ゴム風船の検討

（大きい風船と小さい風船を連結した場合、
何故大きな風船は更に大きくなるのだろう）

2018(平成30).09.25

菅原　政治郎

1.　背景

図１の様に、同じ材質で出来た大小のゴム風船(空気を入れて膨らまします。)を中間にコックの有る連結管で繋ぎ、コックを開くと、大きな風船は更に大きく、小さな風船は更に小さくなります。

一見すると、大きな風船は小さく、小さな風船は大きくなって、平衡状態になるのではないかと思いますが、そうではないのです。何故なのかを検討して見ましょう。

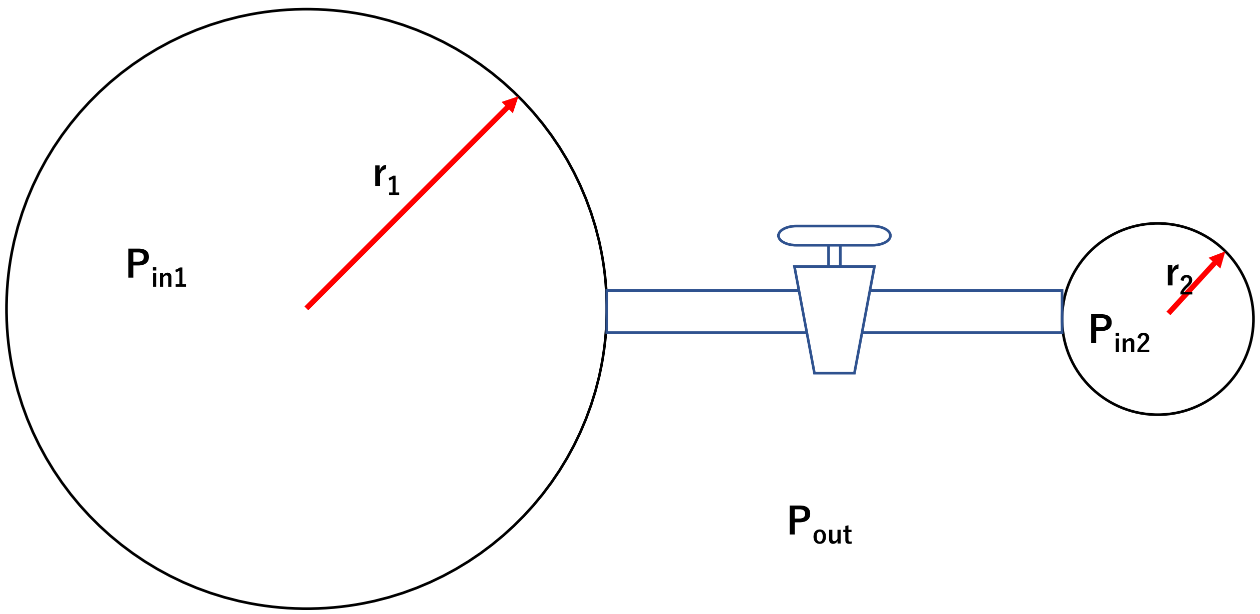

図1　大きい風船と小さな風船

ここに、

P_{out} ：大気圧
P_{in} ：内部圧力
r ：風船の半径

2.　定量的検討

2.1　仮定

(1)ゴム風船は製品により、長細いものや丸いものが有りますが、本資料では、丸いものとします。

(2) 風船は息(空気)を入れると球形に膨らむものとします。

(3)風船が膨らむ場合、厚さが一様に膨らむものとし、厚さにムラが無いものとします。

(4)風船のゴム体積は初期と伸びた状態で同一とします。即ち、体積は一定ですので、初期の厚さが一番厚く、最終伸びた状態が一番薄いとします。

2.2　薄膜モデルの周方向応力等

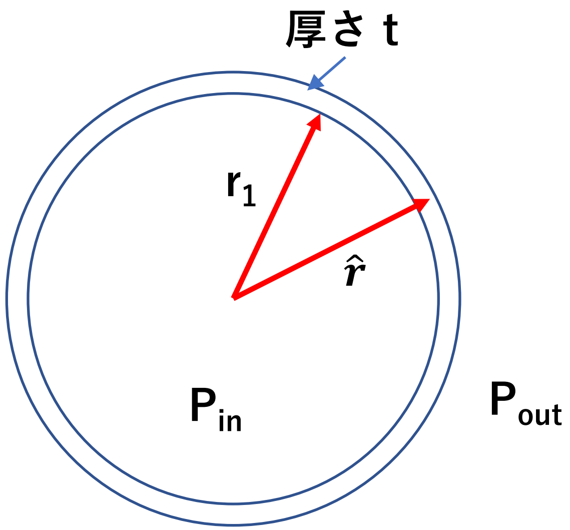

図2.1　風船の内圧、応力σ_T等の関係

(1)「材料力学演習500題」(昭和60年5月、沖島喜八)によれば、球形の平均半径をr、風船の肉厚をt としますと(図2.1)、その時に風船の受ける周方向応力σ_t及び周方向歪みε_tは以下で与えられます。(その他の記号は図1と同じです。)

$$\sigma_t = \frac{r_1 \cdot (P_{in} - P_{out})}{2t} \qquad (2.1)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \qquad (2.2)$$

ここに、
m: ポアソン数 ＝ 1/ν、 ν : ポアソン比
E : ヤング率
t ：風船の肉厚
r_1: 風船の内半径
$\hat{r}$: 風船の平均半径($= r_1 + t/2$)

(2) 式(2.2)の周方向歪みε_tを用いた周方向の伸びをE_Lとすると、 E_Lは以下の様に求められます。但し、初期のゴム半径(内半径)をr_0とします。

$$E_L = 2\pi r_1、\quad \varepsilon_t = \frac{E_L - 2\pi r_0}{2\pi r_0} \quad \Rightarrow \quad E_L = 2\pi r_0(1 + \varepsilon_t) \qquad (2.3)$$

2.2　薄膜モデルの周方向応力等（続き）

(3)また、前述の仮定(4)により、平均半径$\hat{r}$、内半径r_1、肉厚t、ゴム体積Vrubの関係は以下の様になります。尚、初期値を示す接尾語を0とします。

$$Vrub_0=4\pi r_0^2 t_0、\quad Vrub=4\pi r_1^2 t \quad \Rightarrow \quad t=t_0\cdot(r_0/r_1)^2$$
$$\hat{r}=r_1+t/2 \tag{2.4}$$

ここに、
t_0: 風船の初期ゴム厚　（不変）
r_0: 風船の初期内半径　　（不変）

2.3　薄膜モデルによる風船の内圧の求め方-繰返し計算法

①一定量の空気Δvolを風船に注入します。この時、対応モル数をΔmolとします。 Δvolを注入することにより、内圧が暫定Pになりますが、Pが設定されれば、理想気体の式(PV= nRT)から、暫定体積Vが求まります。この時、風船内のモル数は、初期モル数mol0+ Δmol* i となります。(iは、i 回目の空気注入を示します)　初期段階では、Pを適当に設定します。

$$V = (mol0 + \Delta mol)RT/P \qquad (2.5)$$

ここに、
R:ガス定数(=8.31446 J/mol/k)、T:絶対温度で表した風船内の温度 (K)
P:風船の内圧 (Pa)

②暫定体積Vから内半径r_1が求まり、これに伴い、式(2.4)よりゴム厚さt及び周方向長さdLが求まります。これにより式(2.1)より自動的に周方向応力σ_tが得られます。また、式(2.2)より周方向歪みε_tが得られます。

$$V = 4\pi r_1^3/3 \Rightarrow \quad r_1 = (3V/4\pi)^{1/3}、\quad t = t_0 \cdot (r_0/r_1)^2$$

$$dL = 2\pi r_1 \qquad (2.6)$$

2.3　薄膜モデルによる風船の内圧の求め方-繰返し計算法(続き)

③周方向長さdLと応力から求めた周方向長さE_Lが等しければ、暫定内圧Pの推定が正しいとなります。判定値をjdg とし、 jdg を以下と定義します。

$$jdg = |(dL - E_L) / E_L| \qquad (2.7)$$

ここに、
| |: 絶対値記号。　例：|-3|⇒3です。

上記 jdg が収束値 ε 以下になれば、計算された暫定内圧P (= Pin)は正しいものとします。収束値 ε は10^{-6} に取敢えず設定しています。

④上記③に於いて内圧Pが一度で設定終了することは有りません。このため、①～③の繰り返し計算により内圧Pを設定します。

⑤上記①～④の作業を必要モル数だけ計算します。

⑥　以上説明した繰返し計算法の流れが以下の図2.2です。

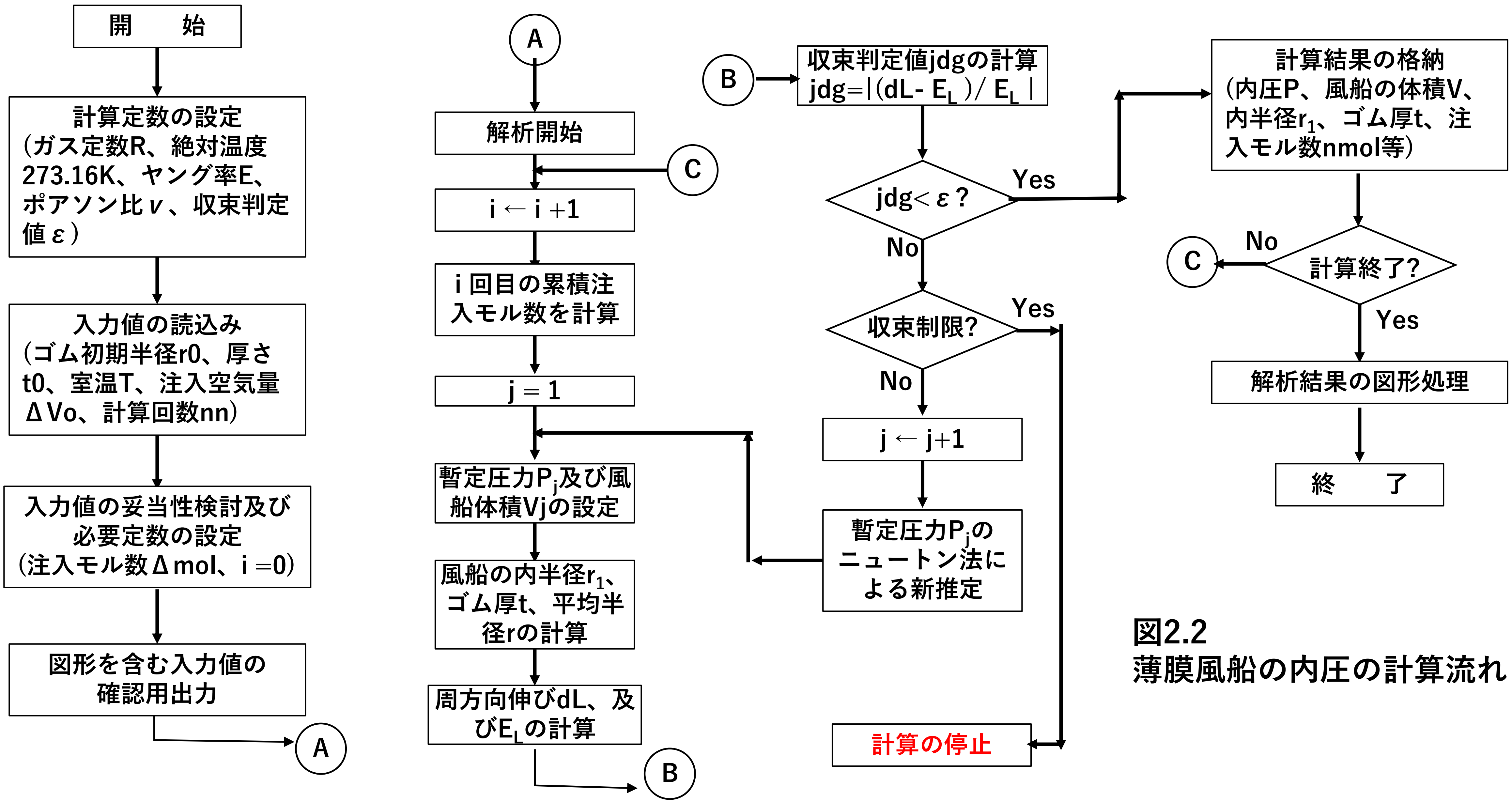

図2.2
薄膜風船の内圧の計算流れ

2.4　薄膜モデルによる風船の内圧の求め方-直接計算法

2.3節では繰返し法により内圧を求める方法を検討しました。繰返し法によらない内圧推定法は無いものかと友人の物部理(もののべおさむ)氏に相談したところ、以下の方法を提供してくれました。

①先ず、半径比λ ($=r_1/r_0$)をパラメータとし、内半径r_1を設定します。これにより、ゴム厚t、風船の体積V及び風船の周方向長さE_Lが以下の様に求まります。尚、歪みε_tについては、 式(2.2)で与えられるものです。

$$V = 4\pi r_1^3/3 \Rightarrow \quad t = t_0 \cdot (r_0/r_1)^2、\quad E_L = 2\pi r_1$$
$$\varepsilon_t = \frac{E_L - 2\pi r_0}{2\pi r_0} \tag{2.8}$$

②式(2.8)より歪みε_tが求まれば、式(2.2)に代入することにより、周方向応力σ_tが得られます。このσ_tを式(2.1)に代入することにより、内圧P_{in}が以下の様に求められます。

$$P_{in} = P_{out} + \frac{2E}{(1-\frac{1}{m})}\frac{t_0}{r_0}\frac{1}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) \tag{2.9}$$

2.5　厚膜モデルの周方向応力等

2.3節と同様に、「材料力学演習500題」(昭和60年5月、沖島喜八)を用い、厚膜球形の中心からの距離をr、風船の肉厚をt としますと、その時に風船の受ける径方向応力 σ_r、周方向応力 σ_t及び周方向歪み ε_tは以下で与えられます。(記述無きものは前節までと同じです。)

$$\sigma_r = \frac{(p_{in} - p_{out}) r_{in}{}^3 r_{out}{}^3}{r^3 (r_{out}{}^3 - r_{in}{}^3)} - \frac{p_{in} r_{in}{}^3 - p_{out} r_{out}{}^3}{r_{out}{}^3 - r_{in}{}^3} \tag{2.10}$$

$$\sigma_t = \frac{(p_{in} - p_{out}) r_{in}{}^3 r_{out}{}^3}{2r^3 (r_{out}{}^3 - r_{in}{}^3)} + \frac{p_{in} r_{in}{}^3 - p_{out} r_{out}{}^3}{r_{out}{}^3 - r_{in}{}^3} \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{\sigma_t - \sigma_r}{m}\right) \tag{2.12}$$

上式を用い、2.3節と同様に風船の内圧を求めます。

2.6　薄膜モデルの径方向応力について

材料力学の本には、一般に薄膜の径方向応力の式は記載が有りません。このため、薄膜の場合は径方向の応力は無いのかと思っていましたが、物部理氏の指摘を受け、どうもそれは誤解の様です。

それではどの様になるのでしょうか。厚膜モデルを用い、膜厚 t が小さい場合を薄膜の応力と考え、どの様になるかを検討して見ましょう。式(2.10)を再掲します。

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{r}} = \frac{(\boldsymbol{p_{in}} - \boldsymbol{p_{out}})\boldsymbol{r_{in}}^3\boldsymbol{r_{out}}^3}{\boldsymbol{r}^3(\boldsymbol{r_{out}}^3 - \boldsymbol{r_{in}}^3)} - \frac{\boldsymbol{p_{in}}\boldsymbol{r_{in}}^3 - \boldsymbol{p_{out}}\boldsymbol{r_{out}}^3}{\boldsymbol{r_{out}}^3 - \boldsymbol{r_{in}}^3} \tag{2.10}$$

上式において、以下の様に近似します。

$$\boldsymbol{r_{in}}^3 = \left(\hat{\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{t}}{2}\right)^3 = \hat{\boldsymbol{r}}^3(\mathbf{1} - \mathbf{3/2}(\mathbf{t}/\hat{\boldsymbol{r}}))\text{、}\quad \boldsymbol{r_{out}}^3 = \left(\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{t}}{2}\right)^3 = \hat{\boldsymbol{r}}^3\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{t}}{\hat{r}}\right)\right) \tag{2.14}$$
$$\boldsymbol{r_{in}}\boldsymbol{r_{out}} = \hat{\boldsymbol{r}}^2 \quad\text{、}\quad \boldsymbol{r_{out}}^3 - \boldsymbol{r_{in}}^3 = \mathbf{3\,t}\,\hat{\boldsymbol{r}}^2$$

式(2.14)を式(2.10) に代入すると、以下を得ます。

2.6　薄膜モデルの径方向応力について　（続き）

$$\sigma_r = \frac{(p_{in} - p_{out}) r_{in}{}^3 r_{out}{}^3}{\hat{r}^3 (r_{out}{}^3 - r_{in}{}^3)} - \frac{p_{in} r_{in}{}^3 - p_{out} r_{out}{}^3}{r_{out}{}^3 - r_{in}{}^3} \tag{2.15}$$

$$= \frac{(p_{in} - p_{out})\hat{r}}{3t} - \left[\frac{(p_{in} - p_{out})\hat{r}}{3t} - \frac{(p_{in} + p_{out})}{2}\right] = \frac{(p_{in} + p_{out})}{2}$$

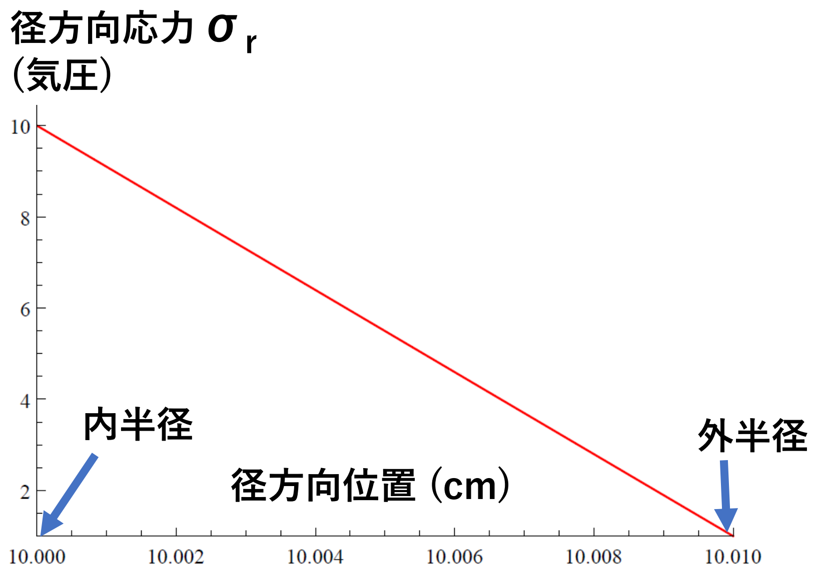

図2.3　径方向応力 σ_r 対半径位置

上式より分かる様に、薄膜では径方向応力 σ_r は厚さtに無関係で、平均半径位置 $\hat{r}$ で、径方向応力 σ_r は内圧と外圧の平均となります。

左の図2.3は、内圧10気圧、外圧1気圧で、内半径10cm、膜厚0.1mmの場合のゴム径方向の応力 σ_r の分布を示したものです。

径方向位置に対する径方向応力 σ_r は直線的に変化し、内半径位置で最大、外半径位置で最小となることが分かります。

2.6　薄膜モデルの径方向応力について　（続き）

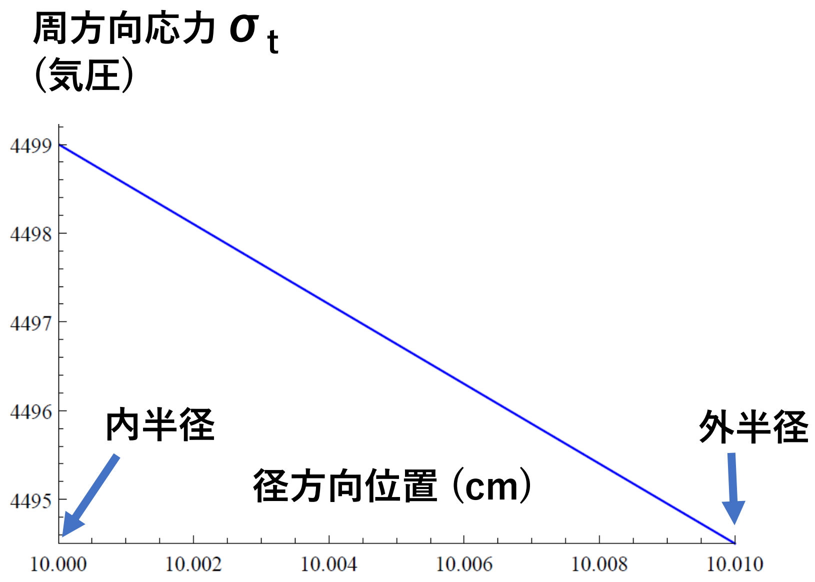

図2.4　周方向応力 σ_t 対半径位置

左の図2.4は、図2.3と同じ条件の場合(内圧10気圧、外圧1気圧で、内半径10cm、膜厚0.1mm)の周方向の応力 σ_t の分布を示したものです。

周方向応力は径方向応力分布と同様、内半径位置で最大、外半径位置で最小となることが分かります。

ちなみに、式(2.15)で与えられる応力 σ_r はゴム厚 t には無関係ですが、式(2.1)で与えられる周方向応力 σ_t は、厚さtに敏感で、薄ければ薄いほど、応力 σ_t が極端に大きくなりますので設計に当たっては注意が必要です。

3.　ゴム風船への応用

3.1　実験データの検討

インターネットで検索したところ、日本物理教育学会に投稿され、昭和55年11月18日受理の電気通信大学の「ゴム風船の力学実験」(安達健 et.al)の資料を入手しました。これによると、半径比λと風船内外の圧力差(図1)、半径比λとpr/2の関係(図2)、半径比λとpr/2d_0の関係(図3)が以下の様に掲載されています。尚、d_0はゴム初期厚さで、本文のt_0になります。

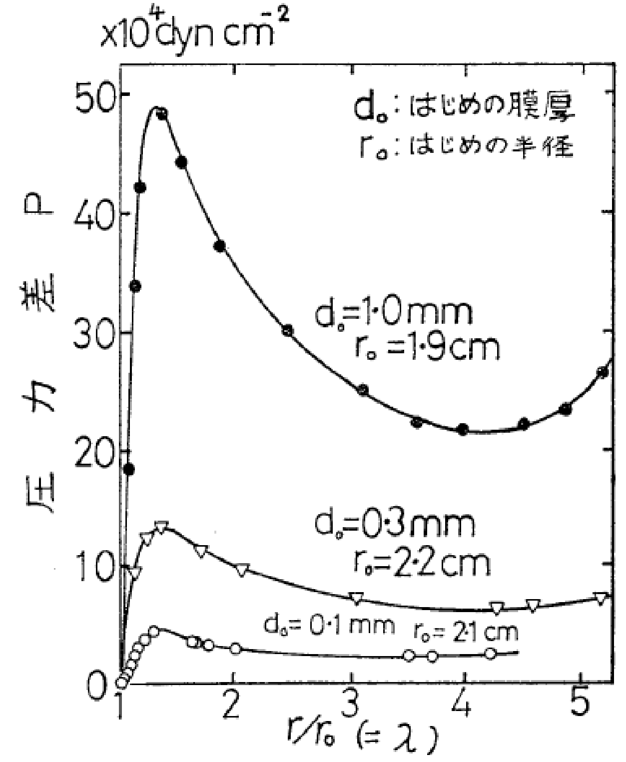

図 1

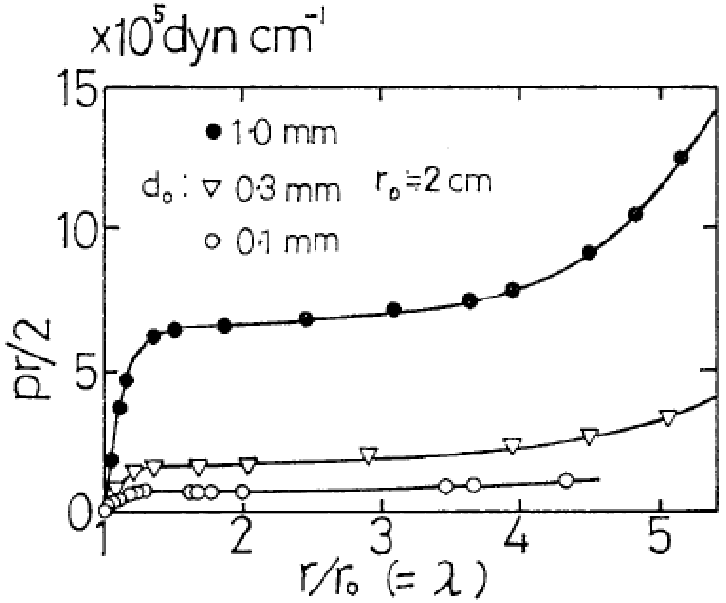

図 2

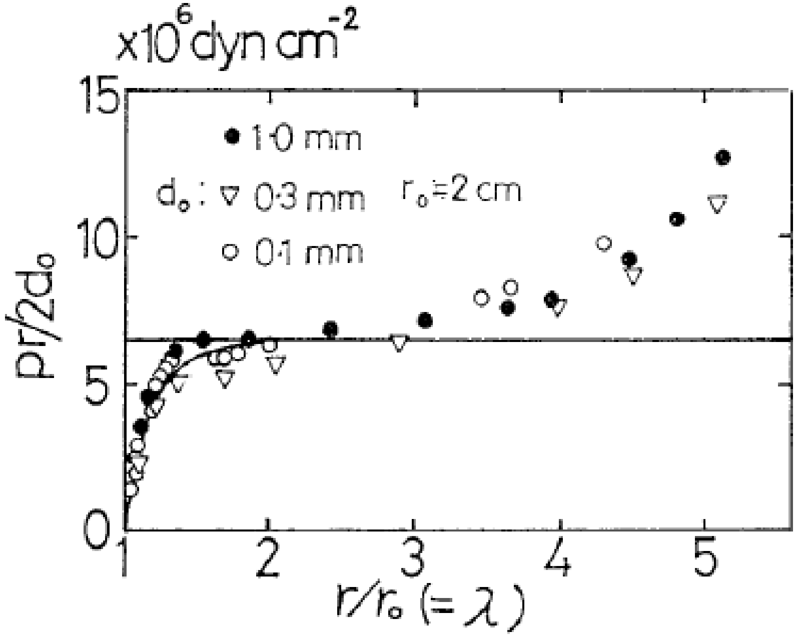

図 3

3.1　実験データの検討　（続き）

(1)著者らは実験の結果、ゴムの弾性係数は、2< λ < 3 の範囲で (6.5 ± 0.5) x 10^6 dyn/cm^2であろうと推定しています。ちなみに彼らが参照している理科年表では、剛性 (5～15) x 10^6 dyn/cm^2、ヤング率は、（15～50) x 10^6 dyn/cm^2との記述が有りました。(何年度版で有るかは不明)

(2)平成29年版(2017)の理科年表には残念なことに、ゴムの弾性係数やヤング率は記載されておりません。このため、昭和62年版(1987)の理科年表で見たところ、弾性ゴムのヤング率 (1.5～5.0) x 10^6 Pa (=N/m^2) 、ポアソン比 0.46 - 0.49 の数値を得ました。

3.2　ゴム風船への応用(薄膜モデル使用)

3.2.1　入力条件

前述の実験結果と比較する目的も兼ねて、ゴム初期半径、ゴム厚を同じにしました。ヤング率については、内圧がほぼ同じになる値を設定しました。
以下にデータを示します。

(1) ゴム風船の初期半径 r_0= 1.9 cm、
(2) ゴム厚 t_0= 1mm、
(3) 初期体積 V0=$2.873*10^{-5}$ m^3、
(4) 初期モル数=0.001282モル、
(5) 室温=0℃、
(6) 空気注入量=25mL、対応モル数=$1.11534*10^{-3}$、
(7) ゴムヤング率=$1.62*10^6$ Pa、
(8) ポアソン数=2.12766　(ポアソン比= 0.47)、
(9) 気体定数　R= 8.31445 J/mol/K、
(10)計算回数 n= 300、
(11)収束制限回数 j = 20

3.2.2　薄膜ゴム風船の結果　（赤：繰返し法、青：直接法）

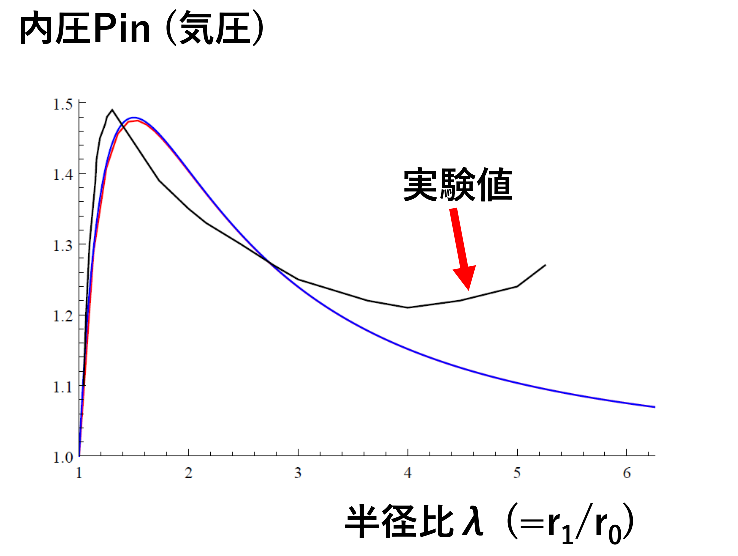

図3.2.1　半径比λ対内圧図

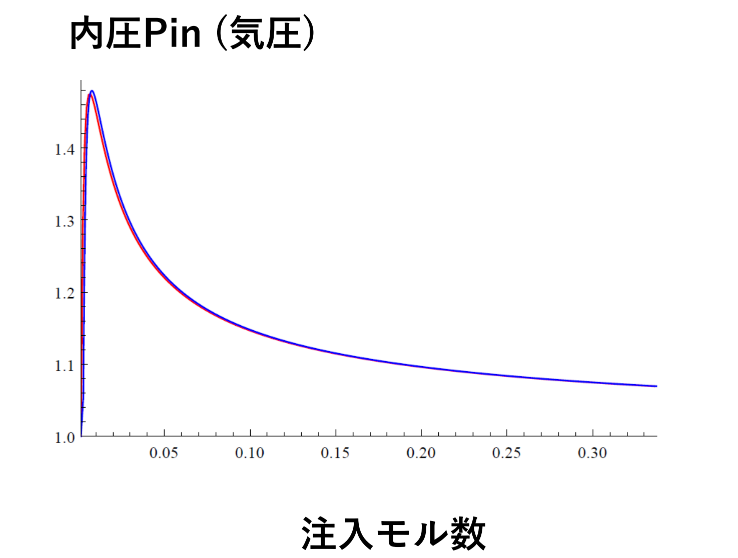

図3.2.2　注入モル数対内圧図

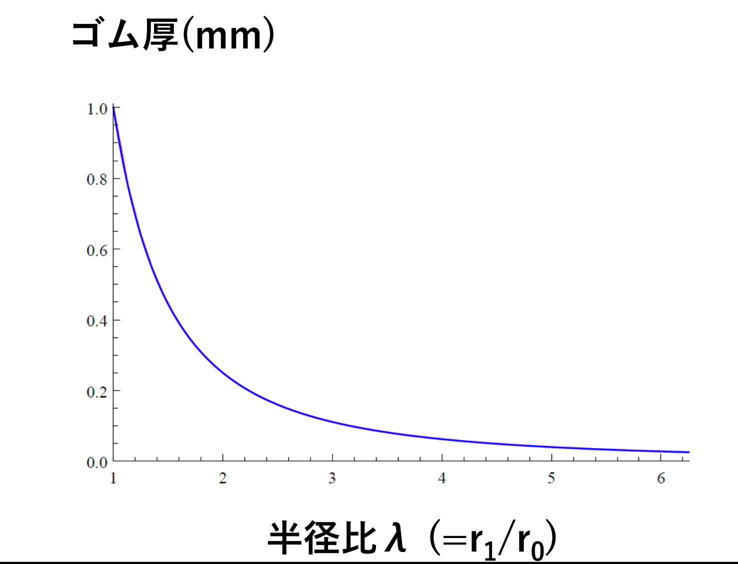

図3.2.3　半径比λ対ゴム厚図

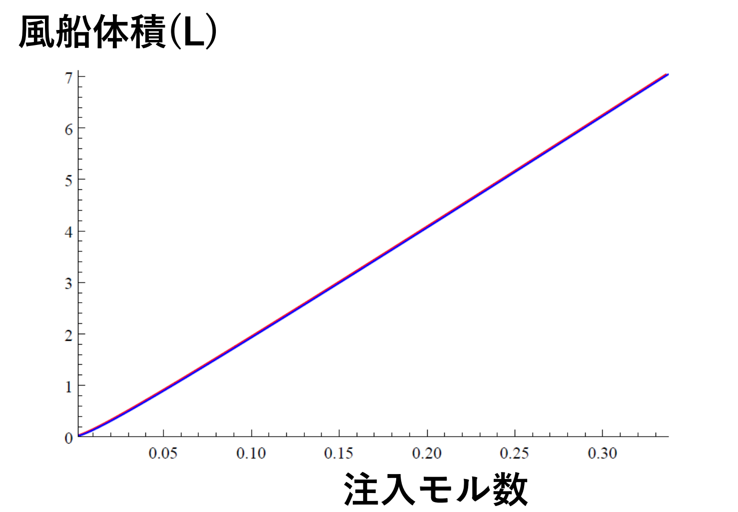

図3.2.4　注入モル数対風船体積図

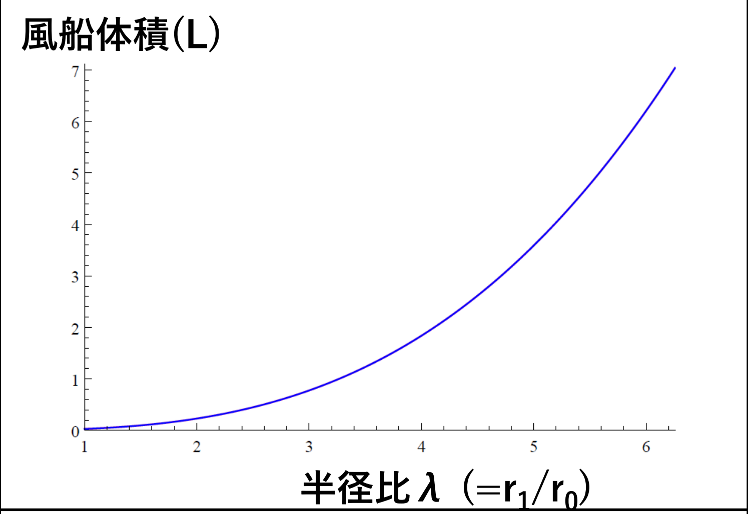

図3.2.5　半径比λ対風船体積図

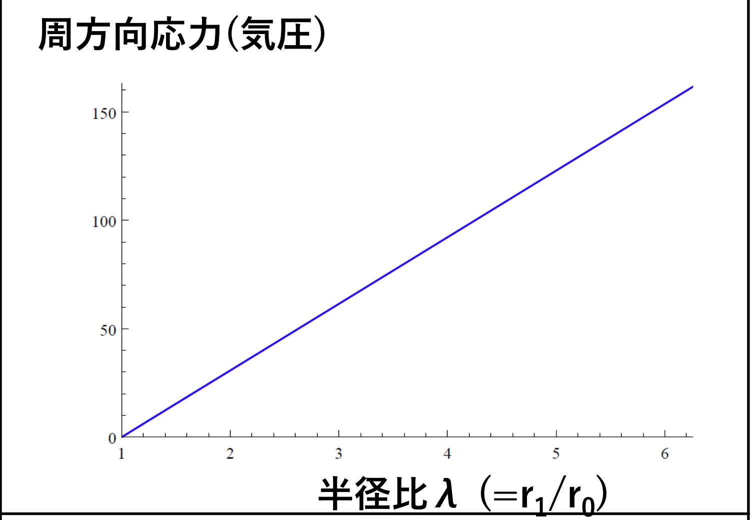

図3.2.6　半径比λ対周方向応力図

3.2.3　薄膜ゴム風船の結果説明

(1)半径比λ($=r_1/r_0$)と内圧の関係を図3.2.1に示します。繰返し法(赤)と直接法(青)による内圧推定値はほほ同様で有ると言えます。内圧の最高値は1.47気圧で、その時のλは1.5です。

ー空気を入れる当初、風船は膨らまず(半径が大きくならず)、内圧が高くなっています。これは注入した空気が圧縮されて、風船の体積増加が抑制されるためです。この事は、理想気体の式から内圧Pは、$P=nRT/V$で、体積Vが増加しなければ、注入空気のモル数n が増加するため、圧力が高くなることから分かります。

ー内圧がピークを越えた以降($\lambda>1.5$)、半径比λが増加するにつれて、内圧は低下して行きます。これは以下の理由であると考えます。

①式(2.1)を空気の注入量(モル)で偏微分すると、$1<\lambda<1.5$で正、即ち、空気を入れると内圧が増加します。また、$\lambda=1.5$で偏微分値は0となり、内圧が最大となります。$\lambda>1.5$以降では、偏微分値は負(マイナス)となり、内圧が減少します。即ち、空気を入れ続けると風船の体積は増加しますが、内圧は低下します。(巻末参考を参照ください)

3.2.3　薄膜ゴム風船の結果説明　（続き）

(1)

ーちなみに前掲の実験値を黒色で重ねてプロットしました。前述した様に、最高値をほぼ合わせる様にヤング率を設定しましたので、立ち上がりの挙動は同様のものとなっています。実験では最高値を与えるλは1.4でした。

ー圧力のピーク以降、λの増加に従い解析では圧力は単調減少しますが、実験では$\lambda=4$以降、圧力が増加しています。その詳細については著者等は何も記述していませんが(図3が対応するものと思われます)、ヤング率Eが変化しているのではないかと考えられます(解析では一定で評価)。

(2)注入モル数と内圧の関係を図3.2.2に示します。繰返し法(赤)と直接法(青)による注入モル数推定値はほぼ同様で有ると言えます。内圧の最高値は1.47気圧で、その時のモル数は約0.007です。これに対応する空気量は約0.16Lです。これから分かる様に内圧ピークを与える空気量は、極く僅かの0.16L (160cc)なのです。

(3)半径比λとゴム厚の関係を図3.2.3に示します。内圧ピークを与える半径比λは1.5でしたので、その時のゴム厚は0.44mmです。ゴム厚と半径比λの二乗は反比例の関係にあることが分かります。これは式(2.4)に示す様に、ゴムの体積は不変としているためです。

(4)注入モル数と内部体積Vの関係を図3.2.4に示します。空気が非圧縮性ガスであれば、注入モル数と内部体積Vは直線関係になるのですが、定規を当てると図より分かります様に直線からずれています。特に空気注入時の注入モル数に比べて、内部体積Vが伸びていません。この事は空気注入時に空気が圧縮されている事を示しています。

3.2.3　薄膜ゴム風船の結果説明　（続き）

(5)半径比λと内部体積Vの関係を図3.2.5に示します。式(2.8)より内部体積Vは半径比λの3乗に比例します。
その事を本図は示しています。

(6)半径比λと周方向応力σ_tの関係を図3.2.6に示します。周方向応力σ_tは、半径比λに比例している事が分かります。これは式(2.2)と式(2.3)より、 σ_tとλの関係が以下の様になるためです。

$$\sigma_{\mathrm{t}} = \frac{E \cdot (\lambda - 1)}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)} \qquad (3.1)$$

3.3　ゴム風船への応用(厚膜モデル使用)

3.3.1　入力条件

モデルの違いによって、どの位内圧の推定に差が出るのかを見るため、薄膜モデルに使用した3.2.1の条件と同じデータを用いました。

3.3.2　厚膜ゴム風船の結果　（赤：繰返し法、青：直接法）

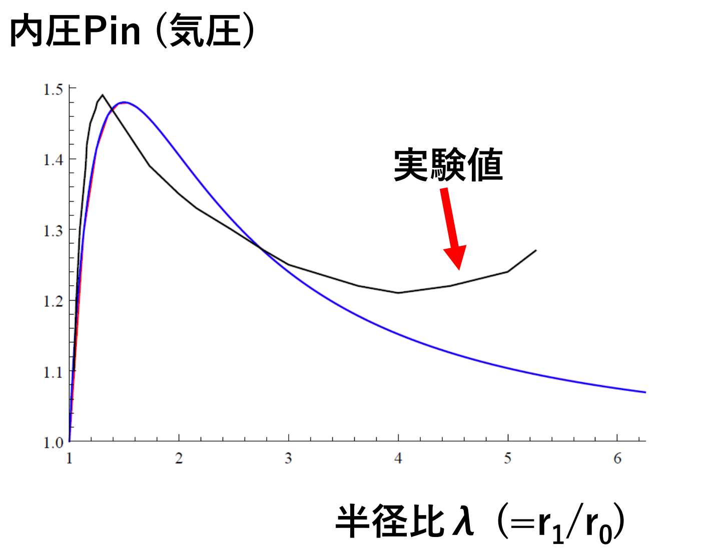

図3.3.1　半径比λ対内圧図

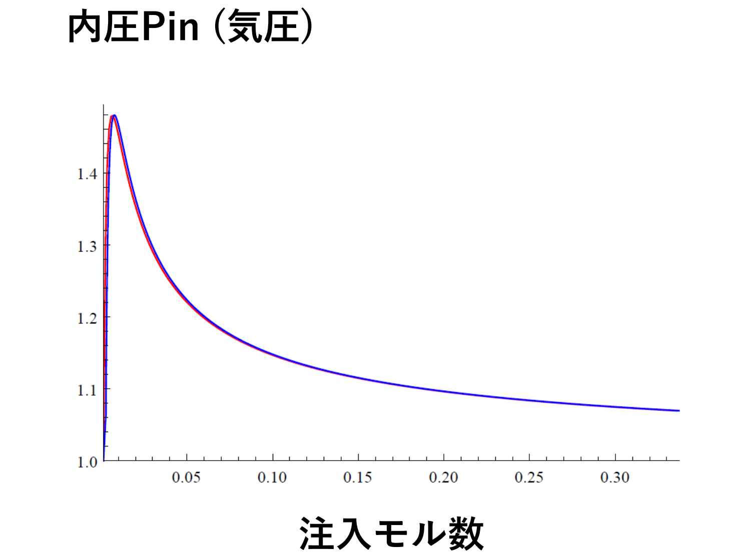

図3.3.2　注入モル数対内圧図

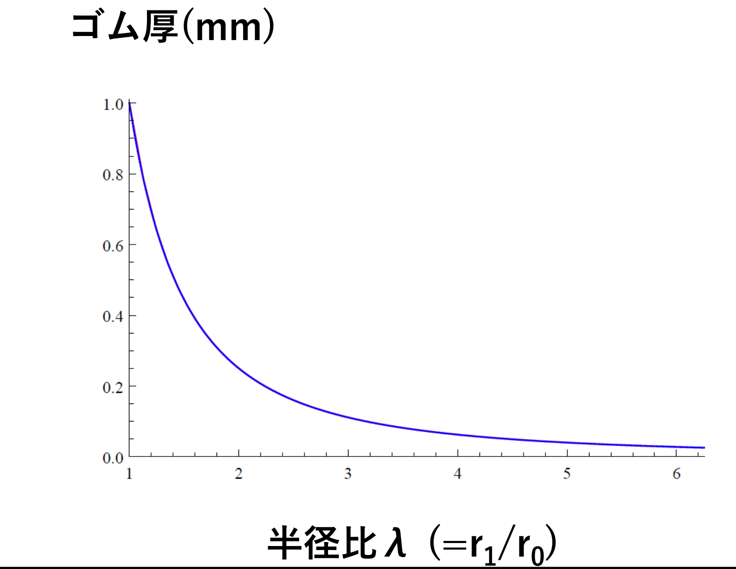

図3.3.3　半径比λ対ゴム厚図

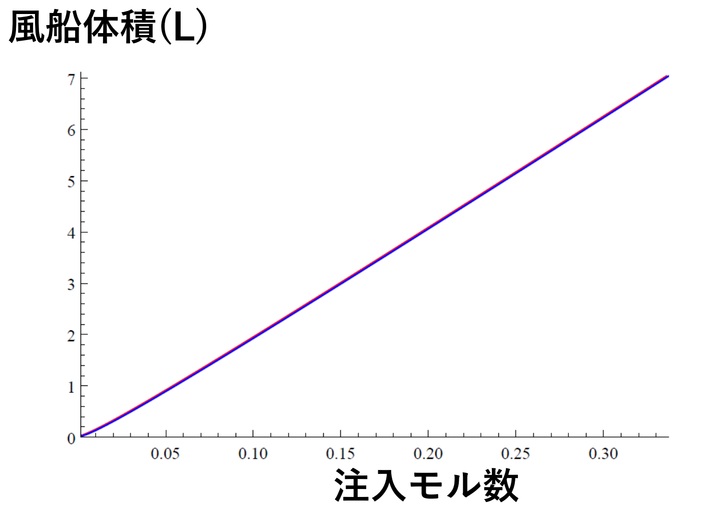

図3.3.4　注入モル数対風船体積図

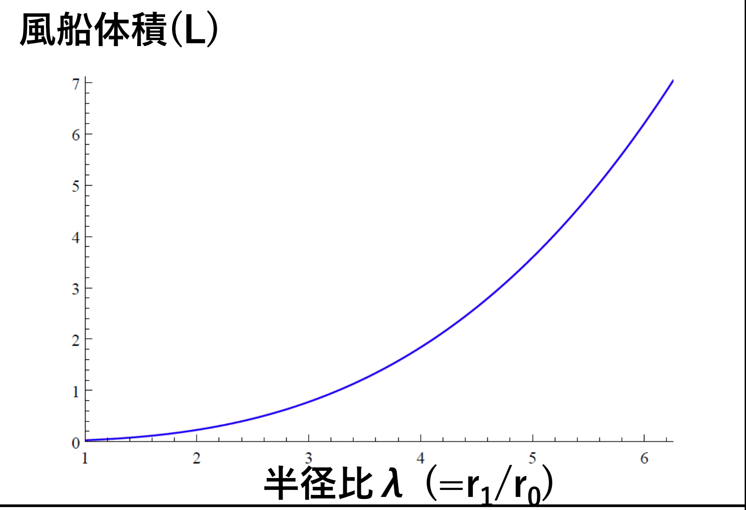

図3.3.5　半径比λ対風船体積図

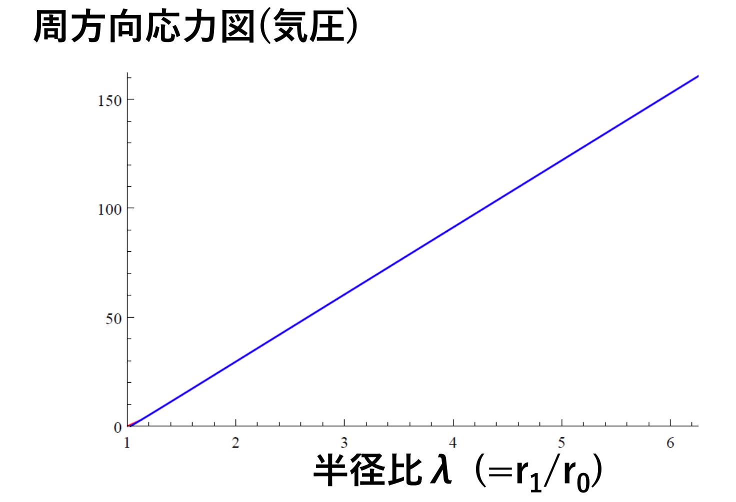

図3.3.6　半径比λ対周方向応力図

3.3.3　厚膜ゴム風船の結果説明

前掲載図に示す様に、同じデータを用いたため、結果が同じとなり、薄膜/厚膜のモデルの差は出ないと言うのが結論でした。

4　何故大きな風船は大きくなるのでしょうか

以上説明してきた様に、以下の事が言えると思います。

(1)図3.2.1に示した様に、内圧がピークを迎える前の半径比λの領域では(本解析では$\lambda<1.5$)、半径の大きな風船と半径の小さい風船を連結した場合、半径の大きな風船は内圧が半径の小さい風船よりも高いため、大きな風船は縮み、小さな風船は大きくなり、均等な圧力の大きさで膨らみが止まります。

(2)一方、内圧がピークを越えたλの領域(本解析では$\lambda>1.5$)では、半径が大きな風船ほど内圧が小さくなります。このため、半径の大きな風船と半径の小さい風船を連結した場合、内圧の高い小さな風船から内圧の低い大きな風船へ空気が流出し、両者の内圧が均等になる迄、大きな風船は更に大きく、小さな風船は更に小さくなります。

図3.2.1をもう一度見てください。小さな風船から空気が流出することにより、小さな風船は半径が小さく(λが小さく)なります。 奇妙に感じますが、λが小さくなると増々内圧が高くなり、更に小さな風船から大きな風船へ空気が流出します。この流出は小さな風船の半径が内圧ピーク（$\lambda=1.5$)に達してもまだ続きます。ピークを越えると内圧は急激に減少に転じ、やがて大きな風船の内圧と等しくなり、平衡に達します。

5.　謝辞

本資料の作成に当たり、当初から助言と校正の労を取って下さった物部理氏に感謝致します。

6.　感想

説明文の作成に当たっては、小学生が読んでも内容が分かる様にと心掛けましたが、残念ながら数式に頼ってしまう事となりました。小学生に分かり易く説明する事の難しさを痛感しました。

参考　内圧の注入モル依存性　（内圧の注入モルによる偏微分）

内圧Pinは式(2.1)より以下となります。

$$P_{in} = P_{out} + \sigma_t \frac{2t}{r_1} \qquad (参\text{-}1)$$

上式を注入モルNで偏微分すると、以下となります。

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial N}P_{in} = \frac{1}{r_1{}^2}[r1(\sigma_t \frac{\partial t}{\partial N} + t\frac{\partial}{\partial N}\sigma_t) - t\sigma_t \frac{\partial r_1}{\partial N}] \qquad (参\text{-}2)$$

式(参-2)の右辺の分子に着目します。

$$\frac{\partial t}{\partial N} = \frac{\partial t}{\partial r}\frac{\partial r_1}{\partial N} = \frac{-2t_0}{r_0}\frac{1}{\lambda^3}\frac{\partial r_1}{\partial N}、\quad \frac{\partial \sigma_t}{\partial N} = \frac{E}{(1-\nu)r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}、 \qquad (参\text{-}3)$$

$$\frac{dr_1}{dN} = \frac{RT}{(4\pi r_0^2)\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2\left[P_{out} + \frac{1}{3}\left(\frac{2E}{1-\nu}\right)\left(\frac{t_0}{r_0}\right)\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\right]}$$

式(参-3) を式(参-2)の右辺の分子に代入すると以下となります。 (参-4)

$$右辺分子 = \frac{\partial r_1}{\partial N}[-2t_0\lambda^{-2}\sigma_t + \frac{E}{(1-\nu)}\lambda\ t\ -\ t\sigma_t]$$

$$= \frac{\partial r_1}{\partial N}t_0\lambda^{-2}\sigma_t\frac{3-2\lambda}{(\lambda-1)}$$