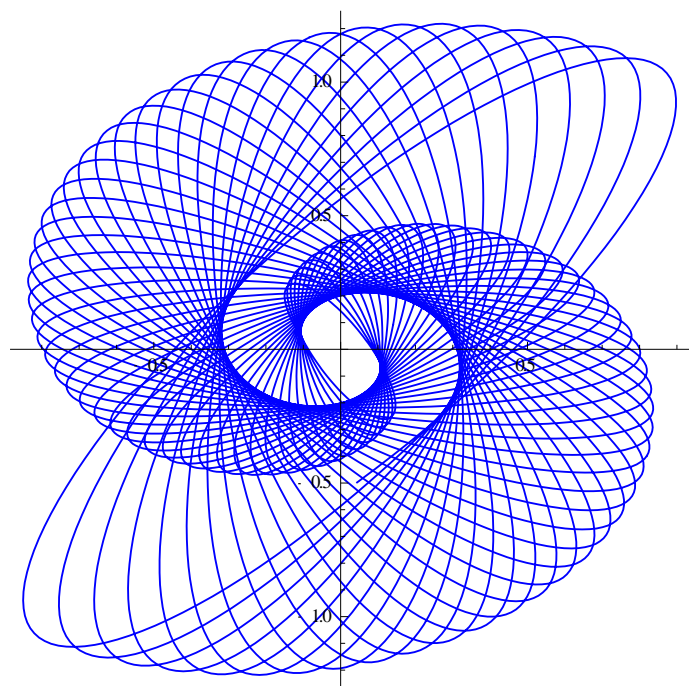


振り子曲線(軌跡)の私的検討



- (1) 背景
- (2) 運動方程式の検討
- (3) サンプル計算
- (4) 運動方程式に拠らない軌跡の検討
- (5) 考察

Rev.01

2017 (平成29)年05月17日

図の修正

菅原 政治郎

1. 背景

40年近く前にアナログカメラで撮った振り子軌跡(写真1~3)を、もう一度パソコンにて再現出来ないだろうかと考え、減衰を考慮した振り子の運動方程式を検討しました。

又、軌跡を美しく見せるための、運動方程式に拠らない方法も検討しました。

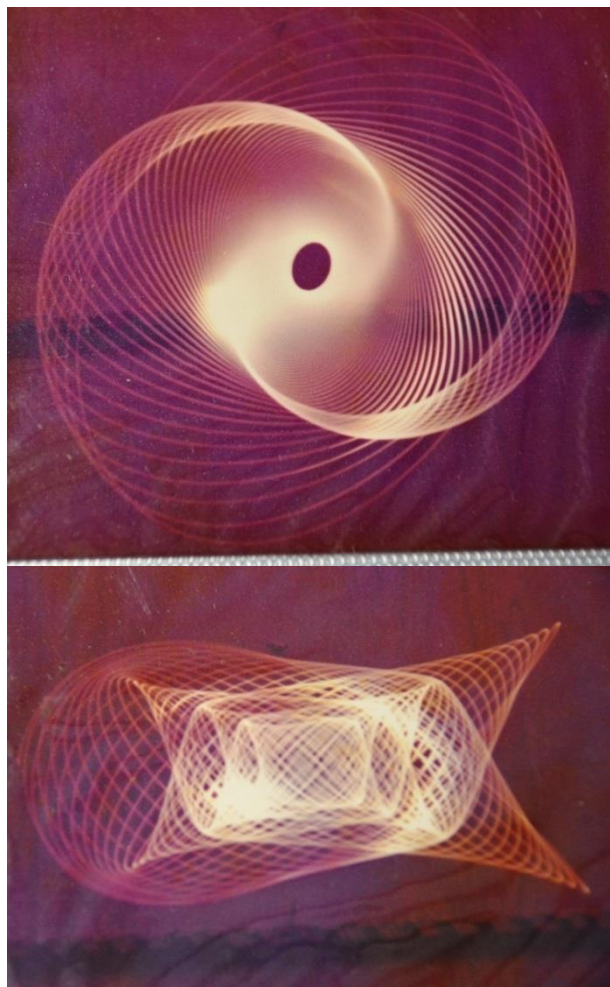


写真1

写真2

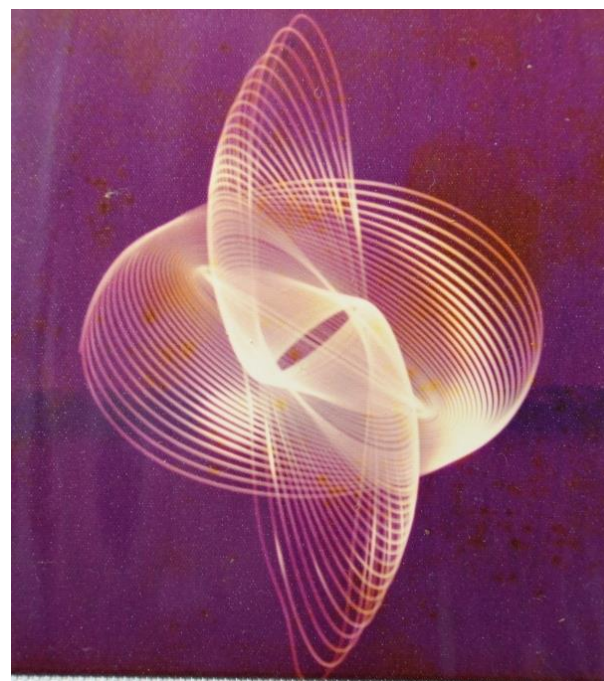


写真3

巻末の参考資料3にて、追加の振り子曲線の写真を掲載しています。ご覧下さい。

2. 運動方程式の検討

2.1 仮定

- (1)振り子に働く減衰は速度に比例する粘性抵抗と速度の二乗に比例する慣性抵抗の二種類を検討します。
- (2)振子を吊るす糸は振り子の運動によって伸びないものとします。

2.2 極座標(Polar coordinate)による運動方程式の予備検討

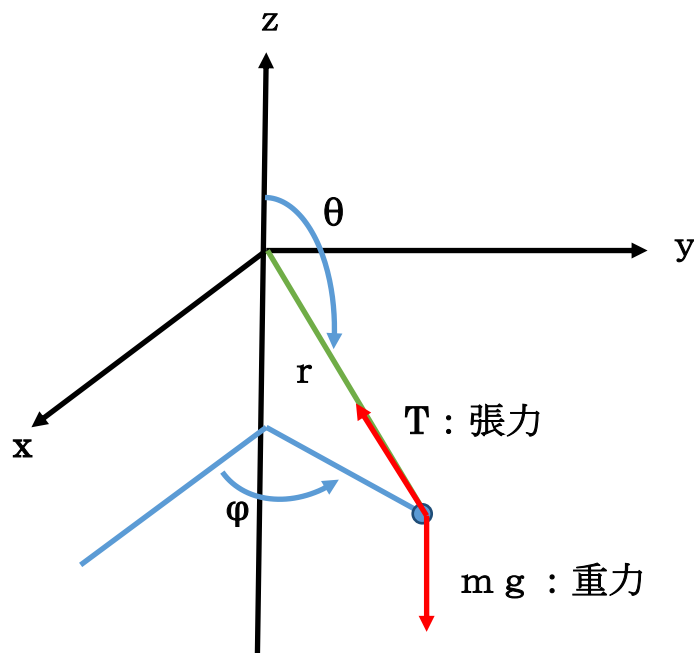


図 2.1 振り子

振り子の位置を径方向距離 r , 角度 θ 及び ϕ を用い、デカルト座標系(Cartesian coordinate)と対応させると、以下となります(図 2.1参照)。

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \text{Sin}[\mathcal{G}] \cdot \text{Cos}[\varphi] \\y &= r \cdot \text{Sin}[\mathcal{G}] \cdot \text{Sin}[\varphi] \\z &= r \cdot \text{Cos}[\mathcal{G}]\end{aligned} \quad \dots(2.1)$$

また、径方向距離 r 方向、角度 θ 方向及び ϕ 方向の速度は以下となります。

$$\begin{aligned}V_r &= \dot{r}, & V_\theta &= r \dot{\mathcal{G}} \\V_\phi &= r \cdot \dot{\varphi} \cdot \text{Sin}[\mathcal{G}]\end{aligned} \quad \dots(2.2)$$

更に、距離 r 方向、角度 θ 方向及び ϕ 方向の加速度は以下となります。

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\mathcal{G}}^2 - r\dot{\phi}^2 \text{Sin}^2[\mathcal{G}] \\ a_g &= r\ddot{\mathcal{G}} + 2\dot{r}\dot{\mathcal{G}} - r\dot{\phi}^2 \cdot \text{Sin}[\mathcal{G}] \cdot \text{Cos}[\mathcal{G}] \\ a_\phi &= r \cdot \ddot{\phi} \cdot \text{Sin}[\mathcal{G}] + 2\dot{r} \cdot \dot{\phi} \cdot \text{Sin}[\mathcal{G}] + 2r \cdot \dot{\mathcal{G}} \cdot \dot{\phi} \cdot \text{Cos}[\mathcal{G}] \end{aligned} \quad \dots(2.3)$$

2.3 極座標による運動方程式の検討

2.3.1 粘性抵抗時の運動方程式の検討

物体が流体内をそれ程早く運動しない(Reynolds数が小さい)場合に、流体から物体に働く抵抗が「粘性抵抗」と呼ばれ、その大きさは速度に比例すると言われています。

一般にストークスの抵抗法則と呼ばれるものが有り、抵抗係数 k_1 は以下で与えられるものです。

$$k_1 = 6\pi \cdot a \cdot \eta \quad \dots(2.4)$$

ここに、 a : 物体の半径(球体を仮定)、 η : 粘性係数 (Pa s = kg/m/s)

粘性抵抗を \vec{R}_1 、物体の速度を \vec{v} とすれば、粘性抵抗は以下で与えられます。

$$\vec{R}_1 = -k_1 \vec{v} \quad \dots(2.5)$$

以上より、各成分 r , θ , ϕ に対する運動方程式は、以下となります。

$$\begin{aligned} ma_r &= m \cdot (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2[\theta]) = -T - mg \cdot \cos[\theta] - k_1 \cdot \dot{r} \\ ma_\theta &= m \cdot (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \cdot \sin[\theta] \cdot \cos[\theta]) \\ &= mg \cdot \sin[\theta] - k_1 \cdot r \cdot \dot{\theta} \\ ma_\phi &= m \cdot (r \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin[\theta] + 2\dot{r} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin[\theta] + 2r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos[\theta]) \\ &= -k_1 \cdot r \cdot \dot{\phi} \cdot \sin[\theta] \end{aligned} \quad \dots(2.6)$$

ここに、 m : 物体(振り子)の質量、 g : 重力加速度(= 9.80665 m/s²)

ここで、2.1節の仮定(2)より、糸は運動中に伸縮はしないと仮定していますので、上記式(2.6)の径方向 距離 r の時間に関する1階及び2階微分は 0 となります。

以上より、振り子を吊るしている糸の長さをLとすると、各成分 r , θ , ϕ に対する運動方程式は、以下となります。

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2[\theta] &= \frac{T}{m \cdot L} + \frac{g}{L} \cdot \cos[\theta] \\ \ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \cdot \sin[\theta] \cdot \cos[\theta] &= \frac{g \cdot \sin[\theta]}{L} - \frac{k_1 \cdot \dot{\theta}}{m} \quad \dots(2.7) \\ \ddot{\phi} \cdot \sin[\theta] + 2\dot{\theta} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos[\theta] &= -\frac{k_1 \cdot \dot{\phi} \cdot \sin[\theta]}{m} \end{aligned}$$

2.3.2 慣性抵抗時の運動方程式の検討

物体が流体内を早く運動する(Reynolds数が大きい)場合に、流体から物体に働く抵抗が「慣性抵抗」と呼ばれ、その大きさは速度の二乗に比例すると言われています。(事例解析として、小生のホームページの徒然帖「(7)慣性抵抗時の球体の軌跡」をご覧ください)

抵抗係数 k_2 は以下で与えられるものです。

$$k_2 = \frac{1}{2} c_0 \cdot \rho \cdot A = \frac{1}{2} c_0 \cdot \rho \cdot \pi \cdot a^2 \quad \dots(2.8)$$

ここに、 a : 物体の半径(球体を仮定)、 c_0 : 慣性係数、 ρ : 流体の密度(kg/m³)
 A : 物体の断面積

慣性抵抗を \bar{R}_2 、物体の速度を \vec{V} とすれば、慣性抵抗は以下で与えられます。

$$\bar{R}_2 = -k_2 |\vec{V}| \cdot \vec{V}, \quad \dots(2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} |\vec{V}| &= \sqrt{(\dot{r})^2 + (r \cdot \dot{\theta})^2 + (r \cdot \dot{\phi} \cdot \text{Sin}[\theta])^2} \\ &= L \cdot \sqrt{(\dot{\theta})^2 + (\dot{\phi} \cdot \text{Sin}[\theta])^2} \end{aligned}$$

以上より、2.3.1項の粘性抵抗時の運動方程式の導出と同様に、各成分 r , θ , ϕ に対する運動方程式は、以下となります。(但し、径方向 距離 r の時間に関する1階及び2階微分が 0 となることに注意。)

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \text{Sin}^2[\theta] &= \frac{T}{m \cdot L} + \frac{g}{L} \cdot \text{Cos}[\theta] \\ \ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \cdot \text{Sin}[\theta] \cdot \text{Cos}[\theta] &= \frac{g \cdot \text{Sin}[\theta]}{L} - \frac{k_2}{m} |\vec{V}| \cdot \dot{\theta} \quad \dots(2.10) \\ \ddot{\phi} \cdot \text{Sin}[\theta] + 2\dot{\theta} \cdot \dot{\phi} \cdot \text{Cos}[\theta] &= -\frac{k_2}{m} \cdot |\vec{V}| \cdot \dot{\phi} \cdot \text{Sin}[\theta] \end{aligned}$$

3. サンプル計算

前章での運動方程式を利用し、方程式の妥当性の検証を兼ねて、サンプル計算を実施しました。

3.1 計算条件

- (1) 糸の長さ $L = 0.5 \text{ m}$
- (2) 振り子の質量 $m = 0.5 \text{ kg}$ 、半径 $a = 0.025 \text{ m}$ 、 $(A = 1.9635 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)$ 、体積 $\text{Vol} = 6.54498 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$
- (3) 粘性係数 $\eta = 18.2 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m/s}$ (出典:理科年表)、慣性係数 $c_0 = 0.5$ (インターネット)
- (4) 空気の密度 $\rho = 1.205 \text{ kg/m}^3$ (出典:理科年表)
- (5) 計算コード: Mathematicaの数値微分方程式解法 NDSolveを使用
- (6) 0~60秒の解析

3.2 抵抗が無い場合の計算 (遠心力と向心力のバランス条件)

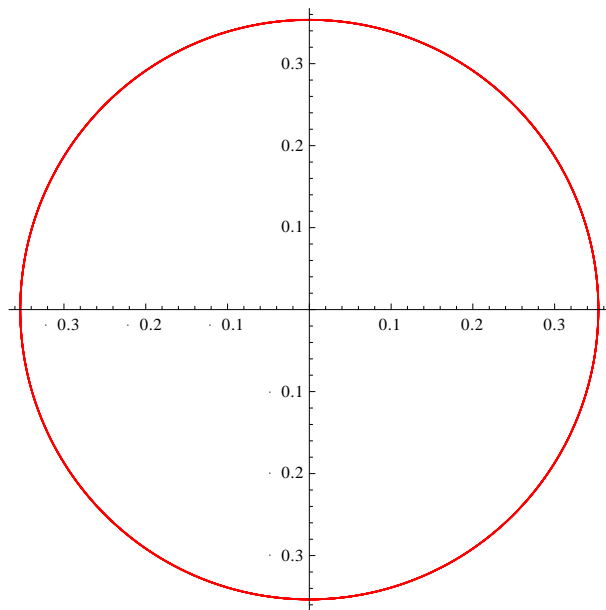
3.2.1 初期条件

方程式の妥当性を検証するため、抵抗が無い場合の振り子の軌跡を、遠心力と向心力がバランスする条件で求めました。この状態では、振り子の軌跡は真円を描くはずですが、

- (1) 初期角度 $\theta = 135$ 度、初期角度 $\phi = 0$ 度
- (2) θ 方向角振動数= 0度/s、 ϕ 方向角振動数= $5.265 \text{ rad/s} = 301.65$ 度/s (遠心力と向心力のバランス条件)

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{-L \cdot \text{Cos}[\theta]}} \quad \dots(2.11)$$

3.2.2 解析結果



左図の様に、振り子の軌跡は真円を描いています。従って、設定した方程式は妥当と考えます。

図 3.2-1 抵抗無し時の軌跡

3.3 粘性抵抗時の計算

3.3.1 ケース1 (遠心力と向心力のバランス条件)

(1) 初期条件 (3.1節以外の条件)

- ① 初期角度 $\theta = 135$ 度、初期角度 $\phi = 0$ 度
- ② θ 方向初期角振動数= 0度/s、 ϕ 方向初期角振動数= 5.265 rad/s = 301.65度/s
(遠心力と向心力のバランス条件)
- ③ 粘性係数 η = 基本ケース、基本ケース*100、基本ケース*10,000の3ケース

(2) 解析結果

結果を図3.3-1～3.3-3に示します。

- ① 図3.3-1に示す様に、粘性係数の基本ケースでは、図 3.2-1に示す抵抗が無い場合の結果とほぼ同様の結果が得られ、空気抵抗の影響が見られません。
- ② 粘性係数を基本ケースの100倍にした場合の結果を図 3.3-2に示します。この場合でも、空気抵抗の影響は見られません。
- ③ 粘性係数を基本ケースの10,000倍にした場合の結果を図 3.3-3に示します。この様に大きな係数にして始めて減衰の効果が現れます。逆に言えば、非現実的な値に設定しないと粘性による空気抵抗の影響が見られないということです。
- ④ 以上の結果、振り子の様な速度の遅い物体が減衰する要因は、粘性抵抗に拠るものではなく、糸を吊るしている支点での摩擦や、糸の撚りに拠るものではないかと考えられます。

(3) 解析図

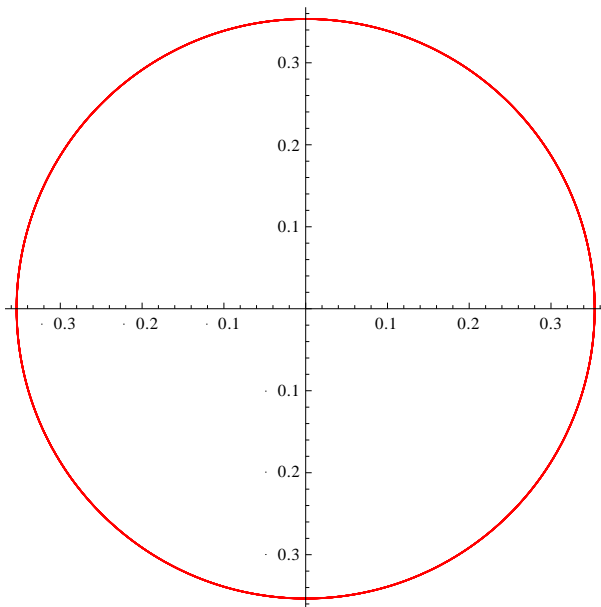


図 3.3-1 粘性抵抗時の軌跡
基本ケース
($\eta = 1.82 \times 10^{-5}$ の場合)

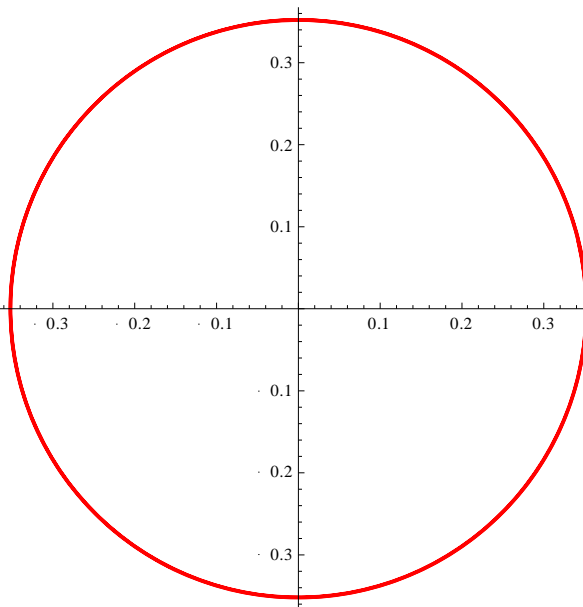


図 3.3-2 粘性抵抗時の軌跡
基本ケースの100倍
($\eta = 1.82 \times 10^{-3}$ の場合)

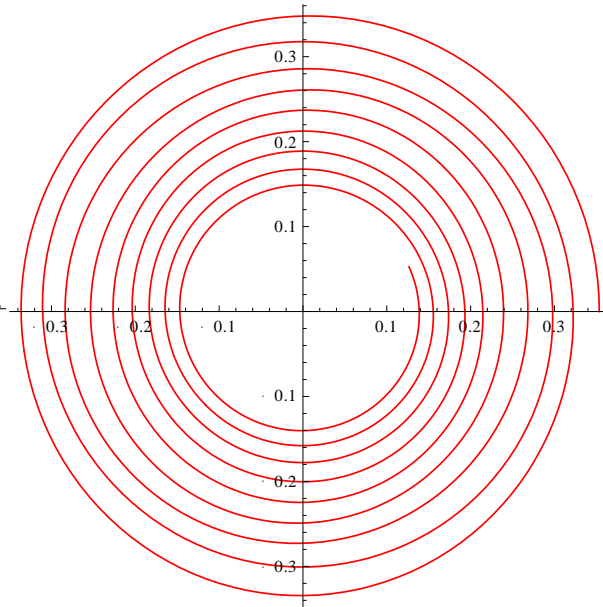


図 3.3-3 粘性抵抗時の軌跡
基本ケースの10,000倍
($\eta = 1.82 \times 10^{-1}$ の場合)

3.3.2 ケース2 (ϕ 方向初期角振動数 (ω_ϕ) = 50度/s)

(1) 初期条件 (3.1節以外の条件)

- ① 初期角度 $\theta = 135$ 度、初期角度 $\phi = 0$ 度
- ② θ 方向初期角振動数= 0度/s、 ϕ 方向初期角振動数= 0.873 rad/s = 50度/s 及び 100 度/s
- ③ 粘性係数 η =基本ケース(1.82×10^{-5})、基本ケース*1000、基本ケース*10,000の3 ケース

(2) 解析結果

結果を図 3.3-4~3.3-7に示します。

- ① 図3.3-4に示す様に、 ϕ 方向初期角振動数を 50度/s に設定して、軌跡がダブらない様にしました。粘性係数の基本ケースでは、粘性抵抗による減衰が殆ど無いので、1周期の軌跡は楕円軌道に近くなり、図に示す様に振り子の軌跡はドーナツ状になります。
- ② 粘性係数を基本ケースの1000倍にした場合の結果を図 3.3-5に示します。粘性抵抗の影響が現れ、図 3.3-4に比べて明らかに θ 方向のみならず、 ϕ 方向にも振動の減衰が見られます。
- ③ 粘性係数を基本ケースの10,000倍にした場合の結果を図 3.3-6に示します。大きな減衰効果が現れ、振り子が1回転していない事が分ります。
- ④ 粘性係数を基本ケースの10,000倍、 ϕ 方向初期角振動数を2倍の100 度/sにした場合で120秒までの結果を図 3.3-7に示します。2分間の解析に係らず、減衰にて振動が止まっています。粘性係数が大き過ぎるものと思われれます。

(3) 解析図

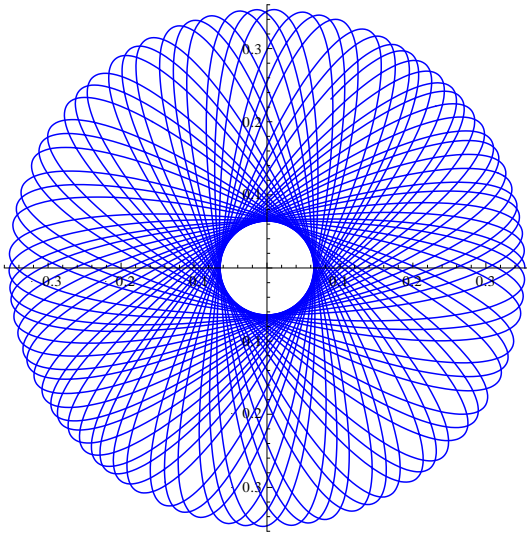


図 3.3-4 粘性抵抗時の軌跡 **基本ケース**
 ($\eta = 1.82 \times 10^{-5}$ 、 $\omega_\varphi = 50^\circ / s$ の場合)

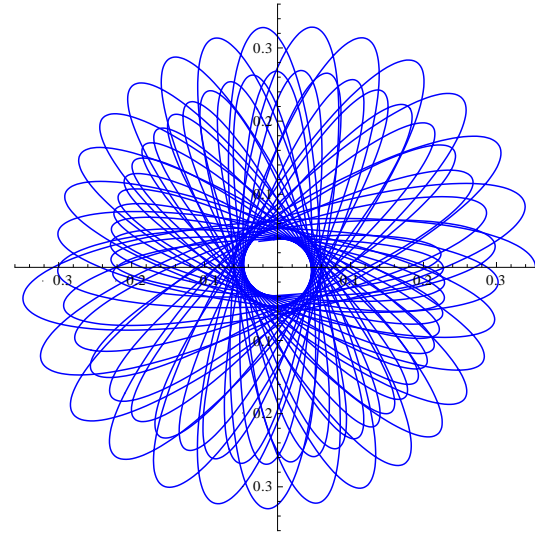


図 3.3-5 粘性抵抗時の軌跡 **基本ケースの1000倍**
 ($\eta = 1.82 \times 10^{-2}$ 、 $\omega_\varphi = 50^\circ / s$ の場合)

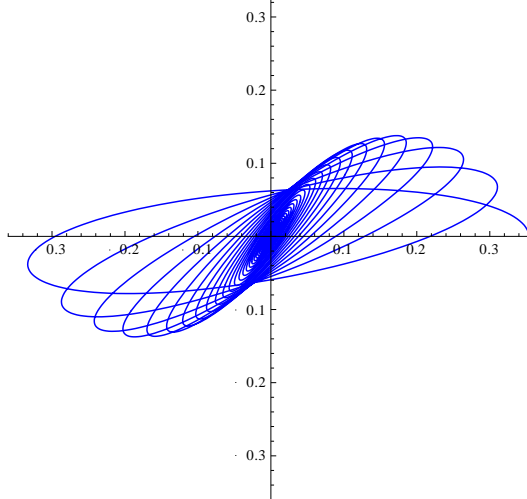


図 3.3-6 粘性抵抗時の軌跡 **基本ケースの10000倍**
 ($\eta = 1.82 \times 10^{-1}$ 、 $\omega_\varphi = 50^\circ / s$ の場合)

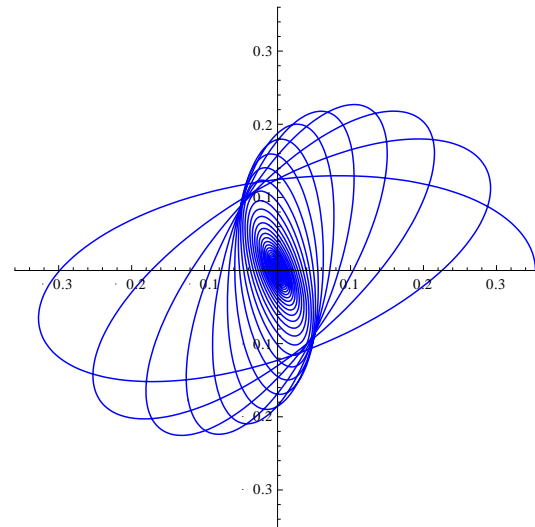


図 3.3-7 粘性抵抗時の軌跡 **基本ケースの10000倍**
 ($\eta = 1.82 \times 10^{-1}$ 、 $\omega_\varphi = 100^\circ / s$ の場合)

3.4 慣性抵抗時の計算

3.4.1 ケース1 (遠心力と向心力のバランス条件)

(1) 初期条件 (3.1節以外の条件)

- ① 初期角度 $\theta = 135$ 度、初期角度 $\phi = 0$ 度
- ② θ 方向初期角振動数= 0度/s、 ϕ 方向初期角振動数= 5.265 rad/s = 301.65度/s
(遠心力と向心力のバランス条件)
- ③ 慣性係数 C_0 =基本ケース(0.5)、基本ケース*100、基本ケース*10,000の3ケース

(2) 解析結果

結果を図 3.4-1～3.4-3に示します。

- ① 図 3.4-1に示す様に、慣性係数の基本ケースでは、図 3.2-1に示す抵抗が無い場合の結果とほぼ同様の円の結果が得られ、空気抵抗の影響が見られません。図 3.4-2はその時のZ方向位置の時間変化ですが、殆ど低下していないことが分かります。
- ② 慣性係数を基本ケースの100倍にした場合の結果を図 3.4-3に示します。この場合、空気抵抗の影響が如実に見られ、振り子の軌跡はスパイラル的に減衰しています。これは粘性係数を10000倍に増加した場合の図 3.3-3と似ています。
- ③ 慣性係数を基本ケースの10,000倍にした場合の結果を図 3.4-4に示します。減衰の効果が大き過ぎ、振り子は回転することなく停止してしまいます。慣性抵抗の大きさは速度の二乗に比例するため、慣性係数の見極めが必要です。
- ④ 以上の結果、振り子の様な速度の遅い物体が減衰する要因は、粘性抵抗の場合と同様、慣性抵抗に拠るものではなく、糸を吊るしている支点での摩擦や、糸の撚りに拠るものではないかと考えられます。

(3) 解析図

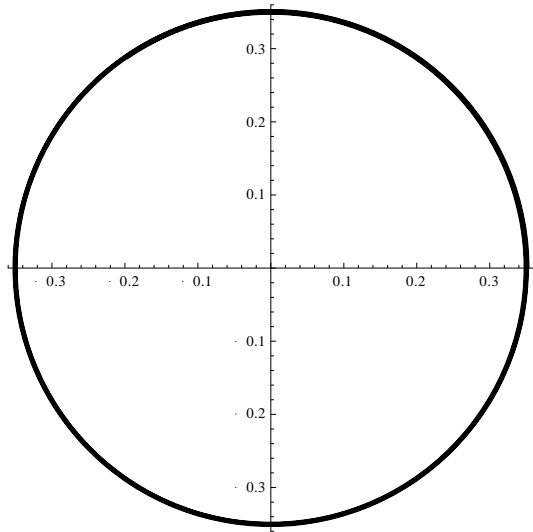


図 3.4-1 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケース**
($c_0 = 0.5$ 、 $\omega_\phi = 301.65^\circ/s$ の場合)

Z方向位置

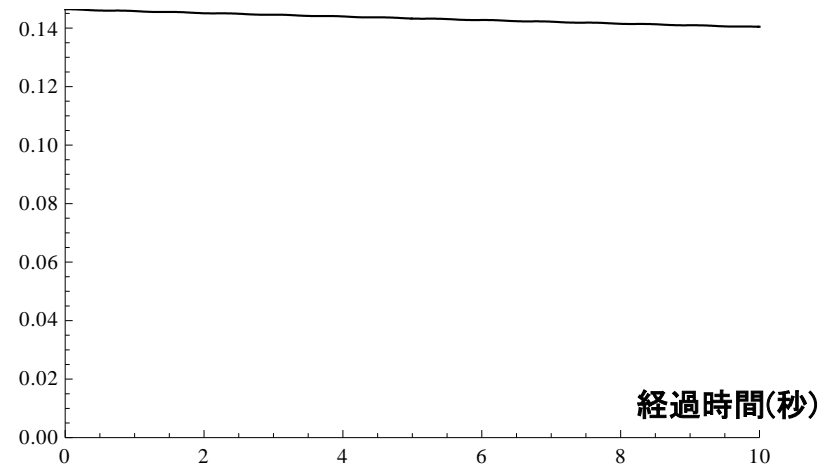


図 3.4-2 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケース**
($c_0 = 0.5$ 、 $\omega_\phi = 301.65^\circ/s$ の場合)

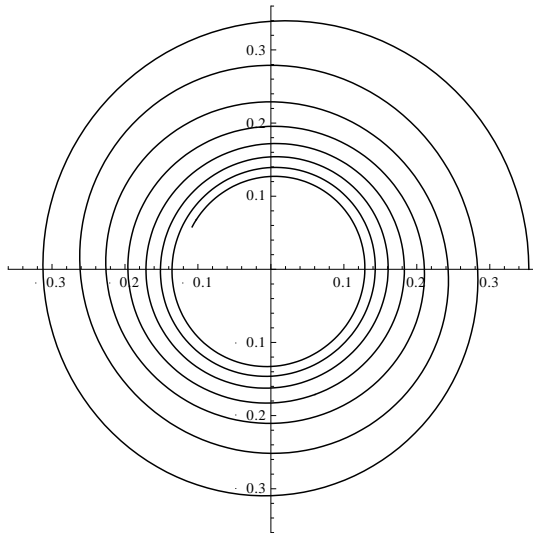


図 3.4-3 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケースの100倍**
($c_0 = 50$ 、 $\omega_\phi = 301.65^\circ/s$ の場合)

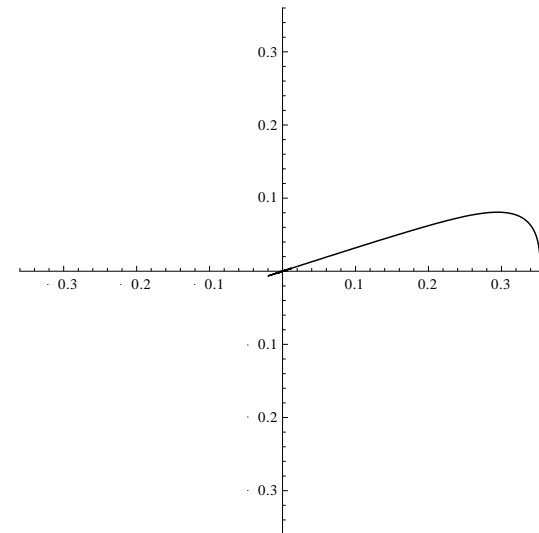


図 3.4-4 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケースの10000倍**
($c_0 = 5000$ 、 $\omega_\phi = 301.65^\circ/s$ の場合)

34.2 ケース2 (ϕ 方向初期角振動数 (ω_ϕ) = 50度/s)

(1) 初期条件 (3.1節以外の条件)

- ① 初期角度 $\theta = 135$ 度、初期角度 $\phi = 0$ 度
- ② θ 方向初期角振動数 = 0度/s、 ϕ 方向初期角振動数 = 0.873 rad/s = 50度/s 及び 100 度/s
- ③ 慣性係数 c_0 = 基本ケース(0.5)、基本ケース*10、基本ケース*100の3ケース
- ④ 解析時間 0~60秒

(2) 解析結果

結果を図 3.4-5~3.4-8に示します。

- ① 図3.4-5に示す様に、 ϕ 方向初期角振動数を 50度/s に設定して、軌跡がダブらない様にしました。慣性係数の基本ケースでは、慣性抵抗による減衰が殆ど無いので、粘性抵抗時の軌跡と同様、1周期の軌跡は楕円軌道に近くなり、図に示す様に振り子の軌跡はドーナツ状になります。
- ② 慣性係数を基本ケースの10倍にした場合の結果を図 3.4-6に示します。慣性抵抗の影響が現れ、図 3.4-5に比べて明らかに θ 方向のみならず、 ϕ 方向にも振動の減衰が見られます。
- ③ 慣性係数を基本ケースの100倍にした場合の結果を図 3.4-7に示します。大きな減衰効果が現れ、振り子が1回転していない事が分ります。
- ④ 慣性係数を基本ケースの10倍、 ϕ 方向初期角振動数を2倍の100 度/sにした場合で120秒までの結果を図 3.4-8に示します。慣性係数が比較的小さいため、減衰が小さく、軌跡は複雑になっています。

(3) 解析図

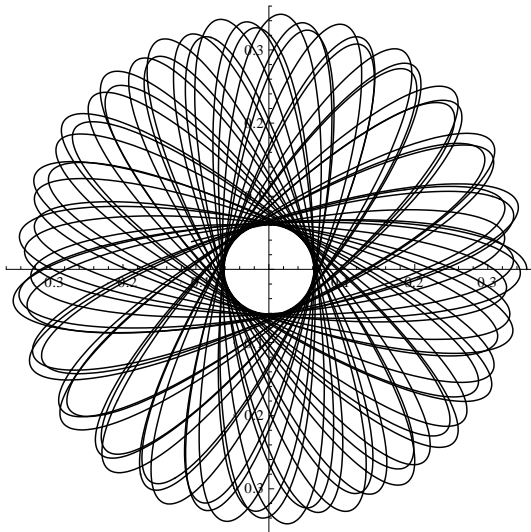


図 3.4-5 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケース**
($c_0 = 0.5$ 、 $\omega_\phi = 50^\circ/s$ の場合)

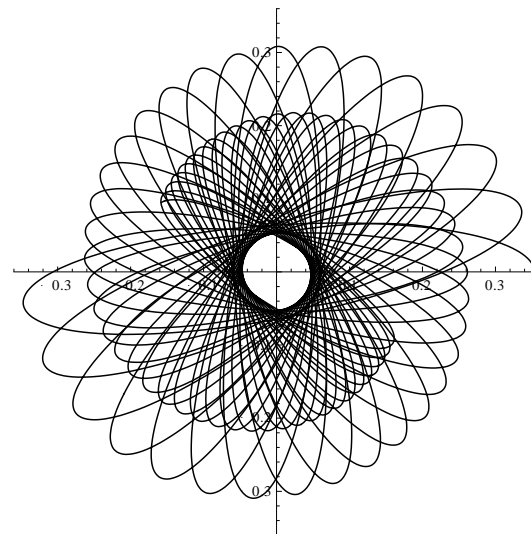


図 3.4-6 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケースの10倍**
($c_0 = 5$ 、 $\omega_\phi = 50^\circ/s$ の場合)

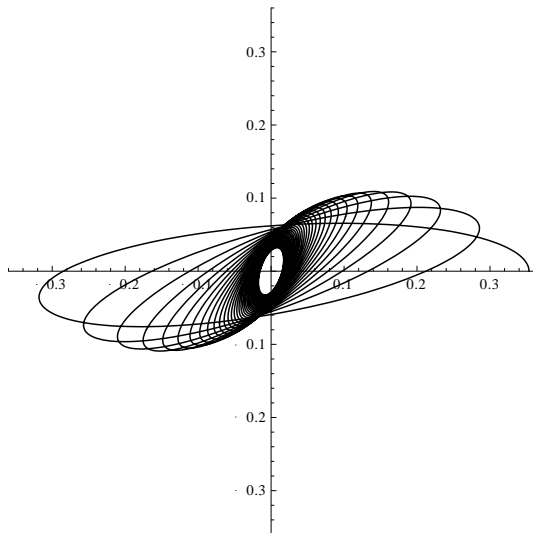


図 3.4-7 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケースの100倍**
($c_0 = 50$ 、 $\omega_\phi = 50^\circ/s$ の場合)

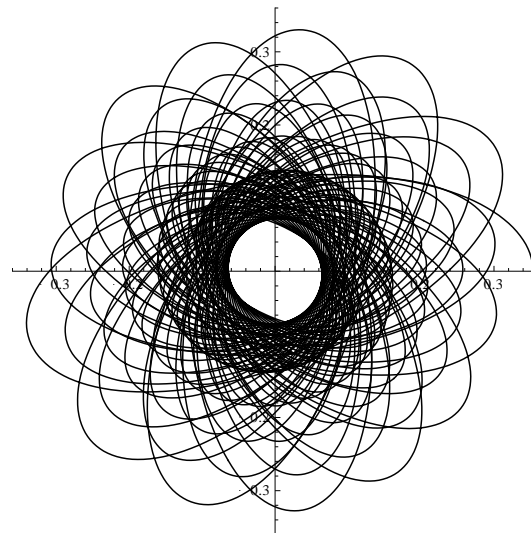


図 3.4-8 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケースの10倍**
($c_0 = 5$ 、 $\omega_\phi = 100^\circ/s$ の場合)

34.3 ケース3 (θ 方向角振動数 (ω_θ) = -80度/s、 ϕ 方向角振動数 (ω_ϕ) = 100度/s)

(1) 初期条件 (3.1節以外の条件)

- ① 初期角度 $\theta = 135$ 度、初期角度 $\phi = 0$ 度
- ② θ 方向初期角振動数 = -80度/s、 ϕ 方向初期角振動数 = 100 度/s
- ③ 慣性係数 c_0 = 基本ケース(0.5) * 10、基本ケース * 40 の2ケース
- ④ 解析時間 0~120秒

(2) 解析結果

結果を図 3.4-9~3.4-12に示します。

- ① 図3.4-9は、図3.4-8と同じもので、 θ 方向初期角振動数 = 0度/sの場合です。これは後述図との比較の為に掲載しました。
- ② 図3.4-10は、 θ 方向に初期角振動数 -80度/s の力を加えた場合の軌跡です。図3.4-9に比べて、X-Y平面の広がりがあることが分ります。
- ③ 図3.4-11は、慣性係数を20にした場合の軌跡です。この軌跡は写真3に見られる軌跡に似ています。振り子の支点における摩擦減衰力が、ここで設定した慣性係数 20 の場合の慣性抵抗力と同程度のものではないかと思われます。
- ④ 図3.4-12は、図3.4-11 の ϕ 方向初期角振動数を半分にしたものです。角振動数が小さい分、全体の軌跡は早めに収束します。

(3) 解析図

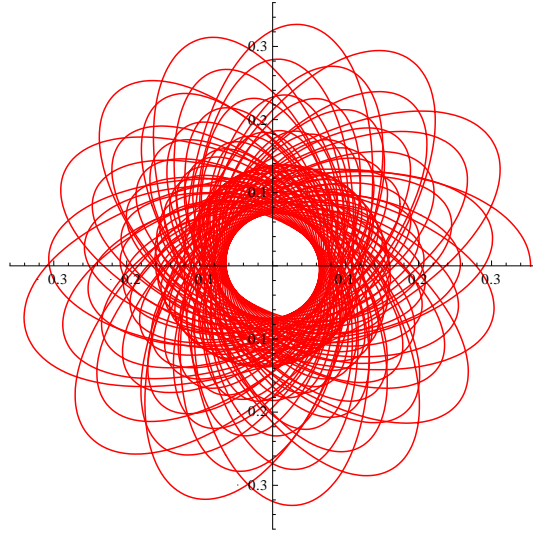


図 3.4-9 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケースの10倍**
($c_0=5$ 、 $\omega_g=0^\circ/s$ 、 $\omega_\phi=100^\circ/s$ の場合)

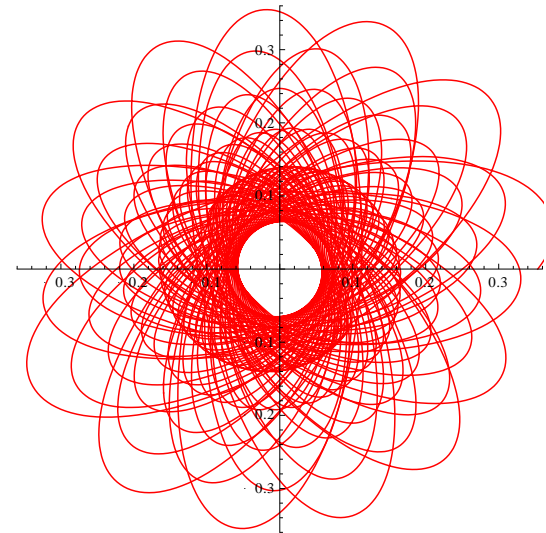


図 3.4-10 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケースの10倍**
($c_0=5$ 、 $\omega_g=-80^\circ/s$ 、 $\omega_\phi=100^\circ/s$ の場合)

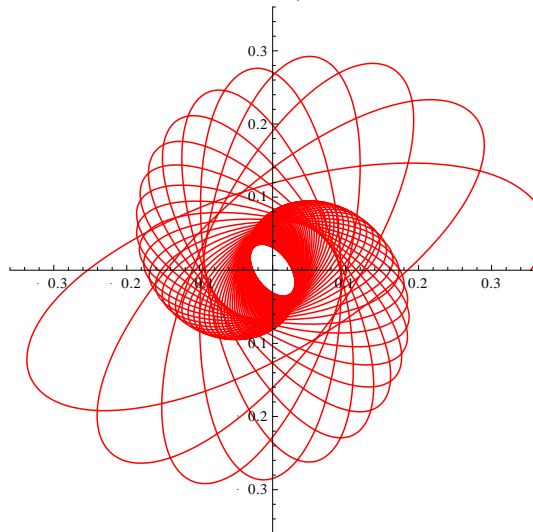


図 3.4-11 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケースの40倍**
($c_0=20$ 、 $\omega_g=-80^\circ/s$ 、 $\omega_\phi=100^\circ/s$ の場合)

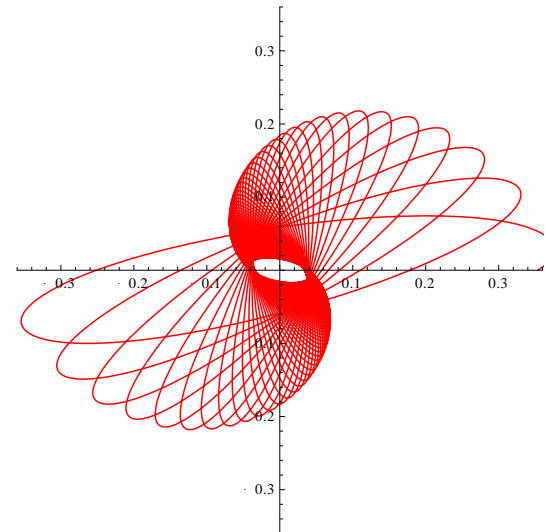


図 3.4-12 慣性抵抗時の軌跡 **基本ケースの40倍**
($c_0=20$ 、 $\omega_g=-80^\circ/s$ 、 $\omega_\phi=50^\circ/s$ の場合)

3.5 考察

以上の検討結果より、以下の知見が得られました。

- (1) 振り子の様な速度の遅い物体では、一般的に考えられている空気の粘性係数及び慣性係数を用いて減衰を考慮しても、抵抗が無い場合と殆ど変わらない挙動が得られました。
- (2) このため、振り子が減衰する要因は、粘性抵抗や慣性抵抗に拠るものではなく、糸を吊るしている支点での摩擦や、糸の撚りに拠るものではないかと考えられます。
- (3) 写真1～3に示す振り子の挙動を、今回の様に空気の抵抗のみでの運動方程式にて再現する場合は、非常に大きな係数の設定が必要となります。
- (4) 数値実験として、粘性抵抗や慣性抵抗の係数、 θ 方向の角振動数及び ϕ 方向の角振動数をパラメータとして組み合わせ、実際の振り子の挙動を再現するのも、楽しみの一つと考えます。

4. 運動方程式に拠らない軌跡の検討

前章までは、振り子の挙動を運動方程式を用いて検討しました。しかし、一般的に考えられている空気の粘性係数及び慣性係数を用いて減衰を考慮しても、実際の振り子の挙動を上手く再現出来ない事が分かりました。

このため、運動方程式に拠らない、図形(軌跡)の美しさを再現する方法として、リサージュ(Lissajous:リサージュとも言われています)曲線を時間的に回転及び減衰させる方法を検討しました。

4.1 リサージュ曲線

リサージュ曲線(図形とも呼ばれています)とは、左図に示す様に、X-方向及びY-方向に単振動する物体の軌跡をX-Y平面上に投影した曲線(図形)です。

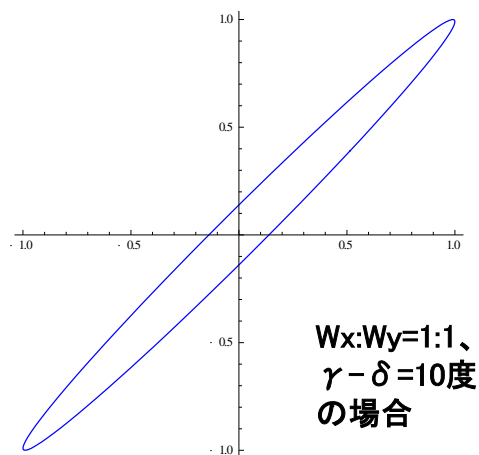


図 4.1 リサージュ曲線の一例

各方向の時間変化は、以下の式にて与えられます。

$$x = \text{Sin}[\omega_x \cdot t + \gamma], y = \text{Sin}[\omega_y \cdot t + \delta] \quad \dots(4.1)$$

ここに、 W_x : X方向の角振動数、 γ : X方向の初期位相(角度)
 W_y : Y方向の角振動数、 δ : Y方向の初期位相(角度)

尚、式(4.1)において、 $\text{Sin}[]$ の代わりに $\text{Cos}[]$ での表記もあります。位相が90度だけずれているのみで、曲線の挙動に違いは有りません。

4.2 リサーチ曲線の色々

式(4.1)より、各々の角振動数の違いや、初期位相の違いにより、リサーチ曲線の形が変化することが予想されます。

本節では、角振動数及び初期位相の違いをパラメータとして、リサーチ曲線の形を見てみましょう。

4.2.1 角振動数 W_x 、 W_y が同じ場合

$W_x=W_y=\theta$ 、位相差(Δ)= $\gamma-\delta$ と置き、式(4.1)を変形すると以下が得られます。

$$\begin{aligned}x &= \text{Sin}[\mathcal{G} \cdot t + \gamma] \\y &= \text{Sin}[\mathcal{G} \cdot t + \gamma - \Delta] = \text{Sin}[\mathcal{G} \cdot t + \gamma] \cdot \text{Cos}[\Delta] - \text{Cos}[\mathcal{G} \cdot t + \gamma] \cdot \text{Sin}[\Delta] \\&= x \cdot \text{Cos}[\Delta] \pm (1 - x^2)^{1/2} \cdot \text{Sin}[\Delta] \qquad \dots(4.2)\end{aligned}$$

$$y^2 - 2c_1xy + x^2 = c_2^2$$

$c_2 \neq 0$ の条件で

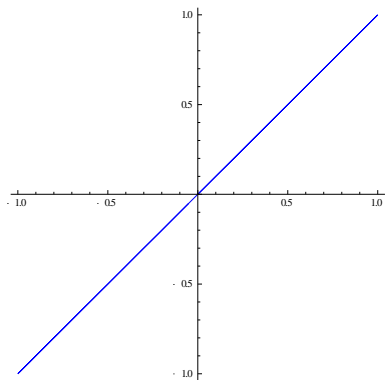
$$\frac{x^2}{c_2^2} + \frac{y^2}{c_2^2} - \frac{2c_1xy}{c_2^2} = 1$$

ここに、 $c_1 = \text{Cos}[\Delta]$ 、 $c_2 = \text{Sin}[\Delta]$

- (1) 初期位相 $\gamma = 0$ 度、及び初期位相差 $\Delta = \gamma - \delta = 0$ の場合、図4.2-A1に示す様に、図形は傾き1の直線になります。 $\Delta = 0$ より、 $c_1 = 1$ 、 $c_2 = 0$ になりますので、式(4.2)から、 $y = x$ の式が得られ、直線になることが確かめられます。

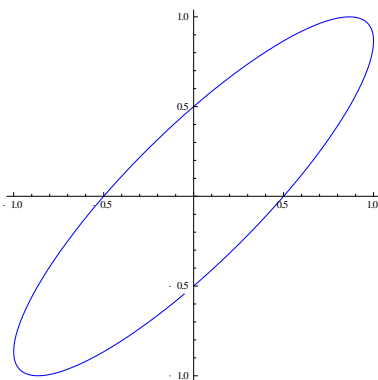
- (2) 初期位相差 $\Delta = 30$ 度 の場合、図4.2-A2に示す様に、長円形(楕円を任意角傾けた場合)となります。
- (3) 初期位相差 $\Delta = 45$ 度 の場合、図4.2-A3に示す様に、長円形の幅が図4.2-A2の場合に比べて厚くとなります。
- (4) $\Delta = 90$ 度 の場合、 $c_1 = 0$ 、 $c_2 = 1$ になりますので、式(4.2)から、 $x^2 + y^2 = 1$ の円の方程式が得られ、図4.2-A4からも円であることが確認できます。
- (5) 初期位相差 $\Delta = 135$ 度 の場合、図4.2-A5に示す様に、長円形(図4.2-A3を90度傾けた場合)となります。
- (6) 初期角度差 $\Delta = 180$ 度 の場合、 $c_1 = -1$ 、 $c_2 = 0$ になりますので、式(4.2)から、 $y = -x$ の式が得られ、図4.2-A6に示す様に、傾き -1 の直線になることが確かめられます。
- (7) ちなみに、図4.1に示した図は、初期角度差 $\Delta = 10$ 度 の場合で、幅の薄い長円形となります。
- (8) 以上の様に、角振動数が同じ場合、位相差が0度から90度に近づくに従い幅の薄い長円形から円になり、かつ長円の対称軸が45度から90度に回転します。90度を過ぎ180度に近づくに従って、逆の挙動が得られます。

初期位相 $\gamma = 0$ 度



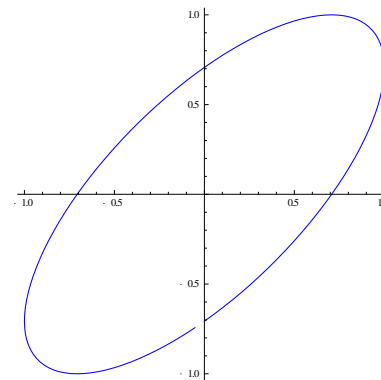
$\triangle = 0$ の場合

図 4.2-A1 $W_x:W_y=1:1$ の場合



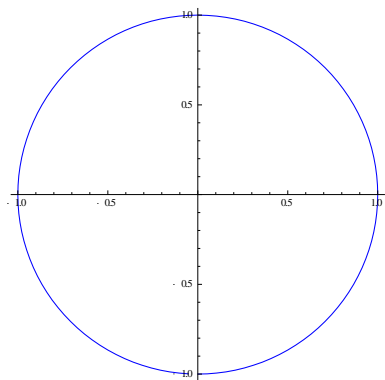
$\triangle = 30$ 度の場合

図 4.2-A2 $W_x:W_y=1:1$ の場合



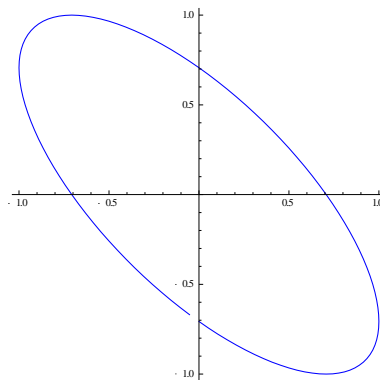
$\triangle = 45$ 度の場合

図 4.2-A3 $W_x:W_y=1:1$ の場合



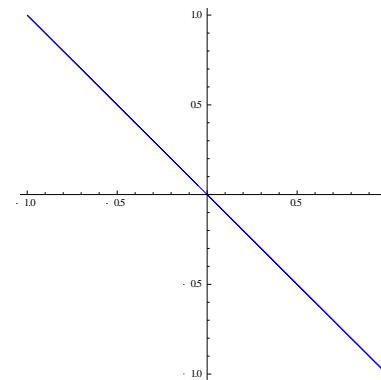
$\triangle = 90$ 度の場合

図 4.2-A4 $W_x:W_y=1:1$ の場合



$\triangle = 135$ 度の場合

図 4.2-A5 $W_x:W_y=1:1$ の場合



$\triangle = 180$ 度の場合

図 4.2-A6 $W_x:W_y=1:1$ の場合

4.2.2 角振動数 $W_x:W_y = 2:1$ の場合

$W_y = \theta$ 、位相差(Δ) = $\gamma - \delta$ と置き、簡単な場合として $\gamma = 0$ と設定し、式(4.1)を変形すると以下が得られます。

$$\begin{aligned}
 x &= \text{Sin}[2\mathcal{G} \cdot t] = 2\text{Sin}[\mathcal{G} \cdot t]\text{Cos}[\mathcal{G} \cdot t] \\
 x^2 &= 4\text{Sin}^2[\mathcal{G} \cdot t] \cdot \text{Cos}^2[\mathcal{G} \cdot t] = 4\text{Sin}^2[\mathcal{G} \cdot t] \cdot (1 - \text{Sin}^2[\mathcal{G} \cdot t]) \\
 4\text{Sin}^4[\mathcal{G} \cdot t] - 4\text{Sin}^2[\mathcal{G} \cdot t] + x^2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

$$\text{Sin}^2[\mathcal{G} \cdot t] = \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2}$$

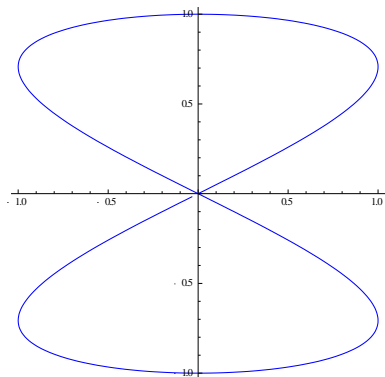
$$\begin{aligned}
 y &= \text{Sin}[\mathcal{G} \cdot t - \Delta] = c_1 \text{Sin}[\mathcal{G} \cdot t] - c_2 \text{Cos}[\mathcal{G} \cdot t] \\
 y^2 &= c_1^2 \text{Sin}^2[\mathcal{G} \cdot t] + c_2^2 \cdot (1 - \text{Sin}^2[\mathcal{G} \cdot t]) - c_1 c_2 \cdot x \\
 y^2 + c_1 c_2 \cdot x - c_2^2 &= (c_1^2 - c_2^2) \text{Sin}^2[\mathcal{G} \cdot t] \quad \text{ここに、} c_1 = \text{Cos}[\Delta], c_2 = \text{Sin}[\Delta]
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

$c_1^2 - c_2^2 \neq 0$ の条件で、式(4.3)及び(4.4)より t を消去すると、以下が得られます。

$$\begin{aligned}
 \frac{y^2 + c_1 c_2 \cdot x - c_2^2}{(c_1^2 - c_2^2)} - \frac{1}{2} &= \pm \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2} \\
 \Rightarrow \left[\frac{y^2 + c_1 c_2 \cdot x - c_2^2}{(c_1^2 - c_2^2)} - \frac{1}{2} \right]^2 &= \frac{1 - x^2}{4}
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

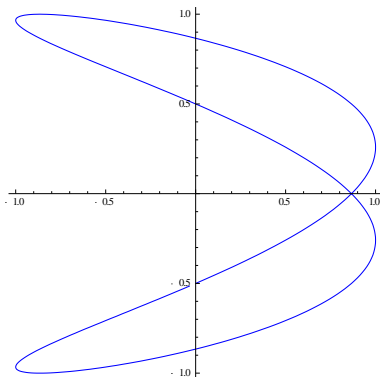
- (1) 初期位相差 $\Delta = 0$ 度の場合、図4.2-B1に示す様に、図形は上下対称の瓢箪になります。 $\Delta = 0$ より、 $c_1 = 1$ 、 $c_2 = 0$ になりますので、式(4.5)から、 $x^2 = 4y^2(1-y^2)$ の式が得られ、瓢箪の様な形になることが確かめられます。
- (2) 初期位相差 $\Delta = 45$ 度の場合、 $C_1^2 = c_2^2$ となりますので、式(4.4)から $y^2 = (1-x)/2$ となり、図4.2-B2に示す様に、放物線となります。
- (3) 初期位相差 $\Delta = 90$ 度の場合、式(4.5)から、 $x^2 = 4y^2(1-y^2)$ の式が得られ、図4.2-B1と同様、瓢箪の様な形になることが確かめられます。
- (4) 初期位相差 $\Delta = 135$ 度の場合、 $C_1^2 = c_2^2$ となりますので、式(4.4)から $y^2 = (1+x)/2$ となり、図4.2-B4に示す様に、図4.2-B2と面対称な放物線となります。
- (5) 以上、簡単な場合に着いて、解析的に検討しました。しかし一般的な角振動数比、及び位相差については、解析的に検討するのは無理ですので、曲線(図形)のみ示すこととします。

初期位相 $\gamma = 0$ 度



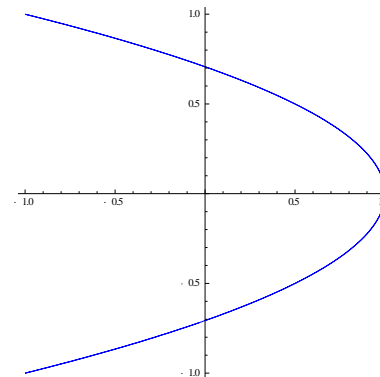
$\Delta = 0$ の場合

図 4.2-B1 $W_x : W_y = 2:1$ の場合



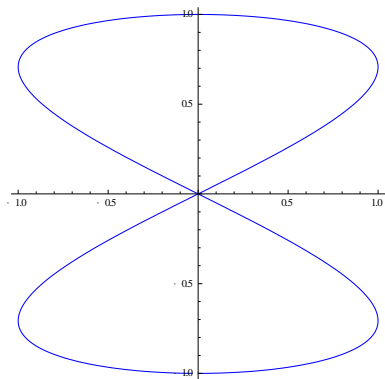
$\Delta = 30$ 度の場合

図 4.2-B2 $W_x : W_y = 2:1$ の場合



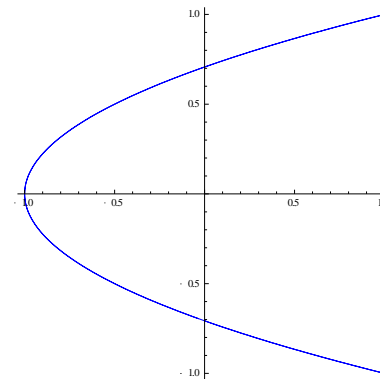
$\Delta = 45$ 度の場合

図 4.2-B3 $W_x : W_y = 2:1$ の場合



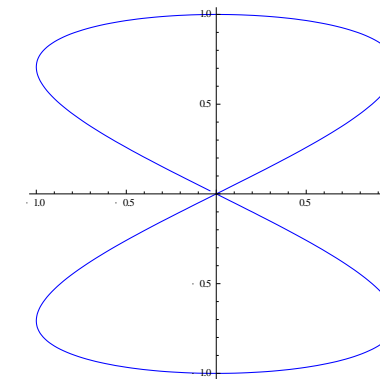
$\Delta = 90$ 度の場合

図 4.2-B4 $W_x : W_y = 2:1$ の場合



$\Delta = 135$ 度の場合

図 4.2-B5 $W_x : W_y = 2:1$ の場合



$\Delta = 180$ 度の場合

図 4.2-B6 $W_x : W_y = 2:1$ の場合

この他の角振動数及び初期位相差の組み合わせについては、解析的な説明は困難ですので、**結果のみ巻末の参考資料1に記載**しましたので、ご覧下さい。

参考までに、 $W_x : W_y = 1 : 2$ の場合はどうなるでしょうか。式(4.3)及び式(4.4)と同様に、 $\gamma = 0$ の場合について、展開して見ます。

$$x = \text{Sin}[\vartheta \cdot t]$$

$$y = \text{Sin}[2\vartheta \cdot t - \Delta] = c_1 \text{Sin}[2\vartheta \cdot t] - c_2 \text{Cos}[2\vartheta \cdot t] \quad \dots(\text{参.1})$$
$$= 2c_1 \cdot x \cdot \text{Cos}[\vartheta \cdot t] - c_2 \cdot (1 - 2x^2)$$

$$[y + c_2 \cdot (1 - 2x^2)]^2 = 4c_1^2 \cdot x^2 \cdot (1 - x^2) \quad \text{ここに、} c_1 = \text{Cos}[\Delta], c_2 = \text{Sin}[\Delta]$$

- (1) 解析結果を図参A1～参A6 に示します。
- (2) $\Delta = 0$ 度 の場合、 $c_1 = 1$ 、 $c_2 = 0$ ですので、式(参1)より $y^2 = 4x^2(1-x^2)$ となり、図参A1となり、これは図 4.2-B1を90度回転した形です。
- (3) $\Delta = 90$ 度 の場合、 $c_1 = 0$ 、 $c_2 = 1$ ですので、式(参1)より $y = 2x^2 - 1$ となり、図参A4に示す様に放物線となります。これは、図 4.2-B3を90度回転した形です。
- (4) 以上の様に、**角振動数の比、 $W_x : W_y = 2 : 1$ の 図を単純に90度回転させても、 $W_x : W_y = 1 : 2$ の 図にはならないことに注意が必要です。**

所で、式(参2)に示す2つのリサージュ曲線が、式(参3)の条件を満たした場合、同一になります。

$$\begin{aligned}x_1 &= \text{Sin}[\omega_{x1} \cdot t + \gamma], & y_1 &= \text{Sin}[\omega_{y1} \cdot t + \delta] \\x_2 &= \text{Sin}[\omega_{x2} \cdot t + \gamma'], & y_2 &= \text{Sin}[\omega_{y2} \cdot t + \delta']\end{aligned} \quad \dots(\text{参.2})$$

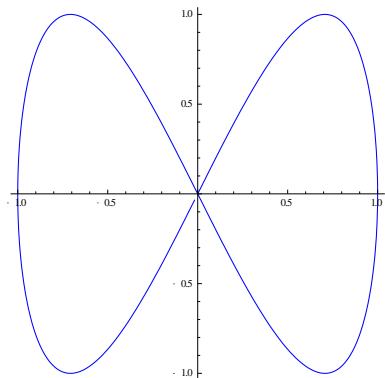


$$\begin{aligned}\omega_{x1} : \omega_{y1} = \omega_{x2} : \omega_{y2} & \quad \text{かつ} \\(\gamma - \gamma' + 2n\pi) : (\delta - \delta' + 2k\pi) &= \omega_{x1} : \omega_{y1}\end{aligned} \quad \dots(\text{参.3})$$

ここに、 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

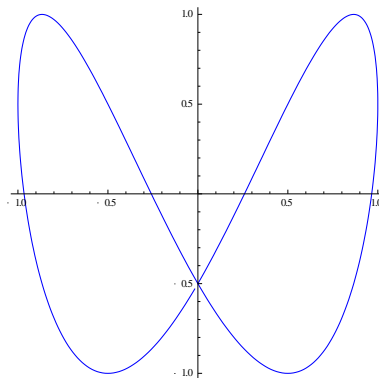
初期位相 $\gamma = 0$ 度

参考 $W_x : W_y = 1:2$ の場合



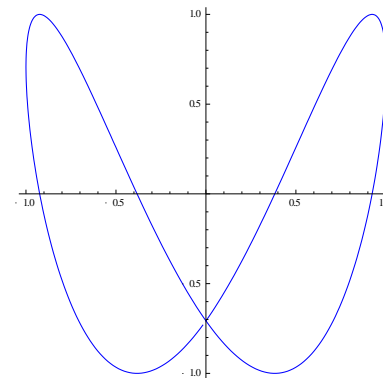
$\Delta = 0$ の場合

図 参A1 $W_x : W_y = 1:2$ の場合



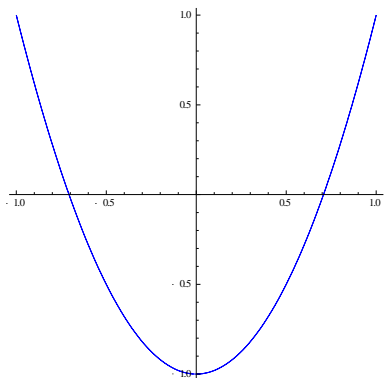
$\Delta = 30$ 度の場合

図 参A2 $W_x : W_y = 1:2$ の場合



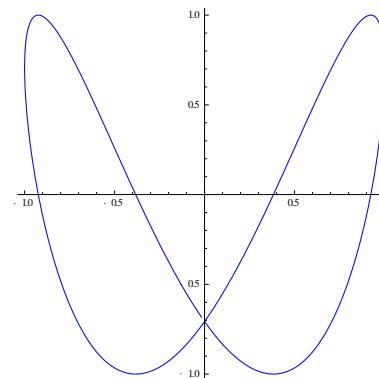
$\Delta = 45$ 度の場合

図 参A3 $W_x : W_y = 1:2$ の場合



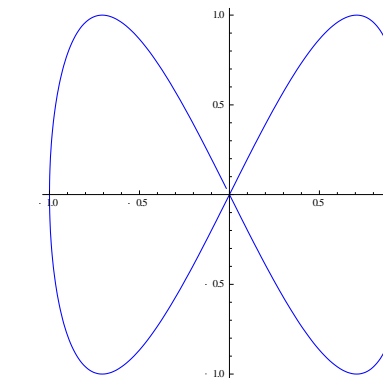
$\Delta = 90$ 度の場合

図 参A4 $W_x : W_y = 1:2$ の場合



$\Delta = 135$ 度の場合

図 参A5 $W_x : W_y = 1:2$ の場合



$\Delta = 180$ 度の場合

図 参A6 $W_x : W_y = 1:2$ の場合

4.3 リサージュ曲線の変形

前節ではリサージュ曲線の特徴を見ました。御存知の様に、その形は周期間で同じもので、時間的に減衰するものではありません。

本検討の目的は、図形の見た目の美しさを求めるものですので、減衰を伴う振動の軌跡を検討し、リサージュ曲線に減衰効果を考慮しました。このため、その軌跡はリサージュ曲線とは呼ばませんので、端に振動軌跡と記述します。

4.3.1 基本リサージュの位置情報の蓄積

式(4.1)で与えられるX及びYの位置は、各角振動数 ω_x, ω_y の逆数で与えられる1周期 T_x, T_y の最小公倍時間で、再度始点に戻ります。即ち、最小公倍周期を T_{LCM} とすると、以下となります。

$$T_x = \frac{360}{\omega_x}, T_y = \frac{360}{\omega_y} \quad \dots(4.6)$$

$$T_{LCM} = LCM[T_x, T_y]$$

ここに、 $LCM[A, B, \dots, M]$: 最小公倍数を求める関数

計算時間幅を dt とすると、 T_{LCM} 間の蓄積個数 M は、以下となります。

$$M = T_{LCM} / dt \quad \dots(4.7)$$

第 i 番目 ($1 \leq i \leq M$) の位置を各々 X_i 及び Y_i とし、原点からの距離 R_i 及びその角度を θ_i とすると、以下で与えられます。

$$X_i = x(i \cdot dt) = \text{Sin}[\omega_x \cdot i \cdot dt + \gamma], Y_i = y(i \cdot dt) = \text{Sin}[\omega_y \cdot i \cdot dt + \delta]$$

$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}, \quad \theta_i = \text{ArcCos}\left[\frac{X_i}{R_i}\right], \quad (\text{但し } Y_i \leq 0, \quad \theta_i = -\theta_i) \quad \dots(4.8)$$

また、計算終了時間を T_{stp} とすると、この間に描ける基本リサーチの個数 N は、以下となります。

$$N = \text{Int}\left[\frac{T_{stp}}{T_{LCM}}\right] + 1 \quad \dots(4.9)$$

ここに、 $\text{Int}[x]$: ガウス記号で、 x を超えない最大の整数を与える関数。例、 $\text{Int}[2.5] = 2$

4.3.2 回転の考慮

リサーチ間の回転角度を ζ (入力指定値) としますと、第 j 番目 ($1 \leq j \leq N$) の角度 ζ_j は以下となります。

$$\zeta_j = \zeta \cdot (j-1) \quad \dots(4.10)$$

また、角度の回転に伴ってリサーチ間をスムーズに結ぶために、基本リサーチ内の各点を微小回転させる必要があります。その微小角度 μ 及び第 i 番目 ($1 \leq i \leq M$) の角度 μ_i は以下となります。

$$\mu = \frac{\zeta}{M}, \quad \mu_i = \frac{\zeta}{M} \cdot i \quad \dots(4.11)$$

従って、任意時間 t での角度を $\Theta(t)$ とすると、以下で与えられます。

$$\begin{aligned}
 i &= \text{Int}[\text{Mod}[t, T_{LCM}] / dt] + 1, & j &= \text{Int}[t / T_{LCM}] + 1 \\
 \Theta(t) &= \vartheta_i + \zeta_j + \mu_i & & \dots(4.12) \\
 &= \text{ArcCos}\left[\frac{X_i}{R_i}\right] + \zeta \cdot (j-1) + \frac{\zeta}{M} \cdot i, & & (\text{但し } Y_i \leq 0, \quad \vartheta_i = -\vartheta_i)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\text{Mod}[a, b]$: a を b で割った時の余り、剰余を求める関数で、例えば、 $\text{Mod}[2, 4]=2$ 、 $\text{Mod}[15, 4]=3$ 、 $\text{Mod}[4, 4]=0$ となります。

4.3.3 減衰の考慮

式(4.8)の距離 R_i に対して減衰を考慮します。減衰率を κ とします。 $\kappa=0$ は減衰無し、 $\kappa=1$ は計算終了時間 T_{stp} で消滅することを意味します。従って、時間当たりの減衰量 $\Delta\kappa$ は以下となります。

$$\Delta\kappa = \kappa / T_{stp} \approx \kappa / (dt \cdot M \cdot N) \quad \dots(4.13)$$

従って、任意時間 t での距離 $R(t)$ は、以下となります。

$$\begin{aligned}
 i &= \text{Int}[\text{Mod}[t, T_{LCM}] / dt] + 1 & & \dots(4.14) \\
 R(t) &= R_i \cdot (1 - \Delta\kappa \cdot t)
 \end{aligned}$$

4.3.4 点(X,Y) の位置

前項までの検討結果を基に、時間 t における位置 $X(t)$, $Y(t)$ は以下で与えられます。

$$i = \text{Int}[\text{Mod}[t, T_{LCM}] / dt] + 1, \quad j = \text{Int}[t / T_{LCM}] + 1$$
$$\Theta(t) = \vartheta_i + \zeta_j + \mu_i = \text{ArcCos}\left[\frac{X_i}{R_i}\right] + \zeta \cdot (j-1) + \frac{\zeta}{M} \cdot i,$$

(但し $Y_i \leq 0$, $\theta_i = -\theta_i$) …(4.15)

$$R(t) = R_i \cdot (1 - \Delta\kappa \cdot t)$$

$$X(t) = R(t) \cdot \text{Cos}[\Theta(t)] \quad Y(t) = R(t) \cdot \text{Sin}[\Theta(t)]$$

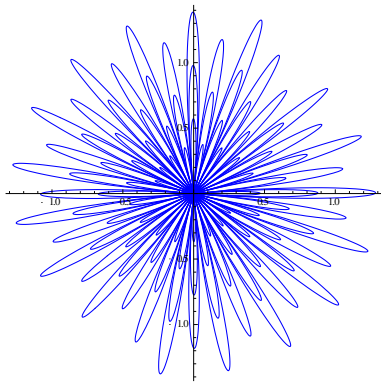
4.3.5 サンプル計算

初期位相 $\gamma = 0$ 度に設定した場合の、角振動数 W_x , W_y の比、初期位相差 Δ 、回転角度 ζ 及び減衰率 κ をパラメータとして、サンプル計算をしました。主な結果を図4.3-A1から図4.3-B4に示します。その他については、参考資料2を参照下さい。

尚、主な計算条件は以下です。

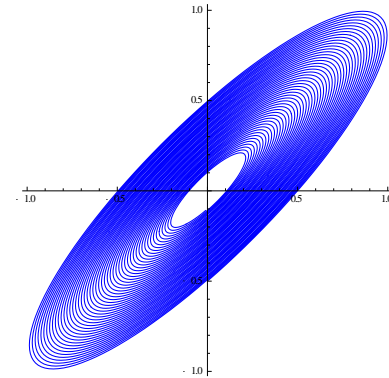
- (1) 初期位相 $\gamma = 0$ 度
- (2) 減衰率 $\kappa = 0.8$ / 回
- (3) 計算時間幅 $dt = 0.1$ 秒、 計算終了時間 $T_{\text{stp}} = 600$ 秒

初期位相 $\gamma = 0$ 度



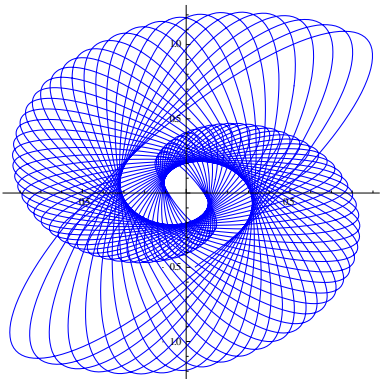
$\Delta = 0$ 度、 $\zeta = 20$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 30$ 度/s、 $\omega_y = 30$ 度/s

図 4.3-A1 $W_x:W_y=1:1$ の場合



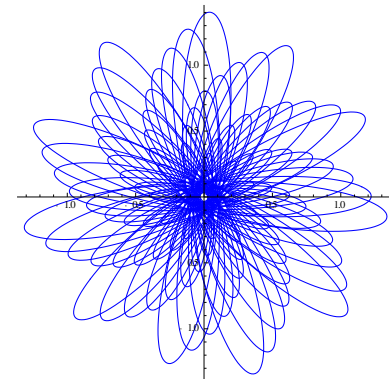
$\Delta = 0$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 30$ 度/s、 $\omega_y = 30$ 度/s

図 4.3-A2 $W_x:W_y=1:1$ の場合



$\Delta = 30$ 度、 $\zeta = 5$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 30$ 度/s、 $\omega_y = 30$ 度/s

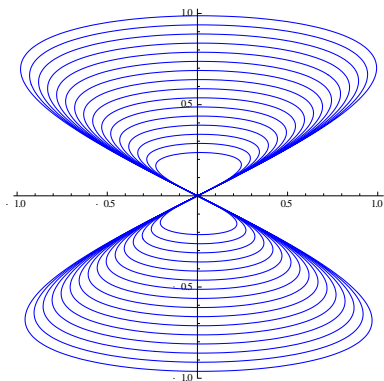
図 4.3-A3 $W_x:W_y=1:1$ の場合



$\Delta = 10$ 度、 $\zeta = 34$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 30$ 度/s、 $\omega_y = 30$ 度/s

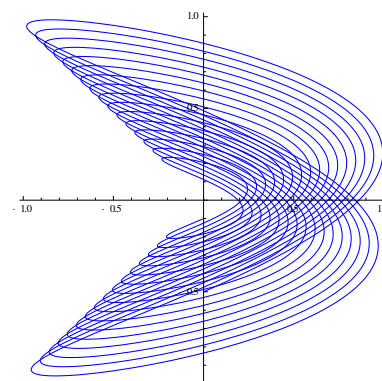
図 4.3-A4 $W_x:W_y=1:1$ の場合

初期位相 $\gamma = 0$ 度



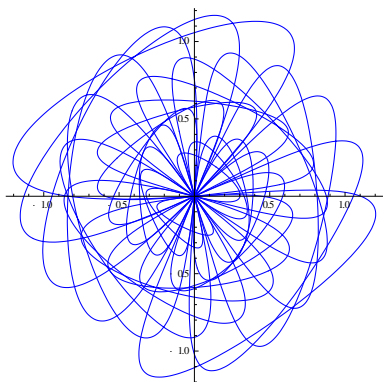
$\Delta=0$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=20$ 度/s, $\omega_y=10$ 度/s

図 4.3-B1 $W_x:W_y=2:1$ の場合



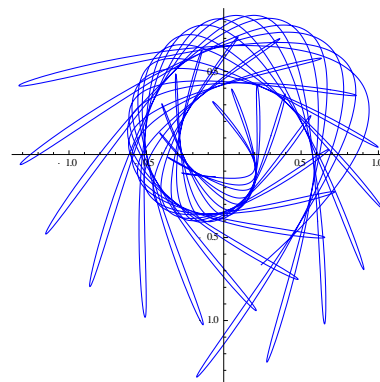
$\Delta=30$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=20$ 度/s, $\omega_y=10$ 度/s

図 4.3-B2 $W_x:W_y=2:1$ の場合



$\Delta=0$ 度、 $\zeta=20$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=20$ 度/s, $\omega_y=10$ 度/s

図 4.3-B3 $W_x:W_y=2:1$ の場合



$\Delta=45$ 度、 $\zeta=20$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=20$ 度/s, $\omega_y=10$ 度/s

図 4.3-B4 $W_x:W_y=2:1$ の場合

5. 考察

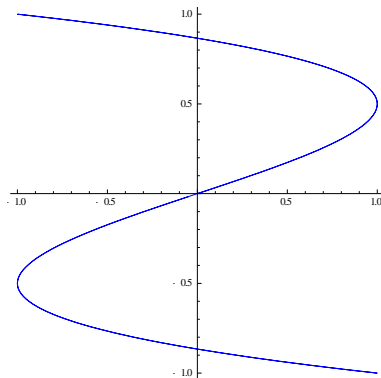
振り子の振動に着いて、色々検討してきました。その結果、以下の知見を得ました。

- (1) 運動方程式を用いた振り子の軌跡検討の結果、振り子の様な速度の遅い物体では、一般的に考えられている空気の粘性係数及び慣性係数を用いて減衰を考慮しても、抵抗が無い場合と殆ど変わらない挙動が得られました。
- (2) このため、振り子が減衰する要因は、粘性抵抗や慣性抵抗に拠るものではなく、糸を吊るしている支点での摩擦や、糸の撚りに拠るものではないかと考えられます。
- (3) リサージュ曲線に、回転や減衰の効果を考慮すると、面白い軌跡が描けることが分かりました。色々パラメータサーベイを行うと、掲載の写真の様な軌跡が再現可能ではないかと思われれます。

参考資料1

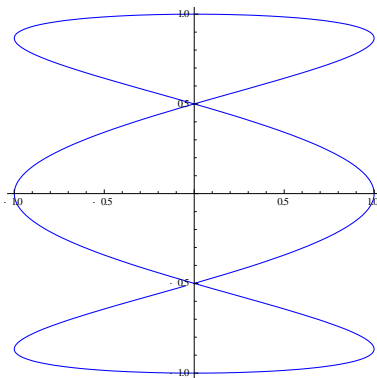
(基本リサーチ曲線)

参1 角振動数 $W_x:W_y = 3:1$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



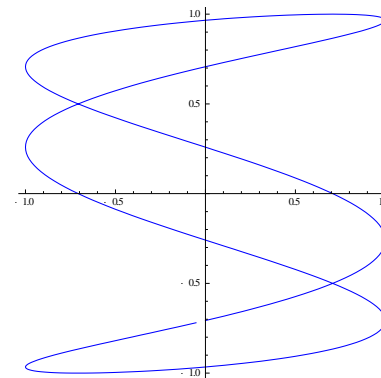
$\Delta=0$ の場合

図参1 -C1 $W_x : W_y=3:1$ の場合



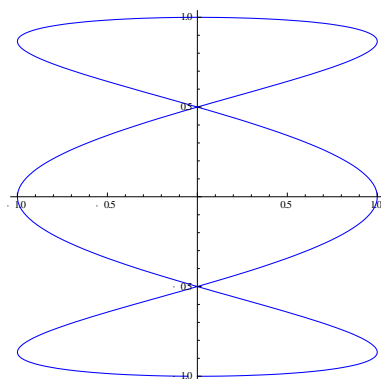
$\Delta=30$ 度の場合

図参1 -C2 $W_x : W_y=3:1$ の場合



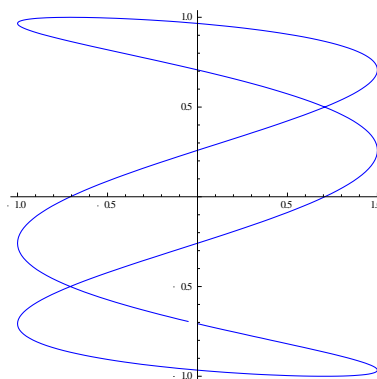
$\Delta=45$ 度の場合

図参1 -C3 $W_x : W_y=3:1$ の場合



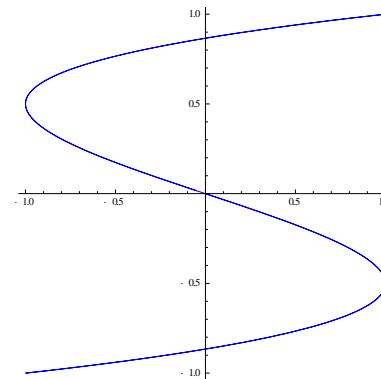
$\Delta=90$ 度の場合

図参1 -C4 $W_x : W_y=3:1$ の場合



$\Delta=135$ 度の場合

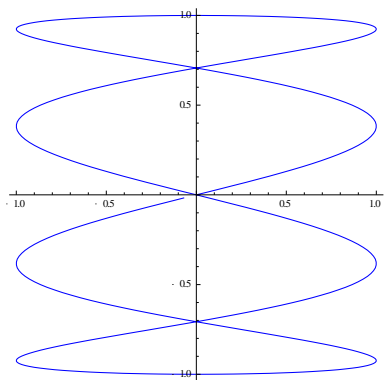
図参1 -C5 $W_x : W_y=3:1$ の場合



$\Delta=180$ 度の場合

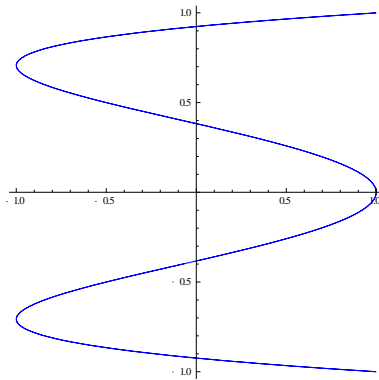
図参1 -C6 $W_x : W_y=3:1$ の場合

参1 角振動数 $W_x:W_y = 4:1$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



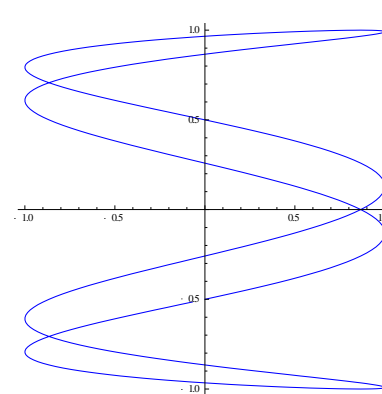
$\Delta=0$ の場合

図参1-D1 $W_x : W_y=4:1$ の場合



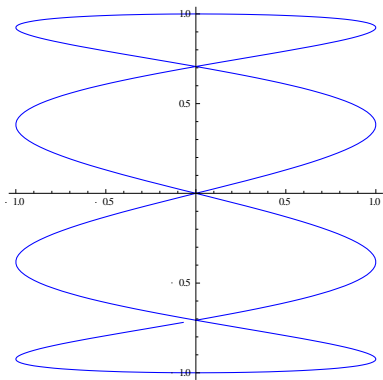
$\Delta=22.5$ 度の場合

図参1-D2 $W_x : W_y=4:1$ の場合



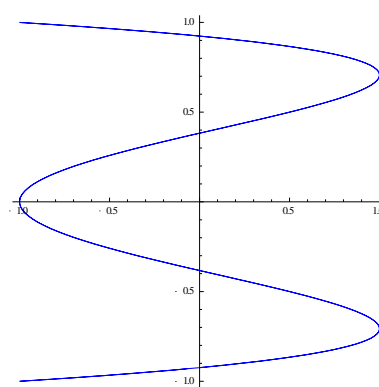
$\Delta=30$ 度の場合

図参1-D3 $W_x : W_y=4:1$ の場合



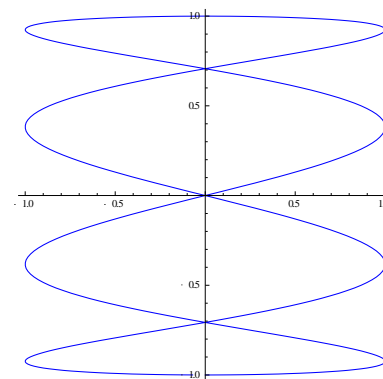
$\Delta=45$ 度の場合

図参1-D4 $W_x : W_y=4:1$ の場合



$\Delta=67.5$ 度の場合

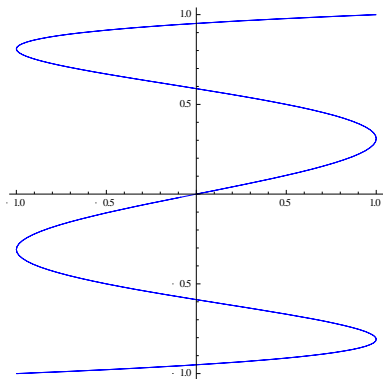
図参1-D5 $W_x : W_y=4:1$ の場合



$\Delta=90$ 度の場合

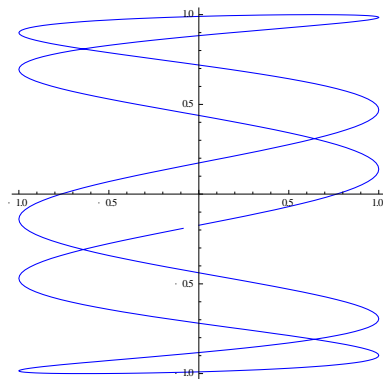
図参1-D6 $W_x : W_y=4:1$ の場合

参1 角振動数 $W_x:W_y = 5:1$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



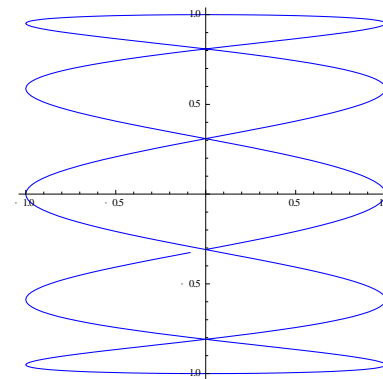
$\Delta = 0$ の場合

図参1 -E1 $W_x : W_y = 5:1$ の場合



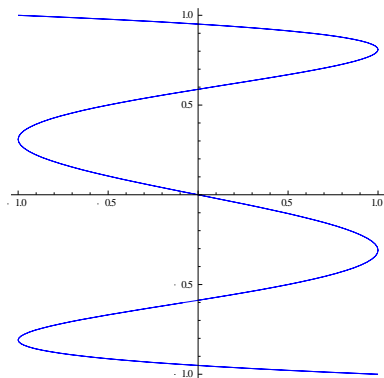
$\Delta = 10$ 度の場合

図参1 -E2 $W_x : W_y = 5:1$ の場合



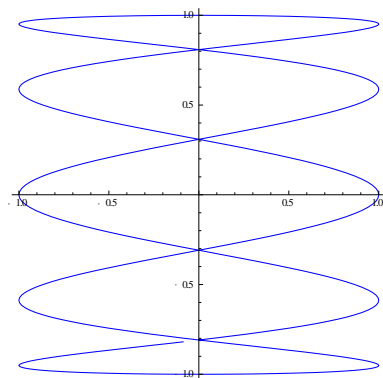
$\Delta = 18$ 度の場合

図参1 -E3 $W_x : W_y = 5:1$ の場合



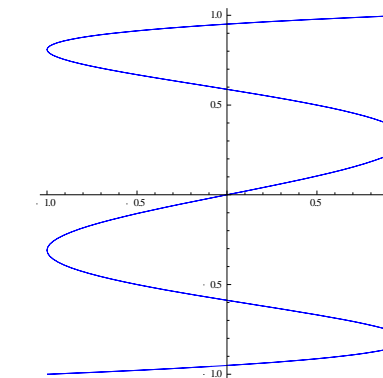
$\Delta = 36$ 度の場合

図参1 -E4 $W_x : W_y = 5:1$ の場合



$\Delta = 54$ 度の場合

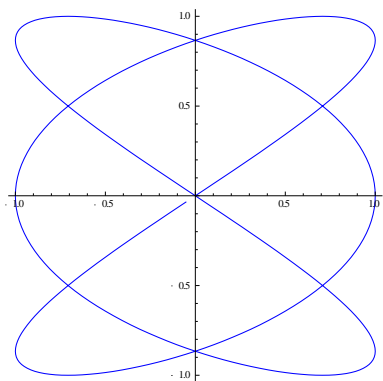
図参1 -E5 $W_x : W_y = 5:1$ の場合



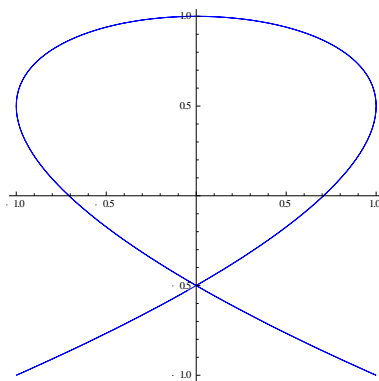
$\Delta = 72$ 度の場合

図参1 -E6 $W_x : W_y = 5:1$ の場合

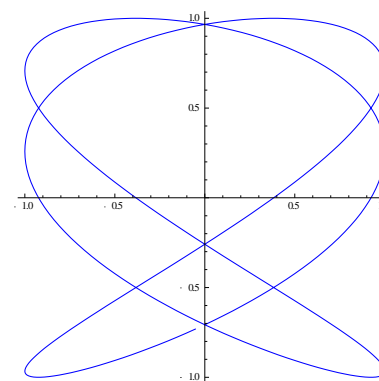
参1 角振動数 $W_x:W_y = 3:2$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



$\Delta=0$ 度の場合



$\Delta=30$ 度の場合

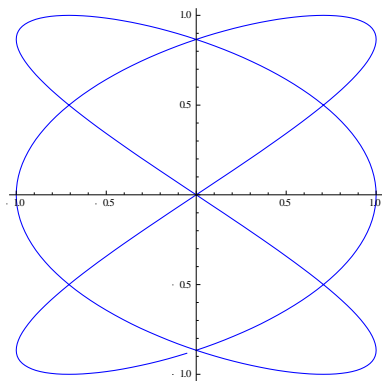


$\Delta=45$ 度の場合

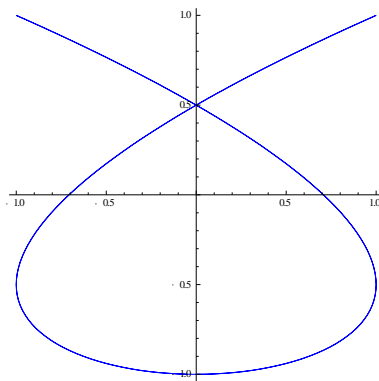
図参1 -F1 $W_x : W_y=3:2$ の場合

図参1 -F2 $W_x : W_y=3:2$ の場合

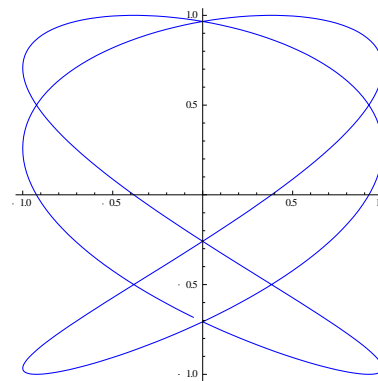
図参1 -F3 $W_x : W_y=3:2$ の場合



$\Delta=60$ 度の場合



$\Delta=90$ 度の場合



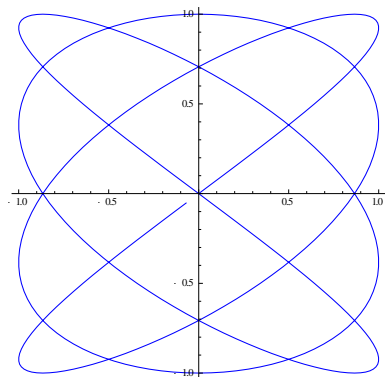
$\Delta=135$ 度の場合

図参1 -F4 $W_x : W_y=3:2$ の場合

図参1 -F5 $W_x : W_y=3:2$ の場合

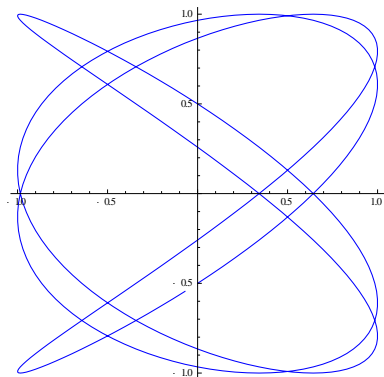
図参1 -F6 $W_x : W_y=3:2$ の場合

参1 角振動数 $W_x:W_y = 4:3$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



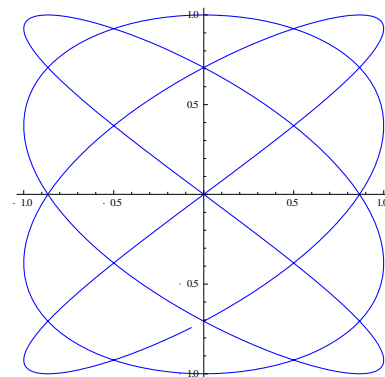
$\Delta=0$ 度の場合

図参1-G1 $W_x : W_y=4:3$ の場合



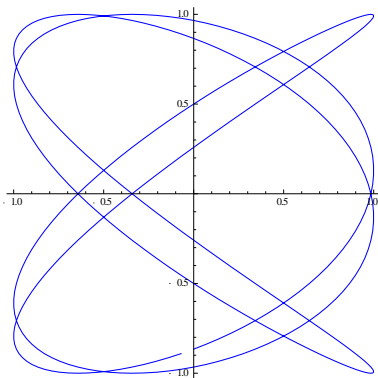
$\Delta=30$ 度の場合

図参1-G2 $W_x : W_y=4:3$ の場合



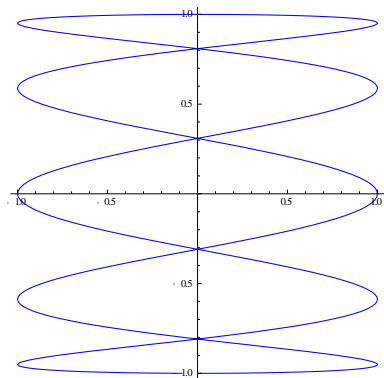
$\Delta=45$ 度の場合

図参1-G3 $W_x : W_y=4:3$ の場合



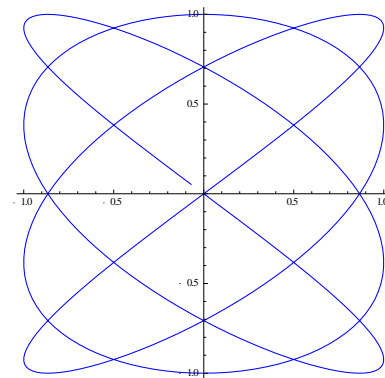
$\Delta=60$ 度の場合

図参1-G4 $W_x : W_y=4:3$ の場合



$\Delta=90$ 度の場合

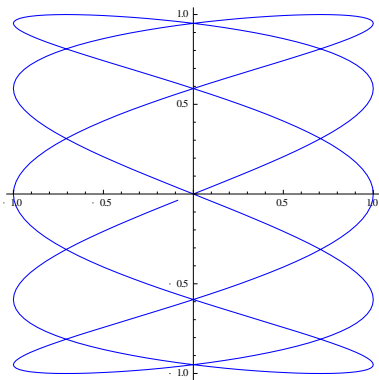
図参1-G5 $W_x : W_y=4:3$ の場合



$\Delta=180$ 度の場合

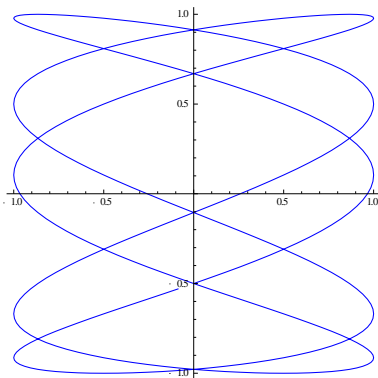
図参1-G6 $W_x : W_y=4:3$ の場合

参1 角振動数 $W_x:W_y = 5:2$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



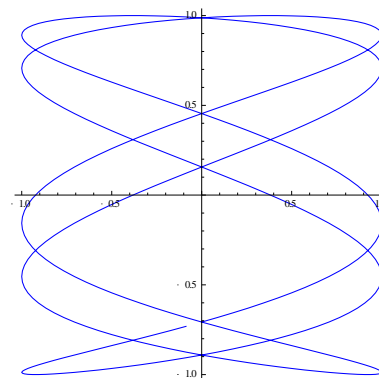
$\Delta=0$ 度の場合

図参1-H1 $W_x : W_y=5:2$ の場合



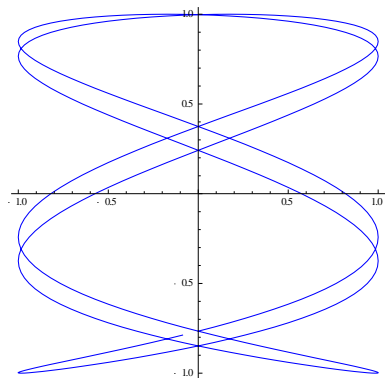
$\Delta=30$ 度の場合

図参1-H2 $W_x : W_y=5:2$ の場合



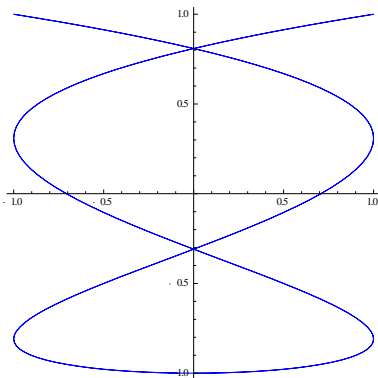
$\Delta=45$ 度の場合

図参1-H3 $W_x : W_y=5:2$ の場合



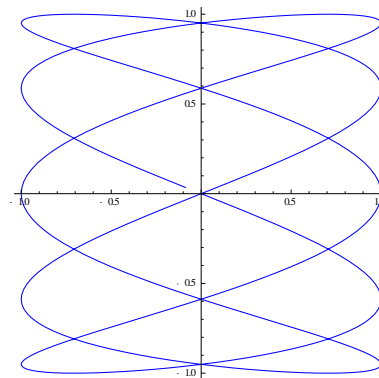
$\Delta=50$ 度の場合

図参1-H4 $W_x : W_y=5:2$ の場合



$\Delta=90$ 度の場合

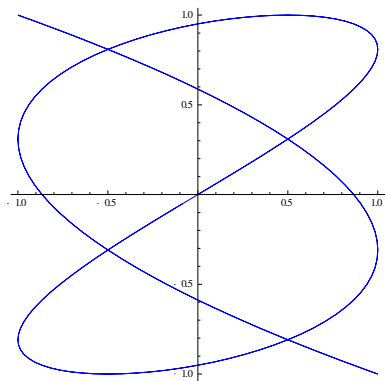
図参1-H5 $W_x : W_y=5:2$ の場合



$\Delta=180$ 度の場合

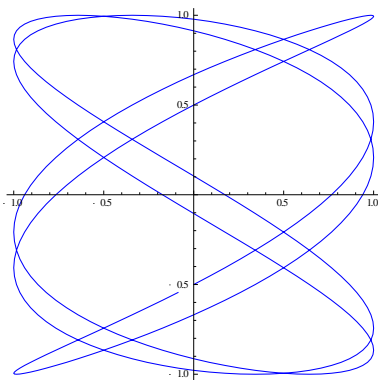
図参1-H6 $W_x : W_y=5:2$ の場合

参1 角振動数 $W_x:W_y = 5:3$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



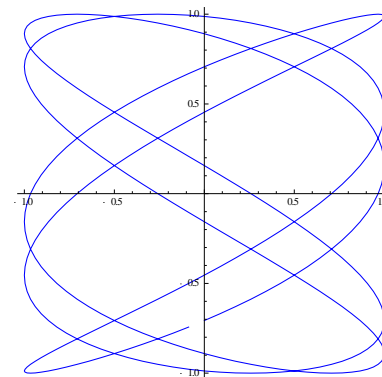
$\Delta=0$ 度の場合

図参1 -I1 $W_x : W_y=5:3$ の場合



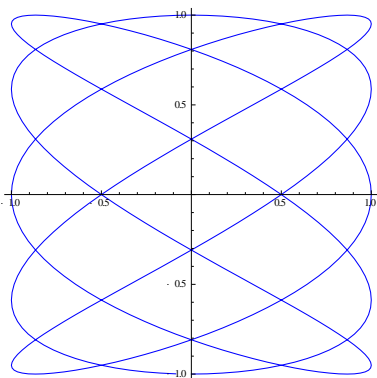
$\Delta=30$ 度の場合

図参1 -I2 $W_x : W_y=5:3$ の場合



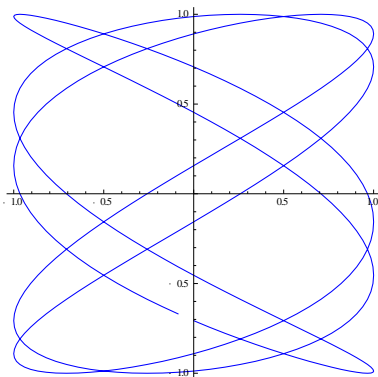
$\Delta=45$ 度の場合

図参1 -I3 $W_x : W_y=5:3$ の場合



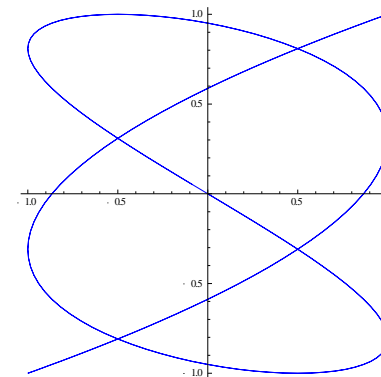
$\Delta=90$ 度の場合

図参1 -I4 $W_x : W_y=5:3$ の場合



$\Delta=135$ 度の場合

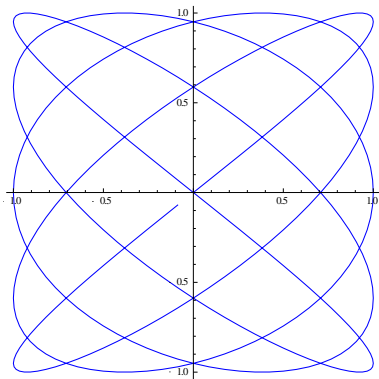
図参1 -I5 $W_x : W_y=5:3$ の場合



$\Delta=180$ 度の場合

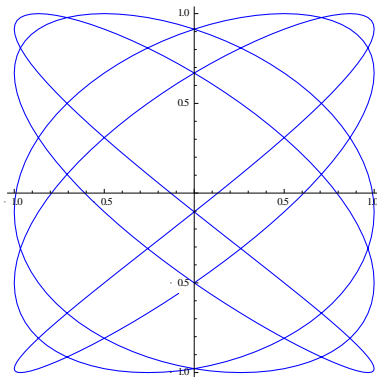
図参1 -I6 $W_x : W_y=5:3$ の場合

参1 角振動数 $W_x:W_y = 5:4$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



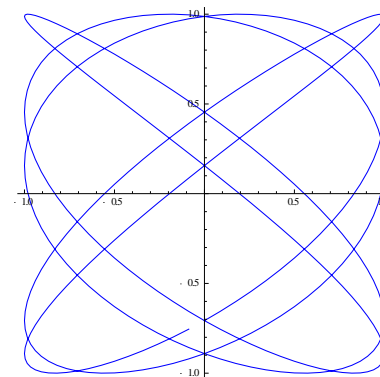
$\Delta=0$ 度の場合

図参1-J1 $W_x : W_y=5:4$ の場合



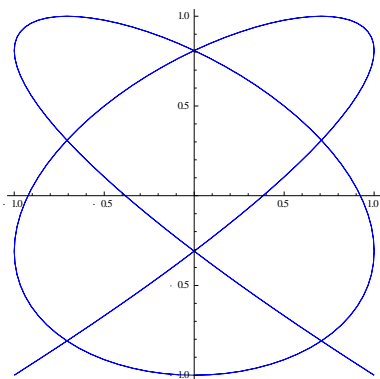
$\Delta=30$ 度の場合

図参1-J2 $W_x : W_y=5:4$ の場合



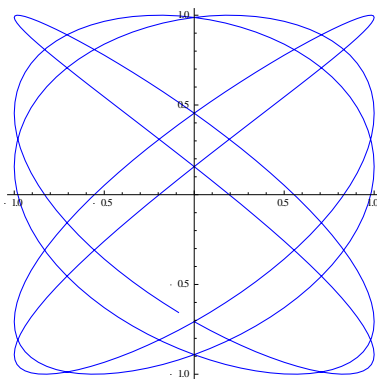
$\Delta=45$ 度の場合

図参1-J3 $W_x : W_y=5:4$ の場合



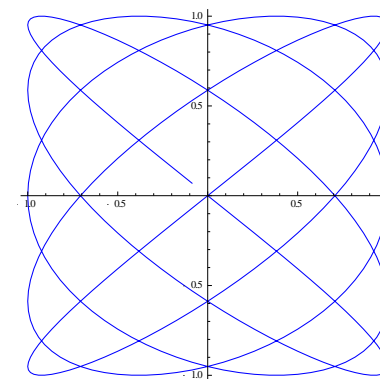
$\Delta=90$ 度の場合

図参1-J4 $W_x : W_y=5:4$ の場合



$\Delta=135$ 度の場合

図参1-J5 $W_x : W_y=5:4$ の場合



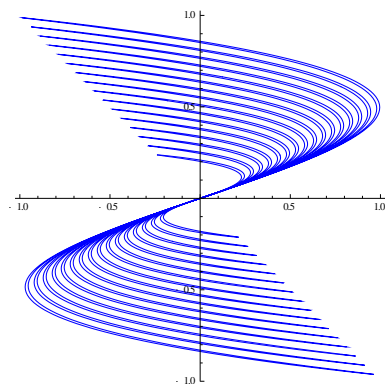
$\Delta=180$ 度の場合

図参1-J6 $W_x : W_y=5:4$ の場合 46

参考資料2

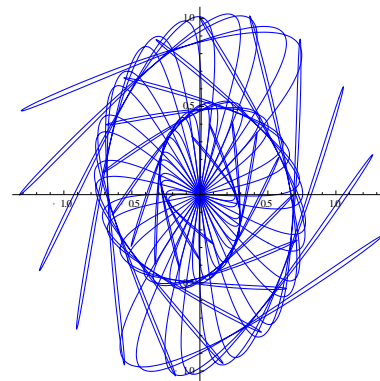
(減衰リサージュ曲線)

参2 角振動数 $W_x:W_y = 3:1$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



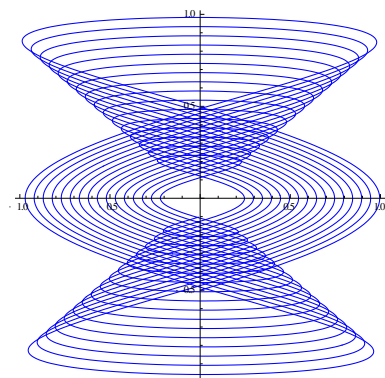
$\Delta = 0$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 30$ 度/s、 $\omega_y = 10$ 度/s

図 参2-C1 $W_x:W_y=3:1$ の場合



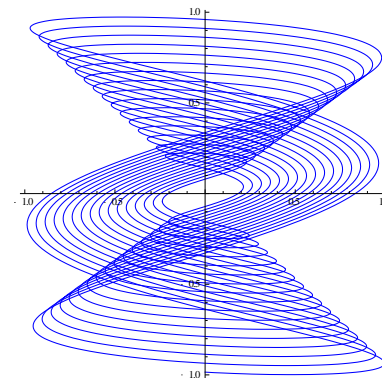
$\Delta = 0$ 度、 $\zeta = 20$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 30$ 度/s、 $\omega_y = 10$ 度/s

図 参2-C2 $W_x:W_y=3:1$ の場合



$\Delta = 30$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 30$ 度/s、 $\omega_y = 10$ 度/s

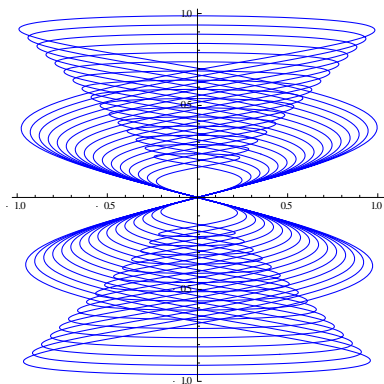
図 参2-C3 $W_x:W_y=3:1$ の場合



$\Delta = 100$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 30$ 度/s、 $\omega_y = 10$ 度/s

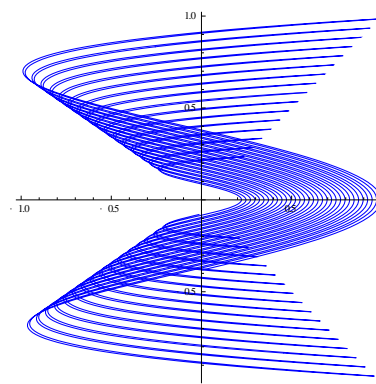
図 参2-C4 $W_x:W_y=3:1$ の場合

参2 角振動数 $W_x:W_y = 4:1$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



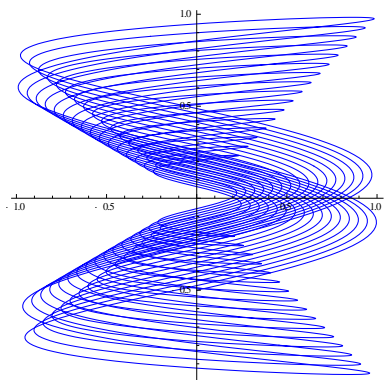
$\Delta = 0$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 40$ 度/s、 $\omega_y = 10$ 度/s

図 参2-D1 $W_x:W_y=4:1$ の場合



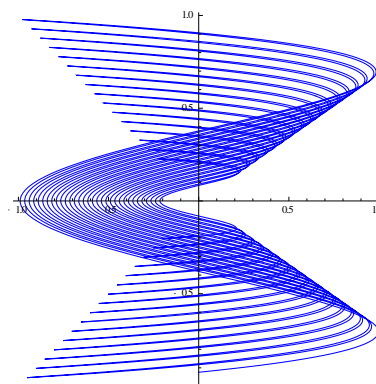
$\Delta = 22.5$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 40$ 度/s、 $\omega_y = 10$ 度/s

図 参2-D2 $W_x:W_y=4:1$ の場合



$\Delta = 30$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 40$ 度/s、 $\omega_y = 10$ 度/s

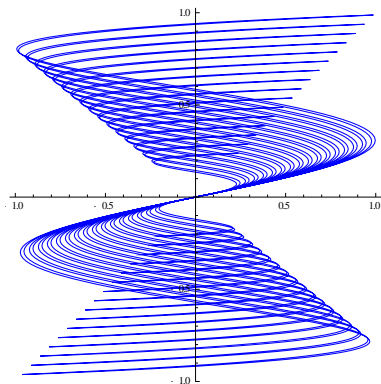
図 参2-D3 $W_x:W_y=4:1$ の場合



$\Delta = 67.5$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 40$ 度/s、 $\omega_y = 10$ 度/s

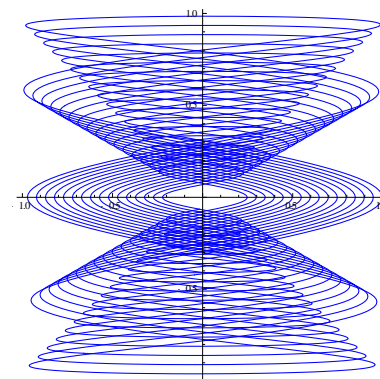
図 参2-D4 $W_x:W_y=4:1$ の場合

参2 角振動数 $W_x:W_y = 5:1$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



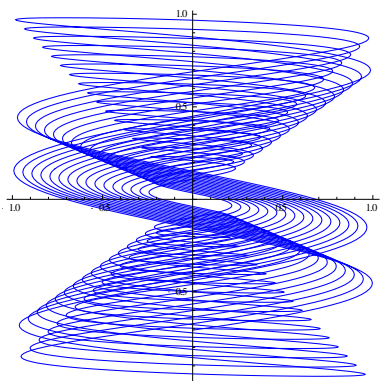
$\Delta = 0$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 50$ 度/s, $\omega_y = 10$ 度/s

図 参2-E1 $W_x:W_y=5:1$ の場合



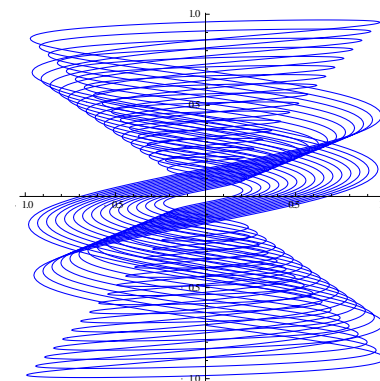
$\Delta = 18$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 50$ 度/s, $\omega_y = 10$ 度/s

図 参2-E2 $W_x:W_y=5:1$ の場合



$\Delta = 45$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 50$ 度/s, $\omega_y = 10$ 度/s

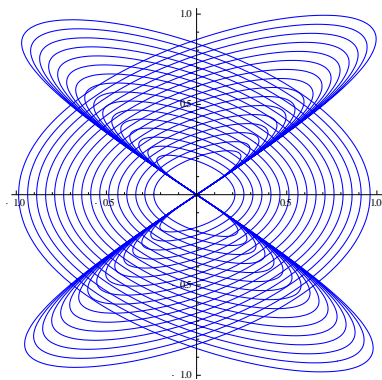
図 参2-E3 $W_x:W_y=5:1$ の場合



$\Delta = 135$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 50$ 度/s, $\omega_y = 10$ 度/s

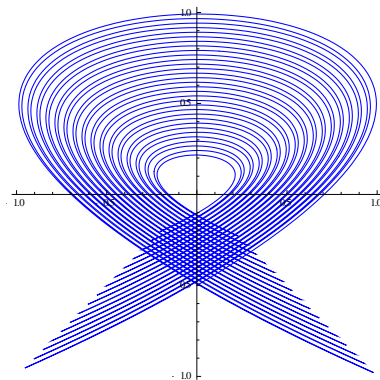
図 参2-E4 $W_x:W_y=5:1$ の場合

参2 角振動数 $W_x:W_y = 3:2$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



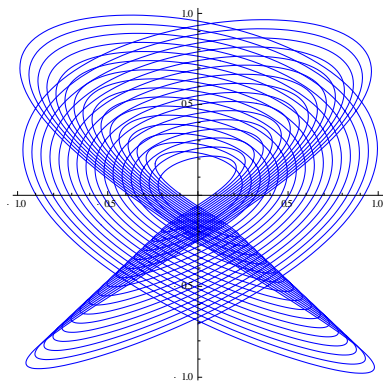
$\Delta=0$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=30$ 度/s、 $\omega_y=20$ 度/s

図 参2-F1 $W_x:W_y=3:2$ の場合



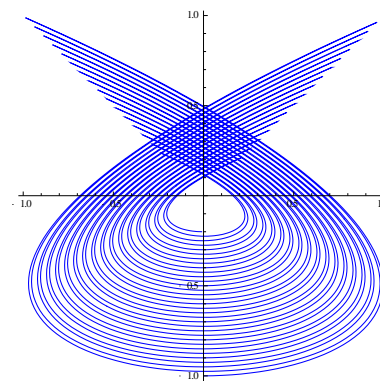
$\Delta=30$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=30$ 度/s、 $\omega_y=20$ 度/s

図 参2-F2 $W_x:W_y=3:2$ の場合



$\Delta=45$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=30$ 度/s、 $\omega_y=20$ 度/s

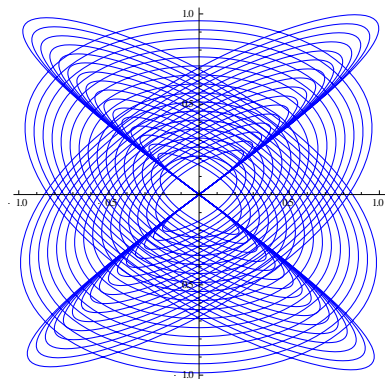
図 参2-F3 $W_x:W_y=3:2$ の場合



$\Delta=90$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=30$ 度/s、 $\omega_y=20$ 度/s

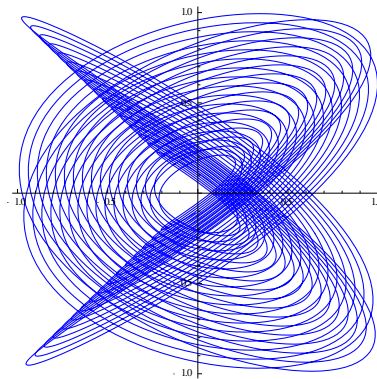
図 参2-F4 $W_x:W_y=3:2$ の場合

参2 角振動数 $W_x:W_y = 4:3$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



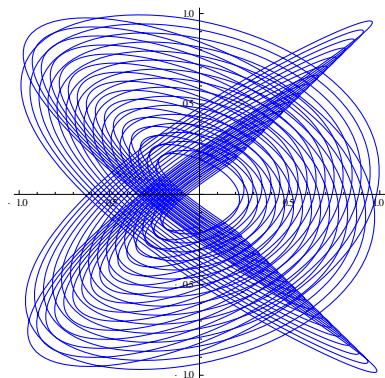
$\Delta = 0$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 40$ 度/s, $\omega_y = 30$ 度/s

図 参2-G1 $W_x:W_y=4:3$ の場合



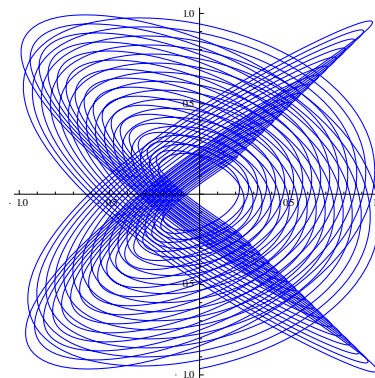
$\Delta = 30$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 40$ 度/s, $\omega_y = 30$ 度/s

図 参2-G2 $W_x:W_y=4:3$ の場合



$\Delta = 60$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 40$ 度/s, $\omega_y = 30$ 度/s

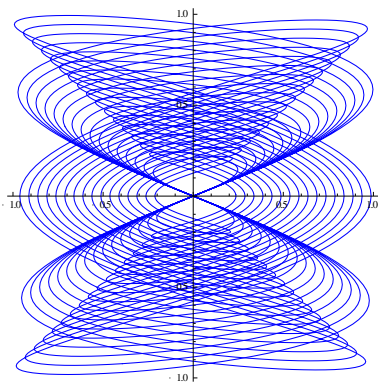
図 参2-G3 $W_x:W_y=4:3$ の場合



$\Delta = 75$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 40$ 度/s, $\omega_y = 30$ 度/s

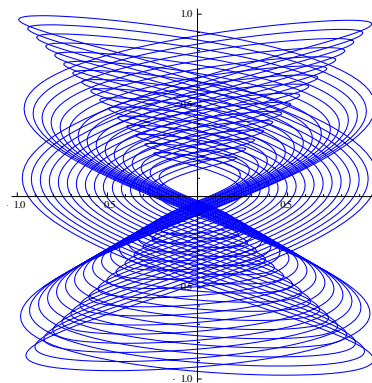
図 参2-G4 $W_x:W_y=4:3$ の場合

参2 角振動数 $W_x:W_y = 5:2$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



$\Delta=0$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=50$ 度/s, $\omega_y=20$ 度/s

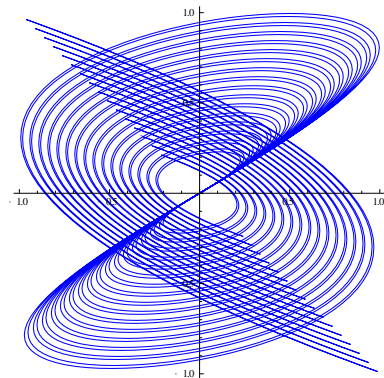
図 参2-H1 $W_x:W_y=5:2$ の場合



$\Delta=30$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=50$ 度/s, $\omega_y=20$ 度/s

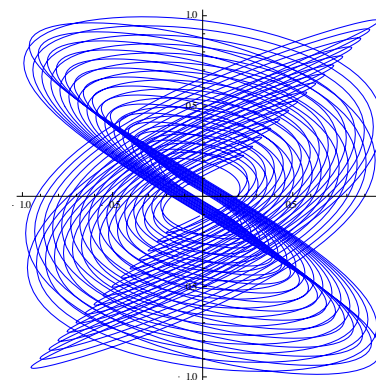
図 参2-H2 $W_x:W_y=5:2$ の場合

参2 角振動数 $W_x:W_y = 5:3$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



$\Delta=0$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=50$ 度/s, $\omega_y=30$ 度/s

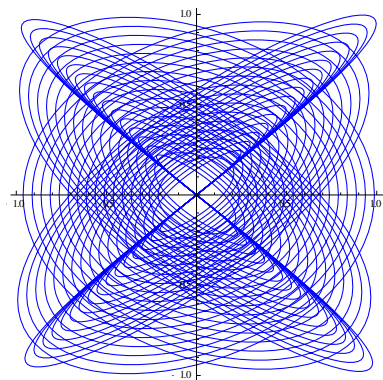
図 参2-I1 $W_x:W_y=5:3$ の場合



$\Delta=30$ 度、 $\zeta=0$ 度/回、減衰 $\kappa=0.8$
 $\omega_x=50$ 度/s, $\omega_y=30$ 度/s

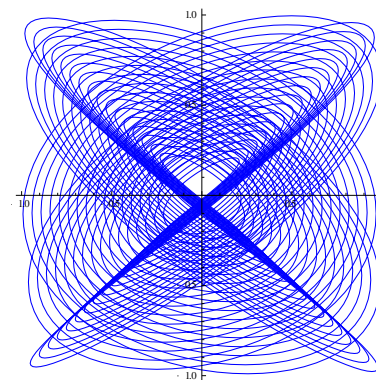
図 参2-I2 $W_x:W_y=5:3$ の場合

参2 角振動数 $W_x:W_y = 5:4$ の場合 ($\gamma = 0$ 度)



$\Delta = 0$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 50$ 度/s, $\omega_y = 40$ 度/s

図 参2-J1 $W_x:W_y=5:4$ の場合



$\Delta = 30$ 度、 $\zeta = 0$ 度/回、減衰 $\kappa = 0.8$
 $\omega_x = 50$ 度/s, $\omega_y = 40$ 度/s

図 参2-J2 $W_x:W_y=5:4$ の場合

参考資料3
(振り子曲線の写真)

