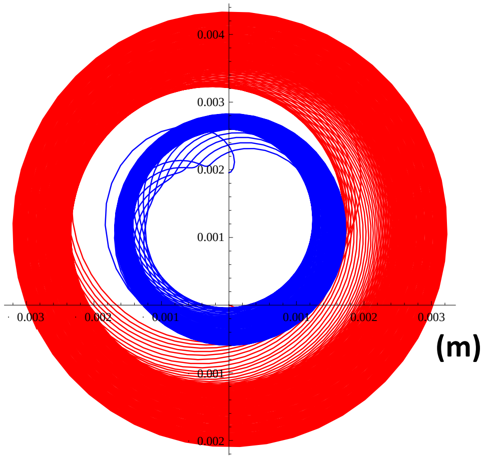
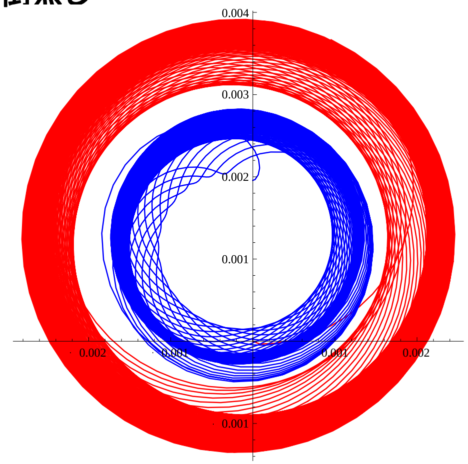
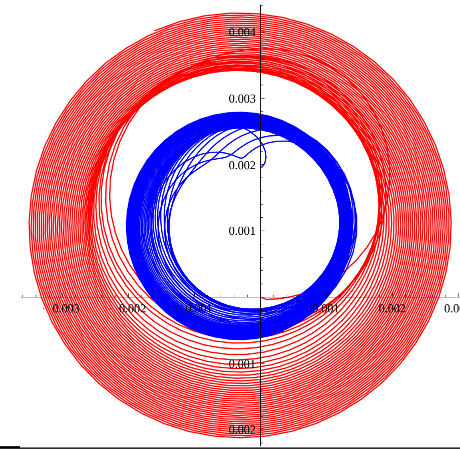
図 3.3.4-5A

前に「支点半径が小さくなるほど安定位置まで移動するのに時間が掛かる」と記述しましたが、時間の代わりに回転数を上げれば、安定位置まで移動するのは容易であり、1 μmの極細支点でも安定な回転をするはずです。

それを示したのが図3.3.4-5Aです。 図は、支点半径 = 1 μm、回転数 1000 rpsの場合の支点位置(赤)と重心位置(青)の挙動です。

図の様に安定な回転挙動を示します。

3.3.5 パラメータサーベイ ケース5 (計算時間幅(dt)の影響)

	基本ケース (dt=2x10^{-4}秒)	短い(dt=1x10^{-4}秒)	長い(dt=5x10^{-4}秒)
コマ支点及び重心の挙動	39秒で転倒 	転倒無し 	16秒で転倒 
	図 3.2-1	図 3.3.5-1A	図 3.3.5-2A

計算時間幅を変更した場合、挙動が変わってしまいました。原因は分りません。
40秒間の計算で、計算幅以外設定値は全て同じです。
基本ケースでは39秒でコマが転倒しました。しかし、dt = 0.0001秒では転倒しません。一方時間幅を大きくしたdt = 0.0005秒では、16秒で転倒しました。
掲載はしませんでしたが、更に大きな dt = 0.001秒では、８秒で早々転倒しました。

４．　逆立ちゴマの挙動計算

本章では逆立ちゴマについて計算しました。

解析に使用したデータを表4.1、コマの形状を図4.1に示します。
普通ゴマと同様、解析に当たって、挙動の性格を把握するため、コマの質量、コマと接地面の摩擦係数、コマの回転数、計算時間幅等について、パラメータサーベイを行うこととしました。

表4.1　逆立ちゴマの解析使用データ

項目		記号	単位	逆立ちゴマ
質量 (P)		(mtop)	kg	0.003491
支点から重心までの距離		(lsg)	m	0.007364
支点の丸み半径		(tr)	m	0.01
回転数 (P)		Wabs	rad/s	基本20回/s (1200rpm)
摩擦係数　(P)		μ	—	基本　0.1
極角		θ	rad	5度= 5π/180
方位角		φ	rad	90π/180
主軸慣性モーメント	X成分	Ima	kgm²	1.2637 x 10^{-7}
	Y成分	Imb	kgm²	1.2637x 10^{-7}
	Z成分	Imc	kgm²	1.6807 x 10^{-7}
軸ベクトル初期値	X成分	Kx	—	Sin[θ]Cos[φ]
	Y成分	Ky	—	Sin[θ]Sin[φ]
	Z成分	Kz	—	Cos[θ]
角速度初期値 ω	X成分	Wx	rad/s	Wabs*Kx
	Y成分	Wy	rad/s	Wabs*Ky
	Z成分	Wz	rad/s	Wabs*Kz

(P)：パラメータサーベィ

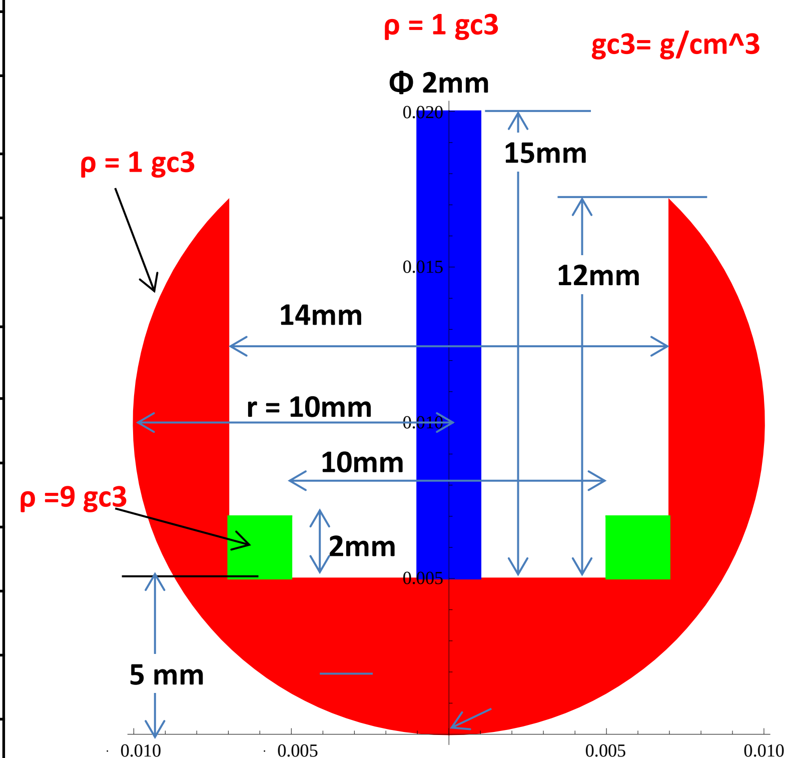


図4.1　逆立ちゴマ形状

4.2 基本ケースの挙動説明

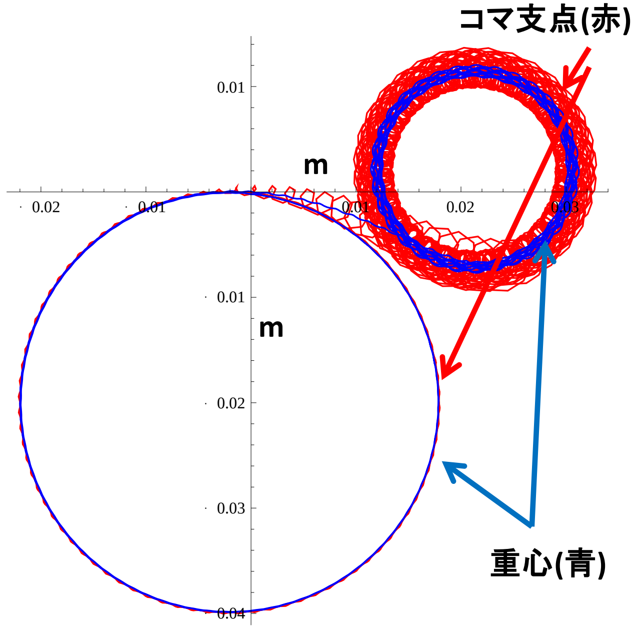


図　4.2-1　コマ支点及び重心の挙動

(1)コマ支点及び重心の挙動

0 ～ 20 秒までの挙動を計算時間幅⊿t= 0.0002秒でシミュレーションしました。基本ケースの慣性モーメント比は、Ima/imc= 0.752ですので、逆立ち判定式*1に照らし合わせますと、このコマは逆立ち条件を満足しているとのことです。(判定式については、参考1を参照下さい)

普通ゴマと同様、コマ支点及び重心の挙動を図4.2-1に示します。支点の時刻 0 における位置を原点としました。図より、支点、重心共に時間の経過に従い、最初は時計回りの大きな円を2回描きますが、逆立ち以降は反時計廻りの小さな円を3回程描きます。

(1a)コマ支点 (bx, by)の挙動

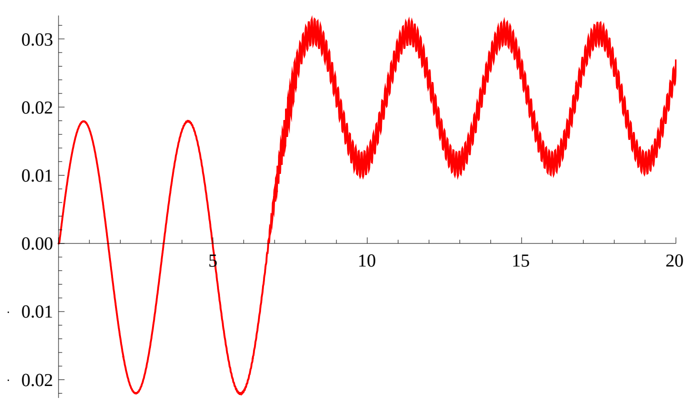


図　4.2-1a1　コマ支点 X方向(bx)の挙動

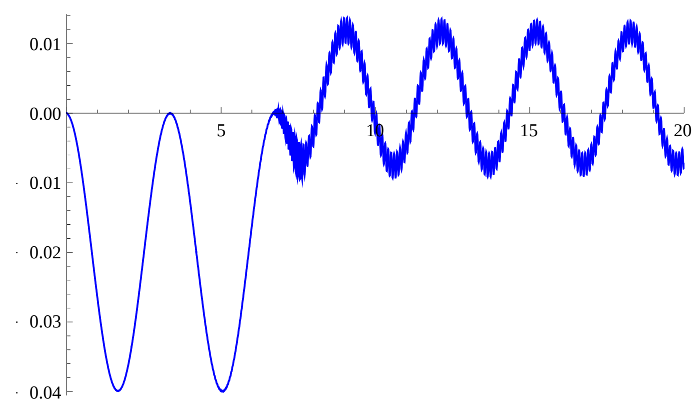


図　4.2-1a2　コマ支点 Y方向(by)の挙動

4.2 逆立ちゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

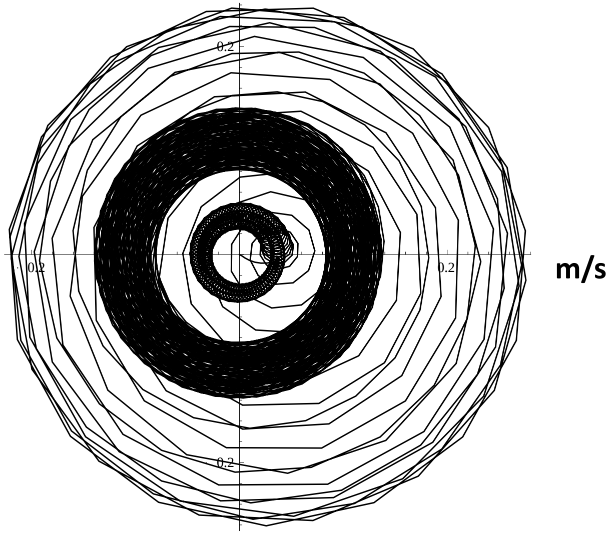


図　4.2-1a3　コマ支点 速度(vx, vy)の挙動

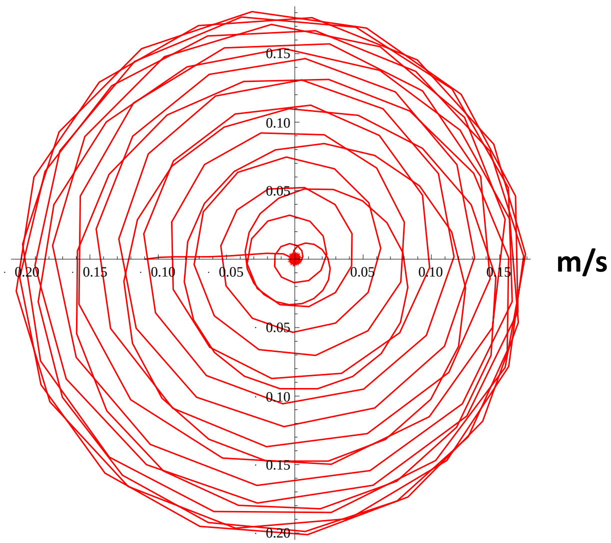


図　4.2-1a4　コマ支点 すべり速度(vpx, vpy)の挙動

(1a1) 支点の時間経緯

支点の時間経緯を図4.2-1a1 及び 1a2に示します。図では分り難いですが、X方向及びY方向位置は、約3.2秒の周期で単振動します。

(1a2) 支点の速度

支点の速度変化を図4.2-1a3 に示します。X方向及びY方向の速度は、位置の変化と同様、単振動しています。単振動しているため、それをX-Y平面に投射すると、図では分りにくいですが円となります。(掲載図はギザギザになっていますが、これはメモリー制限に拠る間引き格納のためで、本来はスムーズな曲線となっています。)

(1a3) 支点のすべり速度

すべり速度の変化を図4.2-1a4 に示します。図では分りにくいのですが、すべり速度の挙動は、原点を起点として右回りのスパイラル曲線となっています。

4.2 逆立ちゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

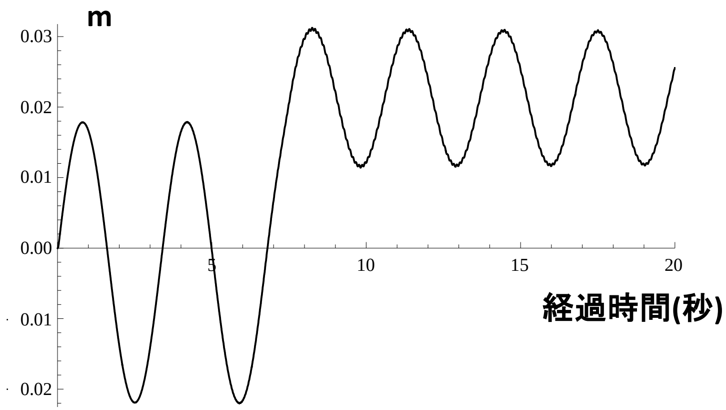


図 4.2-1b1 コマ重心 X方向(gcx)の挙動

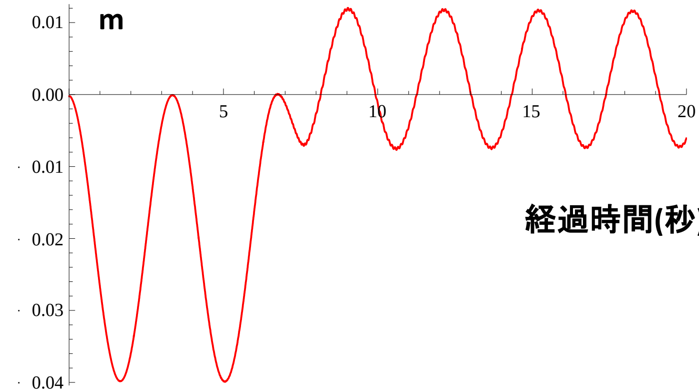


図 4.2-1b2 コマ重心 Y方向(gcy)の挙動

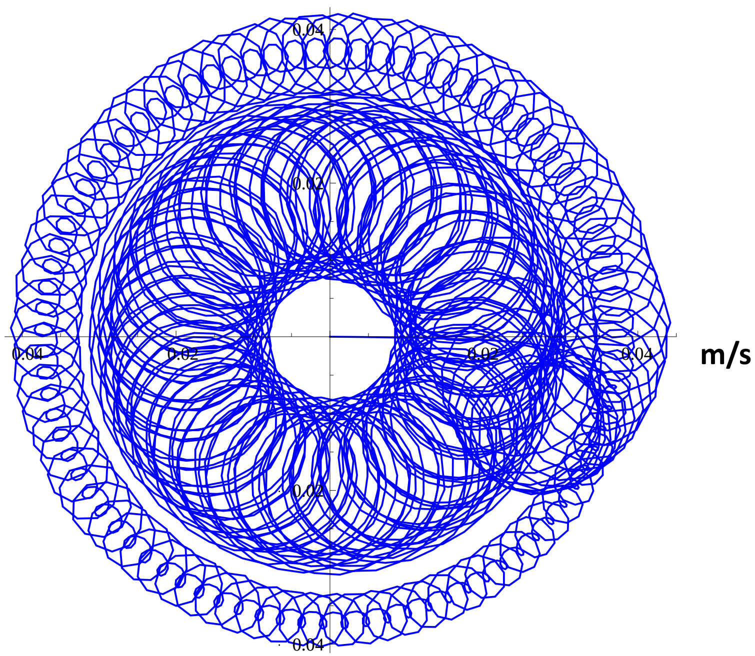


図 4.2-1b3 コマ重心 速度(Vgcx, Vgcy)の挙動

(1b1) 重心の時間経緯

重心の時間経緯を図4.2-1b1 及び 1b2に示します。図より分る様に、X方向及びY方向位置は、支点の周期と同じく、約 3.2 秒の周期で単振動しています。
前図4.2-1a1 及び 1a2と比較すると分りますが、支点と同期して運動していることが分ります。

(1b2)重心の速度

重心の速度変化を図4.2-1b3 に示します。X方向及びY方向の速度は、小さな円を描きながらその円が全体として大きな円を描いている図形となっています。

4.2 逆立ちゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

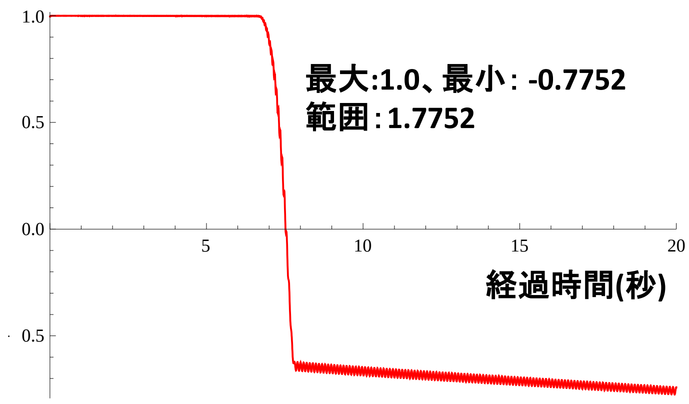


図 4.2-2 軸ベクトルのZ成分Kz の挙動

(2)軸ベクトルZ成分 Kz の挙動

図に示す様に、時刻7.5秒の近辺でKz値が1から -0.7に急激に変化しています。これはコマが将に逆立ちしようとしていると判断します。完全に逆立ちすればKz= -1近辺になりますが、図より分るように - 0.7から緩慢に低下しています。何故直ぐにKz = - 1 にならないのかは、回転エネルギーの不足によるものと考えます。
(4.3.3のパラメーターサーベィ参照)

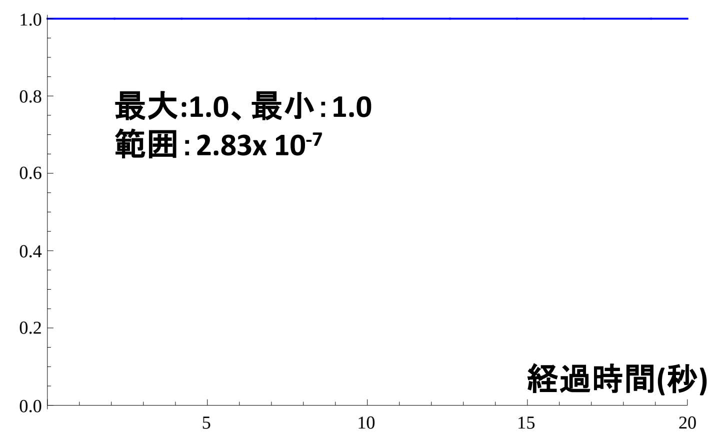


図 4.2-3 軸ベクトル絶対値 |K| の挙動

(3)軸ベクトル絶対値 |K| の挙動

計算の妥当性チェックの一つとして、絶対値|K|が1からどの位変動しているかを見ることが必要です。理論的には、|K| = 1 で推移することが必要ですが、計算誤差が蓄積するため、1 の前後で振動します。それが 0.1%以下であれば、許容範囲と考えられます。
本計算では、左図に示す様に変動範囲が10^{-7}ですので、結果は妥当なものと考えられます。

4.2 逆立ちゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

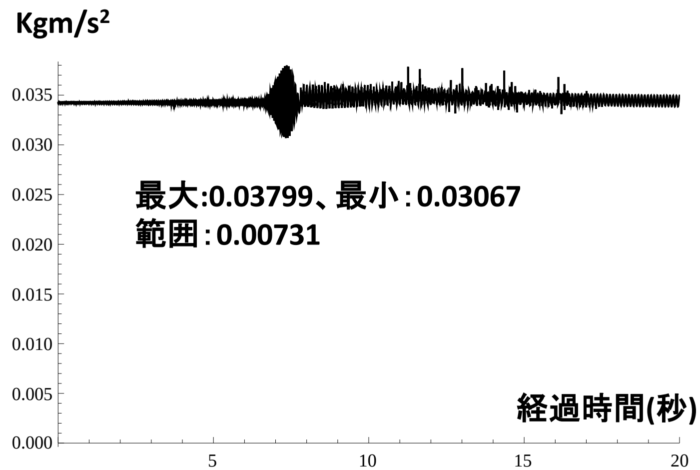


図 4.2-4 垂直抗力 Fz の挙動

(4)垂直抗力 Fz の挙動

もう一つの、計算の妥当性チェックとして、垂直抗力 Fz が負になっていないかを見ることが必要です。
本計算では、図に示す様に負になっておらず、最小が 0.0307 kgm/s^2ですので、結果は妥当なものと考えられます。
図では、逆立ちが始まる7秒時点で抗力が大きく変動し、その後も振動し続けていますが、前述図4.2-2に示す様に、Kzベクトルの振動に拠るものです。

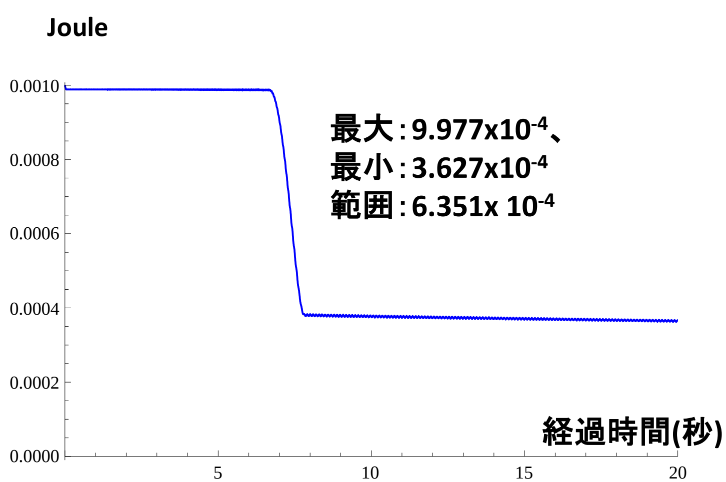


図 4.2-5 回転エネルギー(erot)の挙動

(5)回転エネルギー(erot) の挙動

回転エネルギーを図4.2-5に示します。回転エネルギーは、軸を中心としたコマの回転に拠るもので、運動エネルギーの中心となるものです。計算期間中(0～20秒)のエネルギーの減少は6.35×10^{-4} J です。この減少は、コマが逆立ちの際に、主に摩擦によりエネルギーが失われたためです。

4.2　逆立ちゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

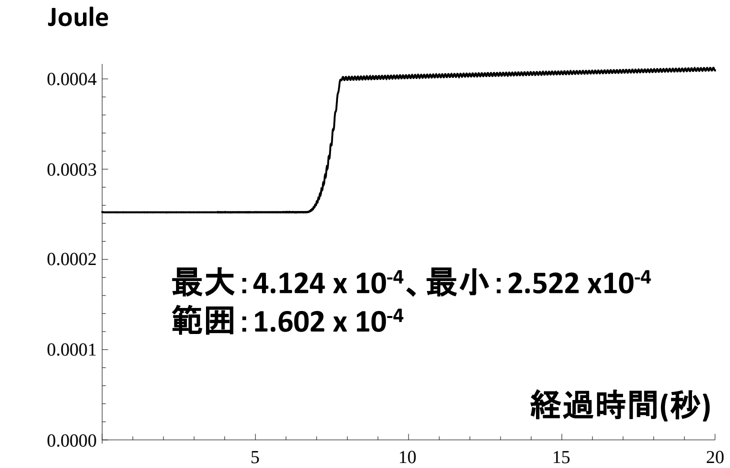


図　4.2-6　位置エネルギー(epot)の挙動

(6)位置エネルギー(epot) の挙動

位置エネルギー(epot)を図4.2-6に示します。位置エネルギーが7秒付近で増加するのは逆立ちにより重心位置が押し上げられた事によります。但し、(2)で説明しましたが、十分な回転数でなかったために、完全な逆立ち状態には至っていません。
(4.3.3のパラメータサーベィ参照)

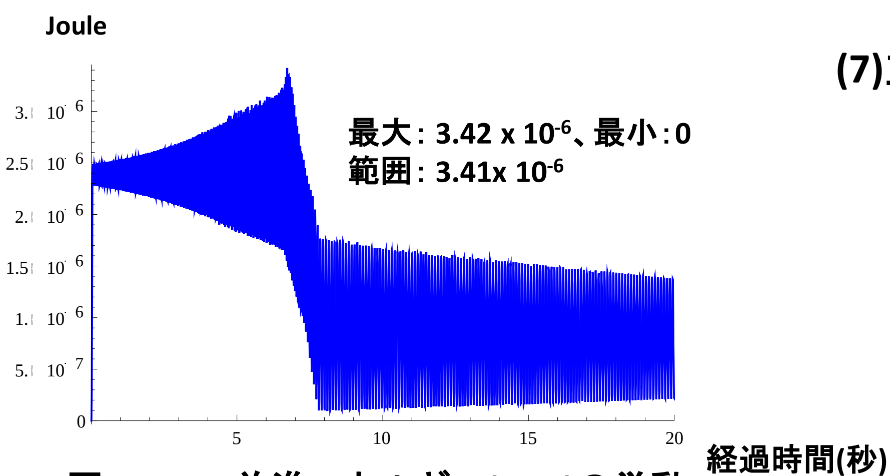


図　4.2-7　並進エネルギー(etrn)の挙動

(7)並進エネルギー(etrn) の挙動

並進エネルギー(etrn)を図4.2-7に示します。図より分る様に、7秒以前と以後で振動挙動が変わっています。これは逆立ち前と後のためで、特に逆立ち後に振動が収束しないのは、前述した様に、完全な逆立ち状態になれず、逆立ちの過程を続けているためです。

4.2 逆立ちゴマ 基本ケースの挙動説明 (続き)

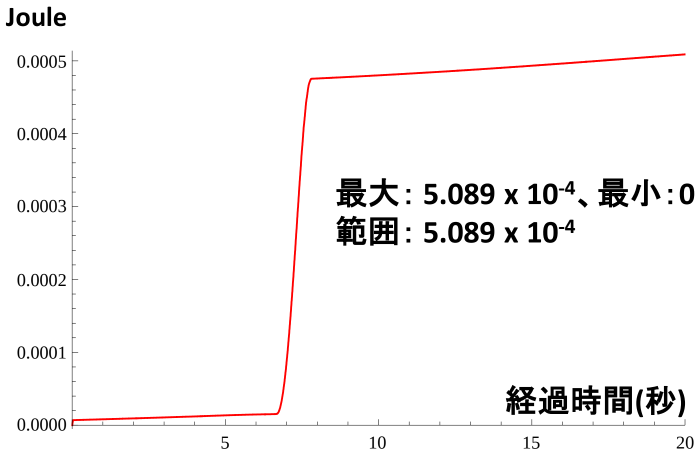


図 4.2-8 摩擦エネルギー(efrc)の挙動

(8) 摩擦エネルギー(efrc) の挙動

摩擦エネルギー(efrc)を図4.2-8に示します。逆立ち過程でエネルギーが急激に増加していることが分ります。急激な増加は、コマの球体半径が、普通ゴマの先端球形の半径の10倍もあり、摩擦移動距離が長いためです。本計算でのエネルギー増加は、約5.1 x 10^{-4} J でした。

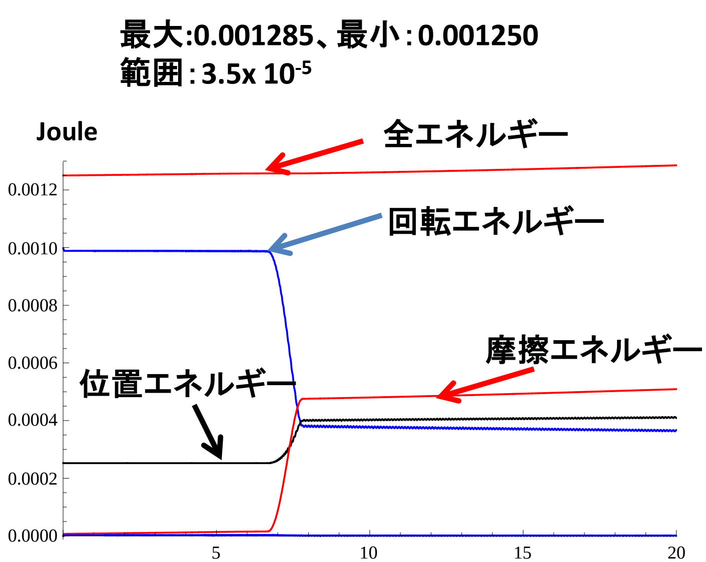


図 4.2-9 全エネルギー(etot) の挙動

(9) 全エネルギー(etot) の挙動

以上の各エネルギーを総和した図が、図4.2-9です。理論上、全エネルギー(etot)は時間で変化しないですが、本計算の範囲では全エネルギーは3.5 x 10^{-5} J増加していました(約3%)。

4.3 逆立ちゴマ のパラメータサーベィ

(1) 追加データ

表4.1以外のパラメータデータは以下の通りです。

ー質量増加	m_{top}	0.003491 kg ⇒ 0.002134 kg
ー回転数	tspn=	20回/s ⇒ 100回/s (6000 rpm)、15 回/s
ー摩擦係数	μ=	0.1 ⇒ 0、 0.6
ー計算刻み幅	dt=	0.0002 秒 ⇒ 0.001、0.0005 秒

4.3.1 ケース1 (質量(m_{top}) の影響)

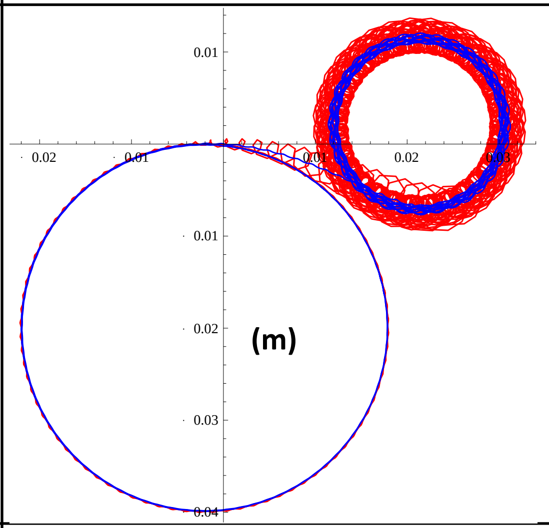
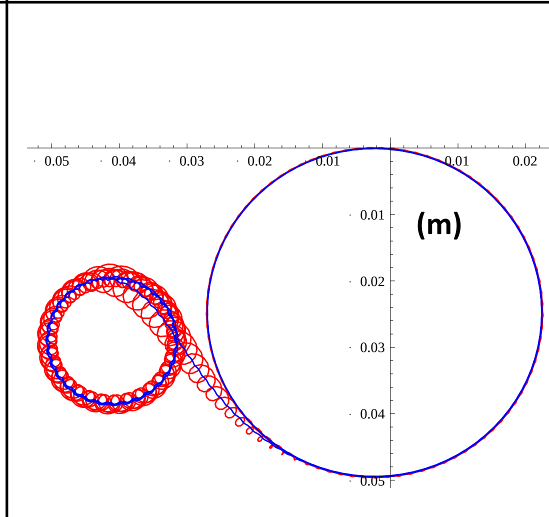
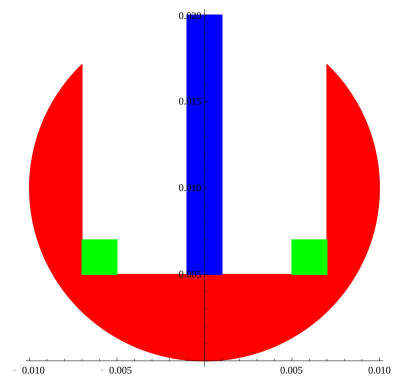
	基本ケース (0.00349 kg)	質量減(0.00213 kg)	
コマ支点及び重心の挙動			
	図 4.2-1	図 4.3.1-1A	

図4.1 の錘(右図の緑色部分)の密度を9 g/cm^3から 0g/cm^3 (即ち、錘部分が無い状態)に変更しました。これにより、以下の諸量が変化しました。

	基本(9 g/cm^3)	ケース1 (0 g/cm^3)
質量	3.49 g	2.13 g
重心位置(底面より)	7.36 mm	8.23 mm
軸に垂直な慣性モーメント Ima	1.264×10^{-7} kgm^2	9.667×10^{-8} kgm^2
軸廻り慣性モーメント Imc	1.681×10^{-7} kgm^2	1.179×10^{-7} kgm^2



4.3.1 ケース1 (質量(m_{top}) の影響) 続き

一番の変化は、慣性モーメント比 Ima/Imc です。基本ケースの0.752から0.820になっています。逆立ち判定条件では、条件を満足しませんでしたが、軸ベクトルのZ成分Kz の挙動(図4.3.1)を見ますと、基本ケースと同様逆立ちしています。このため、判定条件は参考情報と考えました。

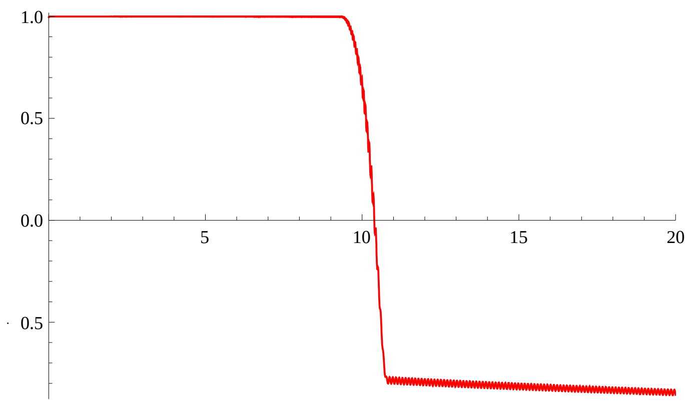


図 4.3.1 ケース1の軸ベクトルのZ成分Kz の変化

支点及び重心の軌跡を下図4.3.1-2A, 及び2Bに示します。7秒まで基本ケースと同様の挙動を示し、何のきっかけかは分りませんが、基本ケースでは右方向に移動して逆立ちしましたが、本ケースでは左方向へ移動して逆立ちして行きます。

本ケースでは質量の減少が小さいためか、基本ケースとの差はそれ程無いと考えられます。

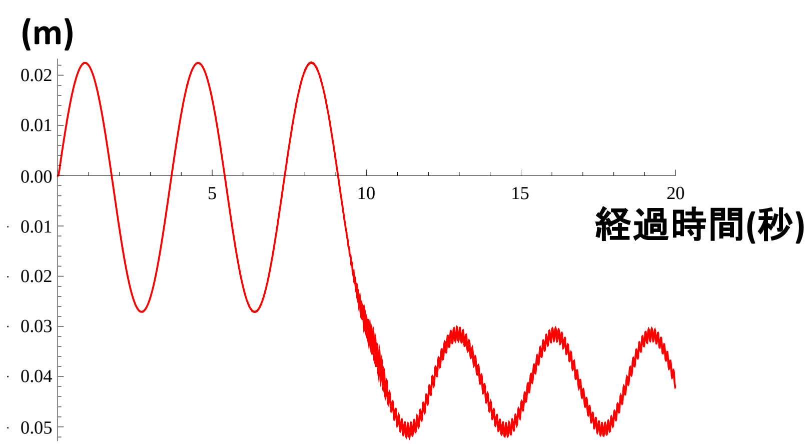


図 4.3.1-2A 支点Xの位置変化

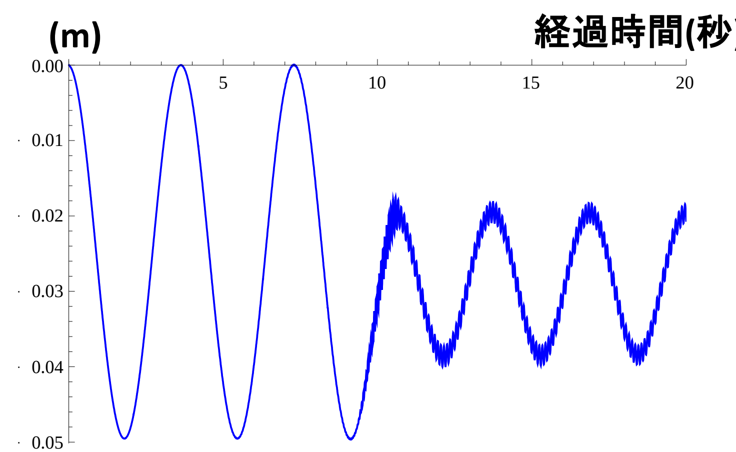
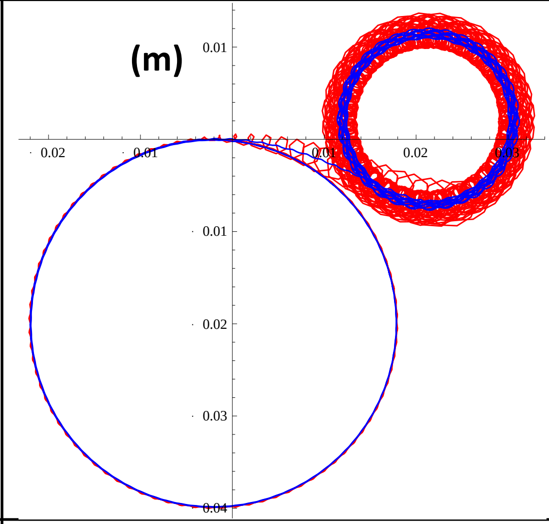
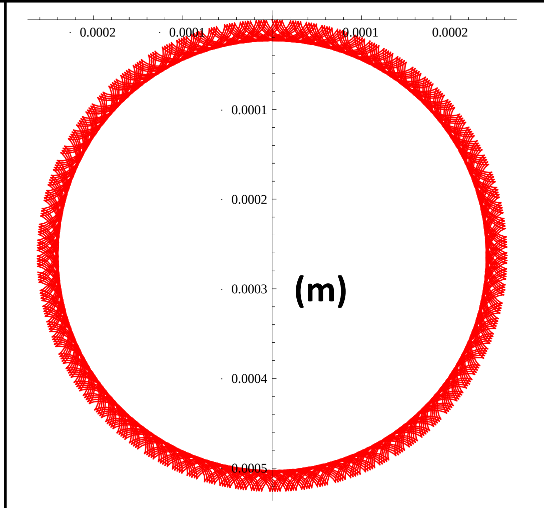
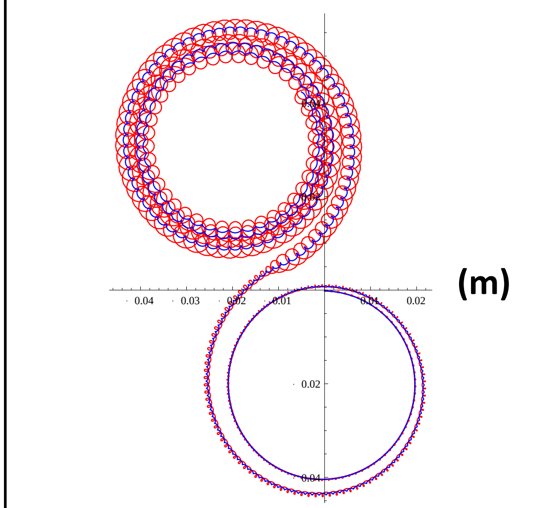


図 4.3.1-2B 支点Yの位置変化

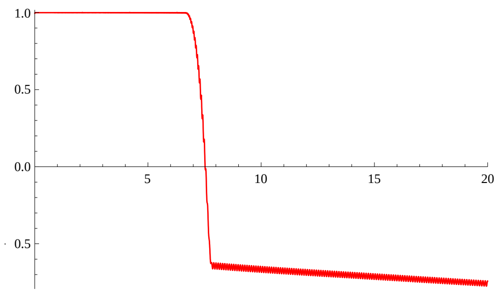
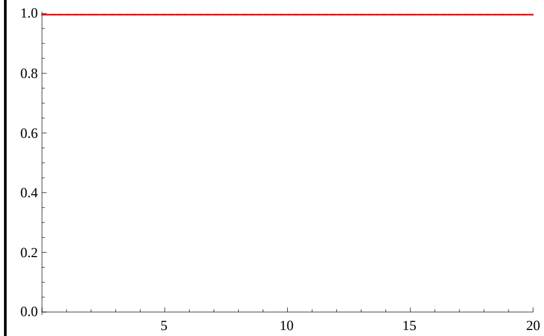
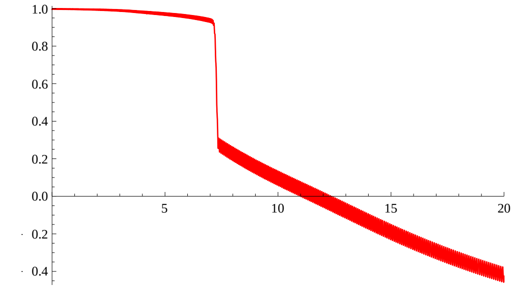
4.3.2 パラメータサーベイ ケース2 (摩擦係数 (μ) の影響)

	基本ケース (μ=0.1)	摩擦無し (μ= 0)	摩擦増 (μ= 0.6)
コマ支点及び重心の挙動			
	図 4.2-1	図 4.3.2-1A	図 4.3.2-2A

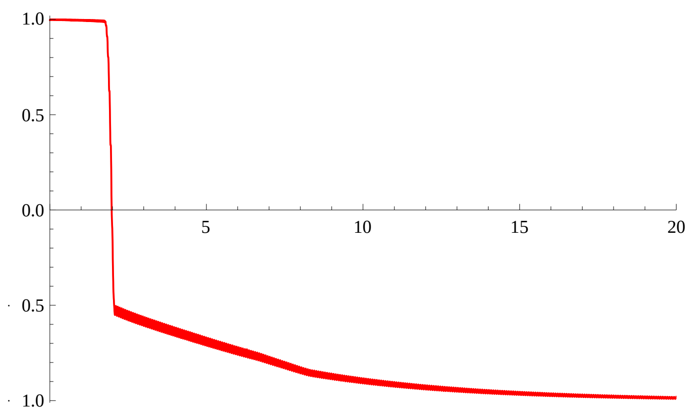
摩擦が無い場合、普通ゴマと同様、重心の移動が無く、支点のみの小円(基本ケースの1/100)を描く挙動となります。

一方、摩擦が0.6と増加した場合、初期は基本ケースと同様の挙動で大きな円を描きますが、その後は何が原因しているのか、見た目にも分る軌跡の変化となっています。但し、傾向は似ているものと思います。

4.3.2 パラメータサーベイ ケース2 (摩擦係数 (μ) の影響) 続き

	基本ケース (μ=0.1)	摩擦無し (μ= 0)	摩擦増 (μ= 0.6)
軸ベクトルのZ成分Kz			
	図 4.2-2	図 4.3.2-1B	図 4.3.2-2B

軸ベクトルのZ成分Kzの挙動を見ると、普通ゴマの摩擦無しのケースと同様、小刻みに上下に振動していることが分ります。時間的な減衰は有りません。

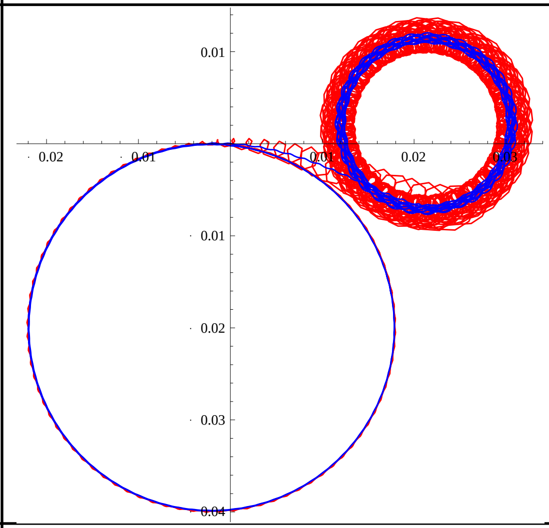
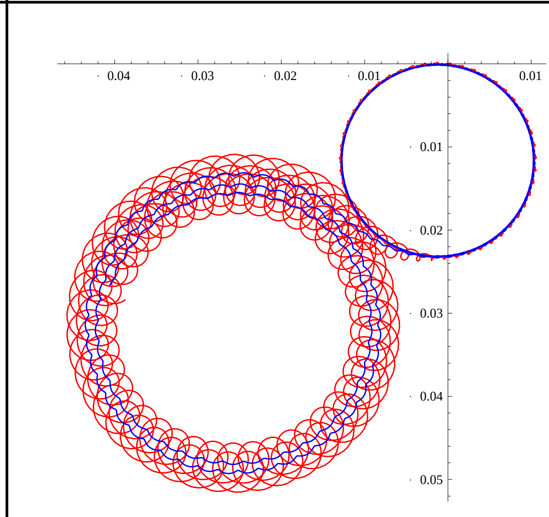
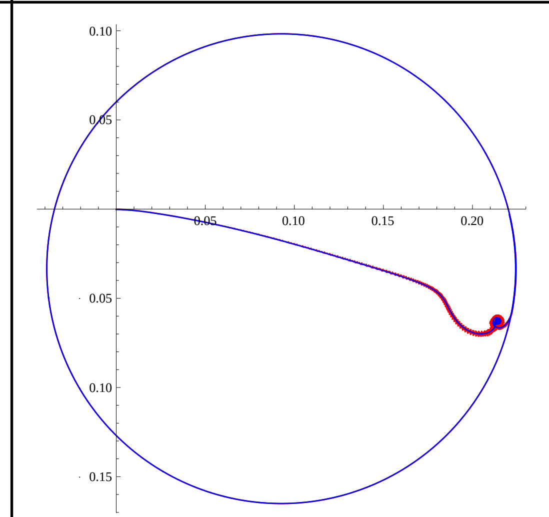
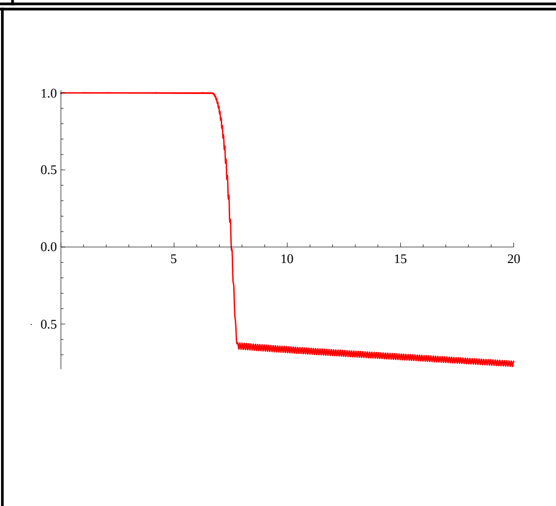
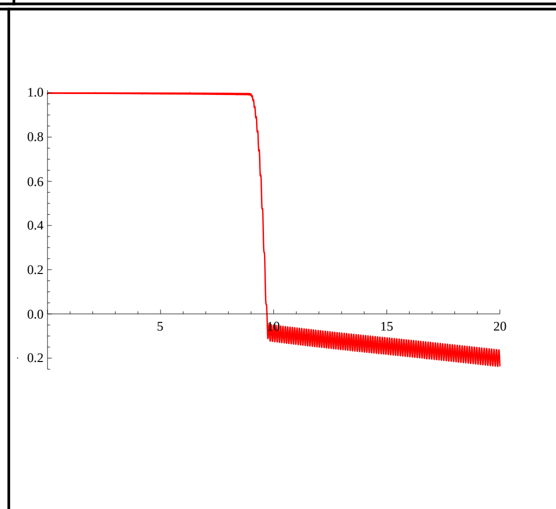
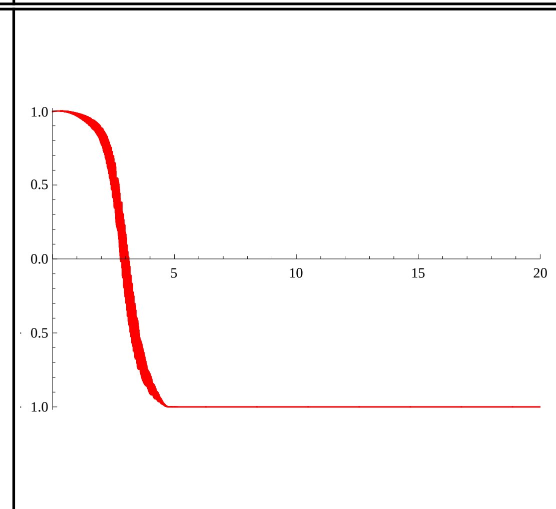


一方、摩擦が 0.6 と増加した場合、7秒から逆立ちの兆候を示しますが、回転速度が小さい(20 rps)ため緩慢に逆立ち行動を起します(図 4.3.2-2B)。

それでは回転数が大きくなれば直ぐに逆立ちするのかを確かめるため、μ=0.6、回転数=30 rps の場合の軸ベクトルのZ成分Kz の挙動を図4.3.2-2Cに示します。図より分る様に、回転数が十分であれば、10秒以内に完全に逆立ちすることが分ります。

図 4.3.2-2C μ=0.6、回転数=30 rps の軸ベクトルのZ成分Kz

4.3.3 パラメーターサーベイ ケース3 (回転数(tspn)の影響)

	基本ケース (tspn=20 rps)	回転数減(tspn= 15 rps)	回転数増(tspn= 100 rps)
コマ支点及び重心の挙動			
	図 4.2-1	図 4.3.3-1A	図 4.3.3-2A
軸ベクトルのZ成分Kz			
	図 4.2-2	図 4.3.3-1B	図 4.3.3-2B

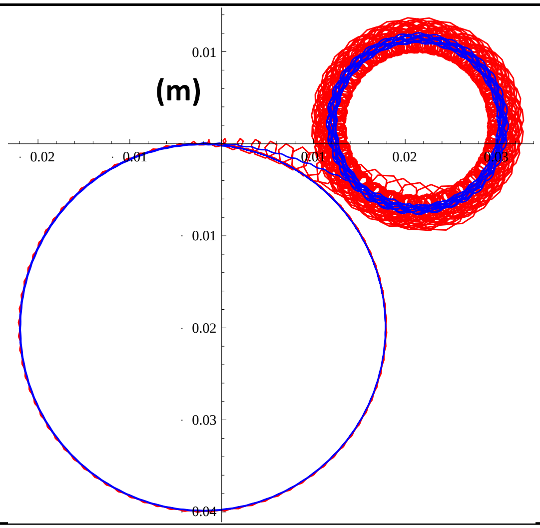
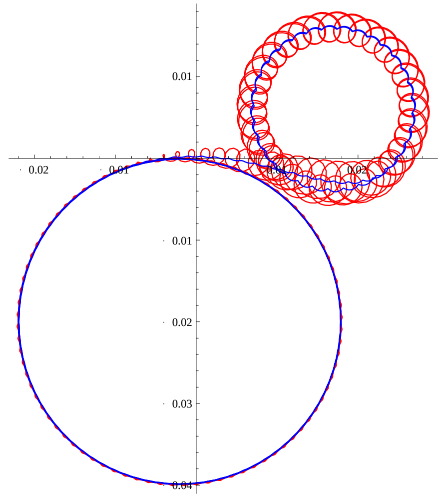
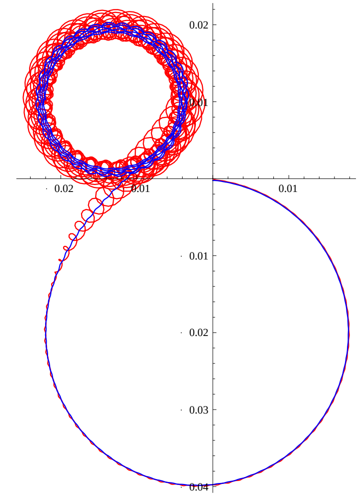
4.3.3 パラメータサーベイ ケース3 (回転数(tspn)の影響) 続き

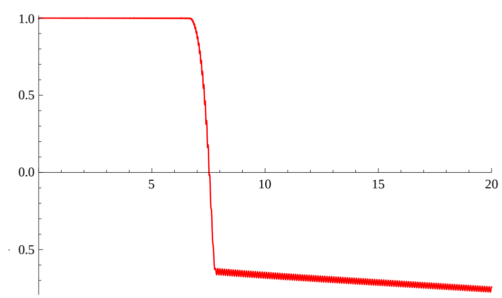
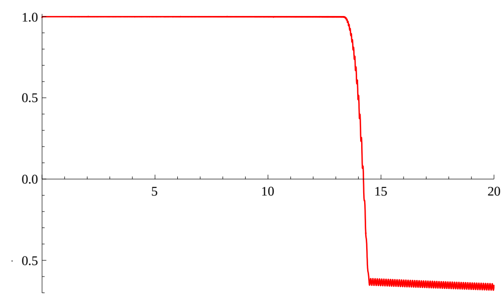
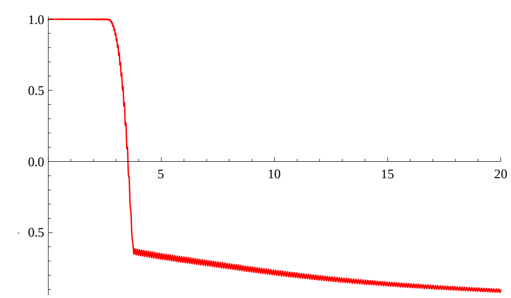
(1)逆立ちゴマの形状として球体を使用しました。このため、普通ゴマの様に転倒し、回転を停止するという事はないです。このため、回転数が減少しても増加しても、逆立ち挙動を取ることが軸ベクトルのZ成分Kz の挙動(図4.3.3-1B及び2B)から分ります。従って、本当に逆立ちしたか否かは、Kz 値が -0.9以下(対応極角155 度以上) である必要が有ると考えます。

(2)以上の観点から判断すると、基本ケース(tspn = 20 rps)、tspn = 15 rps 共にKz 値が -0.8 以上ですので、逆立ちは成立していないと判断されます。一方、回転数が100 rps の場合は - 0.9以下ですので、逆立ちしていると判断されます。

(3)支点及び重心の挙動に関しては、回転数が100 rps の場合、基本ケースに比べて回転半径が３～４倍程大きくなっています(図4.3.3-2A)。基本ケース及び tspn = 15 rps の場合、最初に大きな円を描きますが、回転数が100 rps の場合、前半には直線移動し、後半に大きな円を描いています。何故その様になるのかは、解明出来ません。

4.3.4 パラメータサーベイ ケース4 (計算時間幅(dt)の影響)

	基本ケース (dt=2x10^{-4}秒)	短い(dt=1x10^{-4}秒)	長い(dt=5x10^{-4}秒)
コマ支点及び重心の挙動			
	図 4.2-1	図 4.3.4-1A	図 4.3.4-2A

軸ベクトルのZ成分Kz			
	図 4.2-2	図 4.3.4-1B	図 4.3.4-2B

4.3.4 パラメータサーベイ ケース4 (計算時間幅(dt)の影響) 続き

(1)普通ゴマのパラメータサーベィ時と同じく、時間幅の変更により、支点、重心位置の軌跡が変わっています。特に軸ベクトルのZ成分の時間挙動を比較すると、何故に逆立ち開始時刻がこれ程までに違うのか分りません。

(2)使用している評価モデルが不十分であるのか、何故そうなるのか原因が分りません。

５．考察

今回、コマの挙動を解析するため、運動方程式を検討し、パラメータサーベィをしました。その結果、以下の知見を得ました。

(1) コマの挙動に関し、関連の資料を調べ、運動方程式を作成しました。それを用い普通ゴマ及び逆立ちゴマに適用し、支点・重心位置、軸ベクトル、回転エネルギー、位置エネルギー等の挙動を把握しました。

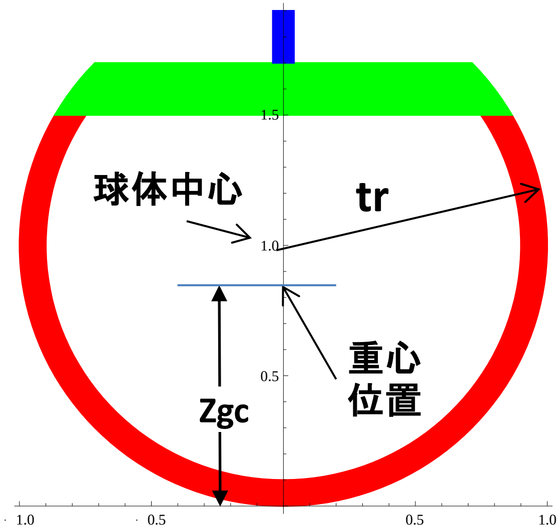
(2) 普通ゴマに関しては回転数が上がればコマは安定回転することが分ります。軸先端の細さについて、一般的には細いほど倒れ易くなりますが、回転数を上げることにより安定回転することが分ります。

(3) 逆立ちゴマに関しては、球体形状を用いているため、普通ゴマの様に転倒し、回転を停止するという事はないです。このため、回転数が減少しても増加しても、逆立ち挙動を取ることが軸ベクトルのZ成分Kz の挙動から分ります。従って、本当に逆立ちしたか否かは、Kz 値が - 0.9以下(対応極角155 度以上) である必要が有ると考えます。

(4) 計算時間幅を変更すると、普通ゴマ及び逆立ちゴマ共に挙動が変わります。使用している評価モデルが不十分であるのか、何故そうなるのか原因が分りません。

参考1　逆立ちゴマの逆立ち可能性の判定式

上記に関して、雑誌「数理科学」 No. 211、1981年１月号　(サイエンス社)に「特集こま･コマ･独楽」が組まれており、その中で東北大学の酒井高男教授が「逆立ちごま」を投稿し、判定式について説明しています。判定式は以下で与えられるものです。(詳細は上記資料を参照下さい。)



参図1　逆立ちゴマ断面図

逆立ちゴマの断面を参図1に再掲します。
慣性モーメント比　(ima/imc) が式(a.1)を満たす場合、逆立ち可能であると目されます。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left| \frac{\text{球体中心と重心間距離}}{\text{球体半径}} \right| = \left| \frac{\mathrm{tr} - \mathrm{zgc}}{\mathrm{tr}} \right|$$

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon} < \frac{\mathrm{ima}}{\mathrm{imc}} < \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{...(a.1)}$$

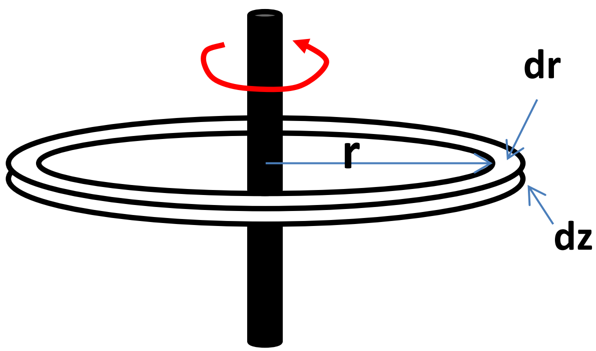
ここに、

tr　：　球体の半径
zgc：　底面から重心までの距離
ima：　軸に垂直な重心廻りの慣性モーメント
imc　：　軸廻りの慣性モーメント

参考２　慣性モーメントima, imcの算出

コマの挙動を解析するには、軸廻りの慣性モーメントimc及び軸に垂直な重心廻りの慣性モーメントimaを設定することが必要です。ここでは、本資料で用いた算出方法について説明致します。

1.　軸廻り慣性モーメント imc　の算出



参図２　普通ゴマのイメージ

参図2の様な半径 r , 幅 dr ,厚さ dz, 密度ρ の微小円盤が有るとし、その質量をdm　とすると、軸廻りの微小慣性モーメント dimc　は以下で与えられます。

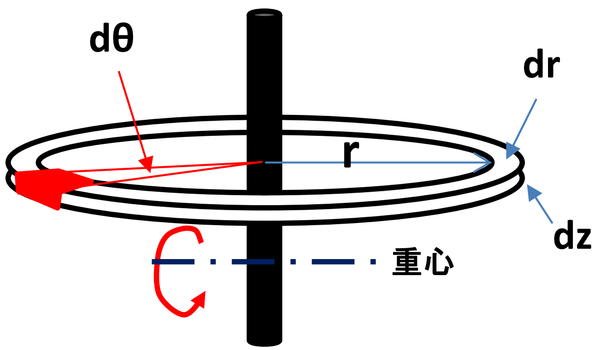
$$\begin{aligned} \mathrm{dimc} &= 2\pi r \cdot dr \cdot \mathrm{dz} \cdot \rho \cdot r^2 \\ &= \mathrm{dm} \cdot r^2 \end{aligned} \qquad \text{…(a.2)}$$

円盤の最終形態として中空円筒とし、外半径 r1， 内半径 r2
円筒の底部位置をL1 、上部位置をL2としますと、全体のimc は、円筒空間で積分する事により、以下の様に求められます。

$$\begin{aligned} \mathrm{imc} &= \iint \mathrm{dimc} = 2\pi\rho \int_{L1}^{L2} \int_{r2}^{r1} r^3 \cdot dr \cdot \mathrm{dz} \\ &= \frac{\pi\rho}{2}(L2 - L1)({r_1}^4 - {r_2}^4) = \frac{\pi\rho}{2}(L2 - L1)({r_1}^2 - {r_2}^2)({r_1}^2 + {r_2}^2) \\ &= \frac{m}{2}({r_1}^2 + {r_2}^2) \end{aligned} \qquad \text{…(a.3)}$$

ここに、m：円筒の質量 ＝ $\pi\rho(L2 - L1)({r_1}^2 - {r_2}^2)$

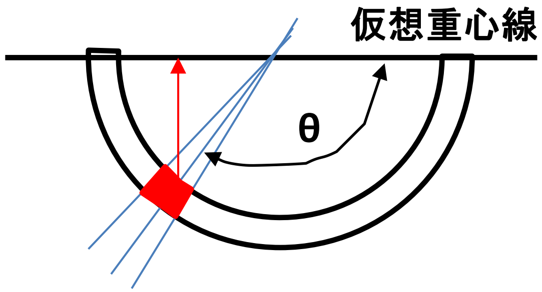
2. 軸に垂直な重心廻りの慣性モーメント ima の算出



参図3 ima説明図1

参図3の様な半径 r , 幅 dr ,厚さ dz, 密度ρ， 微小角度dθ の微小円盤が有るとすると、赤色部分の面積 ds , 体積dv , 質量dm は以下で与えられます。

$$
\begin{aligned}
ds &= \frac{1}{2}[(r+dr)^2 - r^2dr]d\theta \cong rdrd\theta \\
dv &= rdrd\theta dz \\
dm &= \rho\, dv = \rho\, rdrd\theta dz
\end{aligned}
\quad \text{...(a.4)}
$$



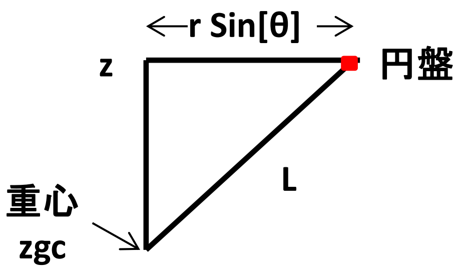
参図4 上から見た図

参図3を上から見た図を参図4に示します。軸中心で重心を通る線を仮想重心線とし、X軸とします(Y軸も同様です)。

Z方向の重心位置をzgc、対象円盤の位置をz とし、円盤の内半径 r2, 外半径 r1, 底部位置をL1, 上部位置をL2とします。

赤色部分の仮想重心線までの距離をLとしますと、以下となります(参図5参照)。

$$L^2 = (z\text{-}zgc)^2 + (r\,\mathrm{Sin}[\theta])^2 \quad \text{...(a.5)}$$



参図5 横から見た図

赤色部分の微小慣性モーメントを dima とすると、全体の ima は全体積に亘り積分する事により以下の様に得られます。

$$dima = dm \cdot L^2 \quad \text{...(a.6)}$$

2. 軸に垂直な重心廻りの慣性モーメント ima の算出 続き

$$\mathrm{ima}=\iiint \mathrm{dima}=\iiint \mathrm{dm}\cdot L^2=\iiint \rho r dr dz d\theta[(rSin[\theta])^2+(z-zgc)^2]$$

$$=\rho\pi\iint[r^3+2r(z-zgc)^2]\mathrm{drdz}$$

$$=\rho\pi\{\frac{1}{4}(L_2-L_1)(r_1{}^2-r_2{}^2)(r_1{}^2+r_2{}^2)+\frac{1}{3}(r_1{}^2-r_2{}^2)[(\mathrm{L}_2\text{-zgc})^3-(\mathrm{L}_1\text{-zgc})^3]\}$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{m}(r_1{}^2+r_2{}^2)+\frac{1}{3}\mathrm{m}[(\mathrm{L}_2\text{-zgc})^2+(\mathrm{L}_1\text{-zgc})^2+(\mathrm{L}_2\text{-zgc})(\mathrm{L}_1\text{-zgc})]$$

…(a.7)

$$=\frac{1}{2}\mathrm{imc}+\frac{1}{3}\mathrm{m}[(\mathrm{L}_2\text{-zgc})^2+(\mathrm{L}_1\text{-zgc})^2+(\mathrm{L}_2\text{-zgc})(\mathrm{L}_1\text{-zgc})]$$

ここに、m：円筒の質量

参考3　ルンゲ･カッタ法(Runge･Kutta　Method)の導入

従来、弾道問題や振り子の問題では、連立微分方程式を解法するのにMathematicaの解析ソルバーNDSolveを用いて解を得ました。しかし、今回、変数が多いためかNDSolveを用いて解を得ようと努力しましたが、上手く行きませんでした。

このため、ルンゲ･カッタ法(Runge･Kutta　Method：ルンゲ･クッタ法とも言います)を用いました。

ルンゲ･カッタ法は、数値解析において微分方程式の初期値問題に対して近似解を与える一連の方法で1900年頃にドイツの数学者Carl David Runge とポーランド生まれのドイツの数学者Martin Wilhelm Kuttaによって発展されたものです。

「数値解析の基礎」(川崎晴久、1993年5月、共立出版)より、簡単にルンゲ･カッタ法について説明致します。ご存知の方はスキップして下さい。(内容、式は同著より一部修正して引用しました。)

1個の独立変数 x とその関数 y(x) に関する1階常微分方程式

$$y' = f(x,\ y) \qquad (9.1)$$

が与えられたとき，初期値

$$y(x_o) = y_o \qquad (9.2)$$

を満たす区間$[x_o,\ x_n]$における y(x) の関数値を数値的に求める問題を考える.

区間$[x_o, x_n]$をx_o，x_1，x_2，…，x_n と等間隔 $h = (x_n - x_o)/n$にn分割し，各区間において式(9.1)を積分すると

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int f(x,y)dx \qquad (9.3)$$

となる.したがって，初期値問題は上式の右辺の第2項をできる限り精度よく計算する問題とみることができる. 関数の値$y(x_i)$の数値解をy_iとし，上式の右辺第2項をx_i，y_i，h から求め

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h) \qquad (9.4)$$

の公式で計算する方法を1段法という。ここで，X座標の間隔 h をきざみ幅または進み幅という。関数$\phi(x_i, y_i, h)$ は増分間数といい，f のみに関係する関数である。この増分関数を$Y(X_i + h)$のm次までのテーラー展開と一致させるように設定すると，精度のよい計算が可能になるといえる。m =1 のときはオイラー(Euler) 法，m=2のときが修正オイラー法，m = 4 のときルンゲ・クッタ(Runge-Kutta) 法と呼ばれる。最もよく用いられるものの1つで次の公式で、計算する.

$$y_{i+1} = y_i + 1/6(k1 + 2k2 + 2k3 + k4) \qquad (9.14)$$

ただし，

$$\begin{aligned} k1 &= hf(x_i, y_i) \\ k2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k1/2) \\ k3 &= hf(x_i + h/2, y_i + k2/2) \\ k4 &= hf(x_i + h, y_i + k3) \end{aligned} \qquad (9.15)$$

打切り誤差は$O(h^5)$ となる。この方法は，f (x，y)を4回計算する必要があるが，計算精度がよいことから広く用いられている。