時間変化の無い非圧縮性流体の2段キャビティ挙動の試解析

レイノルズ数=100

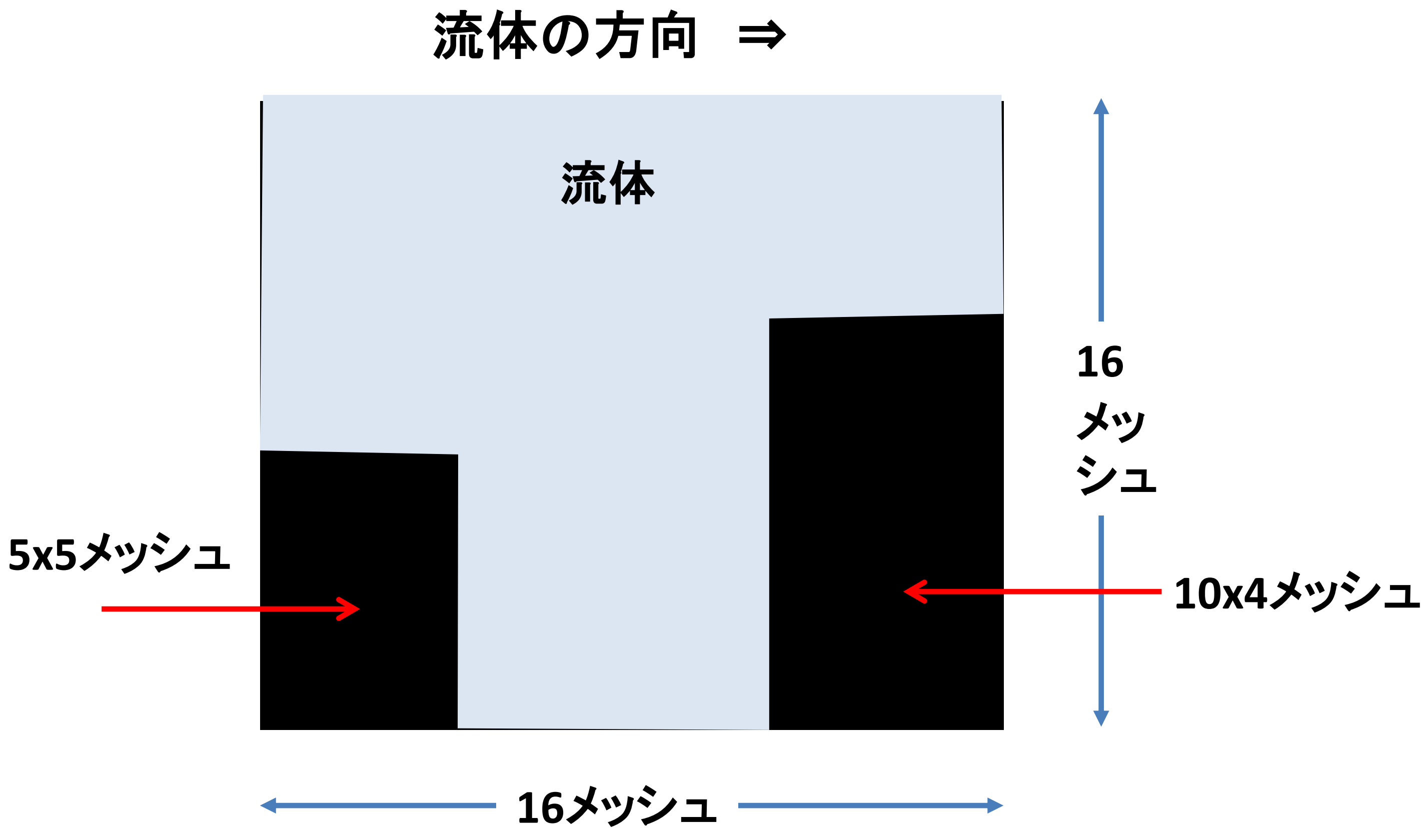
Rev.2,　2017年02月06日

（式(1)及び関連式の修正・追加）

菅原政治郎

1. 計算体系及び条件

（1） 以下の様な2段キャビティを考慮します　（全体メッシュ16×16）
（2） 障壁では流体は静止するものとします。
（3） 流体は上部で一様に流れているものとします。



2. 計算基礎方程式 (Navier-Stokes Equation)

時間変化の無い二次元非圧縮性流体(密度、粘性一定)の基礎方程式は、以下に示すものです。

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

……(1)

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \ldots\text{連続の式}$$

ここに、Re= レイノルズ数、 u:x方向流体速度、v:y方向流体速度、P : 圧力

式(1)において、圧力の項を消去し、連続の式を適用すると以下を得ます。

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

……(2)

ここで以下の式(3)に示す流れ関数ψを導入し、式(2)に代入すると式(4)を得ます。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \qquad \text{......(3)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}\right) \qquad \text{......(4)}$$

式(4)を満たすψを求めるため、微係数を以下の式(5)及び式(6)を用いて差分化します。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2h}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = \frac{\varphi_{i+2,j} - 2\varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i-2,j}}{2h^3}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = \frac{\varphi_{i,j+2} - 2\varphi_{i,j+1} + 2\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j-2}}{2h^3} \qquad \text{......(5)}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = \frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i-1,j+1} - 2\varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j-1}}{2h^3}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2} = \frac{\left(\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i-1,j+1} - 2\varphi_{i,j+1} + 2\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j+1} - \varphi_{i-1,j-1}\right)}{2h^3}$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{\varphi_{i+2,j} - 4\varphi_{i+1,j} + 6\varphi_{i,j} - 4\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-2,j}}{h^4}$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} \varphi_{i+1,j+1} - 2\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i+1,j-1} \\ -2\left(\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}\right) \\ +\varphi_{i-1,j+1} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-1,j-1} \end{pmatrix} \qquad \text{......(6)}$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{\varphi_{i,j+2} - 4\varphi_{i,j+1} + 6\varphi_{i,j} - 4\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j-2}}{h^4}$$

式(5)、(6)を式(4)に代入し、各メッシュ点(I,j)における誤差をfi,jとしますと、以下の関係が得られます。

$$f_{i,j} = \left(\text{左辺} - \text{右辺}\right) * \mathrm{Re} * 4h^4$$

$$= \mathrm{Re}\cdot\left\{\begin{aligned}&(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1})\cdot\begin{bmatrix}(\varphi_{i+2,j} - 2\varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i-2,j}) + \\ (\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i-1,j+1} - 2\varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j-1})\end{bmatrix} \\ &\qquad - (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j})\begin{bmatrix}\left(\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i-1,j+1} - 2\varphi_{i,j+1} + 2\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j+1} - \varphi_{i-1,j-1}\right) \\ + (\varphi_{i,j+2} - 2\varphi_{i,j+1} + 2\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j-2})\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}$$

$$+ 4\begin{bmatrix}(\varphi_{i+2,j} - 4\varphi_{i+1,j} + 6\varphi_{i,j} - 4\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-2,j}) \\ + 2\begin{pmatrix}\varphi_{i+1,j+1} - 2\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i+1,j-1} \\ -2\left(\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}\right) \\ + \varphi_{i-1,j+1} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-1,j-1}\end{pmatrix} \\ + (\varphi_{i,j+2} - 4\varphi_{i,j+1} + 6\varphi_{i,j} - 4\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j-2})\end{bmatrix} \qquad \text{......(7)}$$

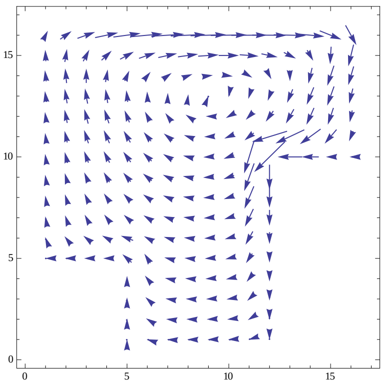
式(7)を満たす連立非線形方程式をNewton法を用いて解法します。各メッシュ点における誤差fi,j=0を満たすΨi,jが解となります。

尚、ナビエ-ストークス方程式(Navier–Stokes Equation)や正方キャビティの渦問題については、インターネットにて数多くの事例が検索できますので参照ください。

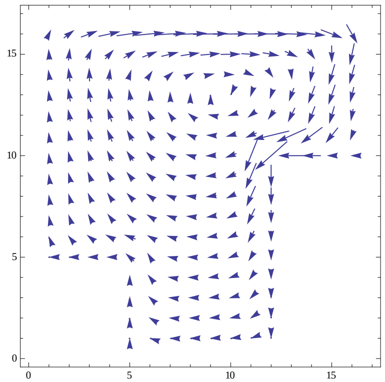
3. 計算結果

3.1 流体速度ベクトル図（同一スケール）　Ik:計算繰返し回数

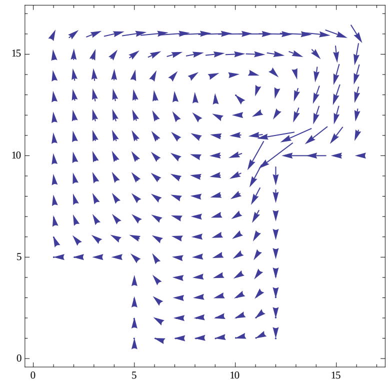
Ik=2



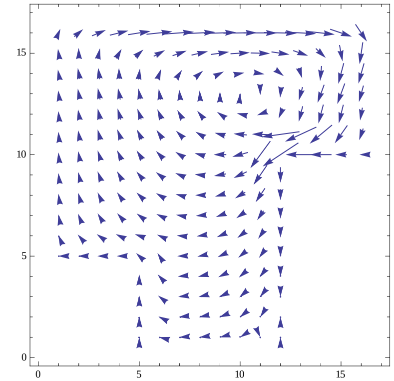
Ik=3



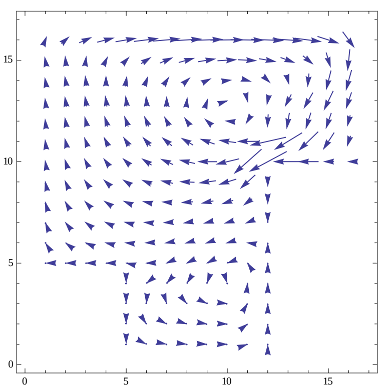
Ik=4



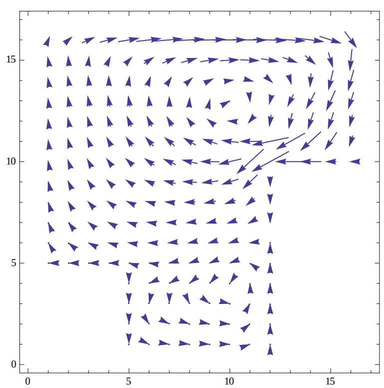
Ik=5



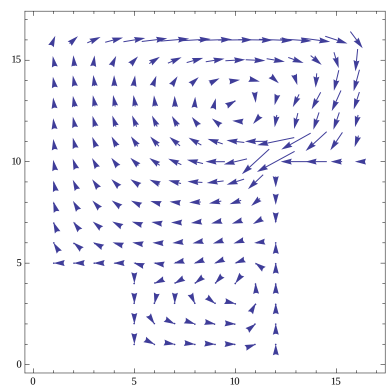
Ik=10



Ik=20

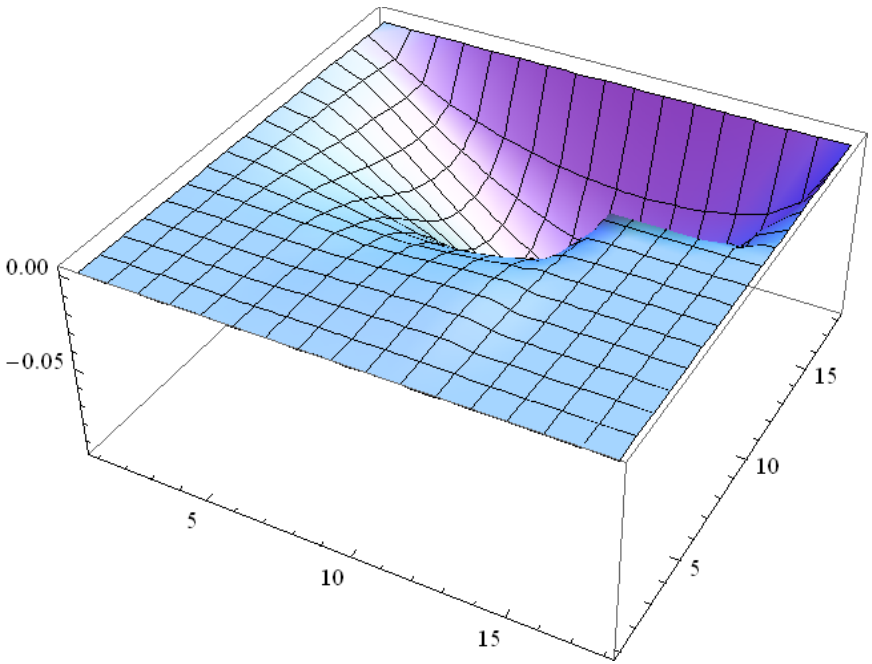


Ik=30

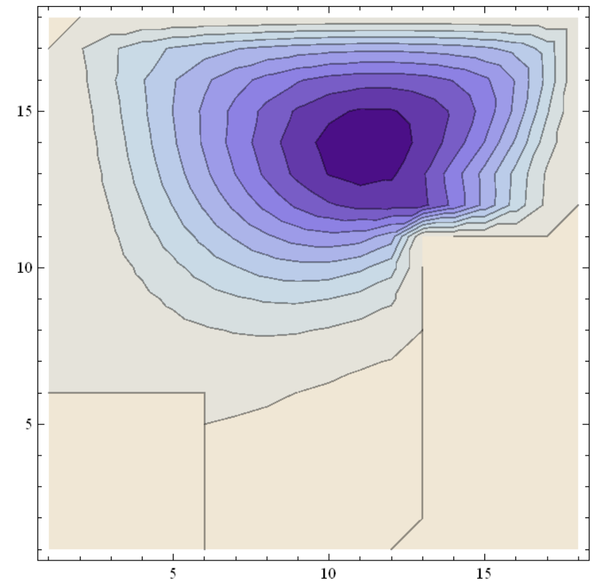


3.2 流れ関数ψ（ik=30時点）

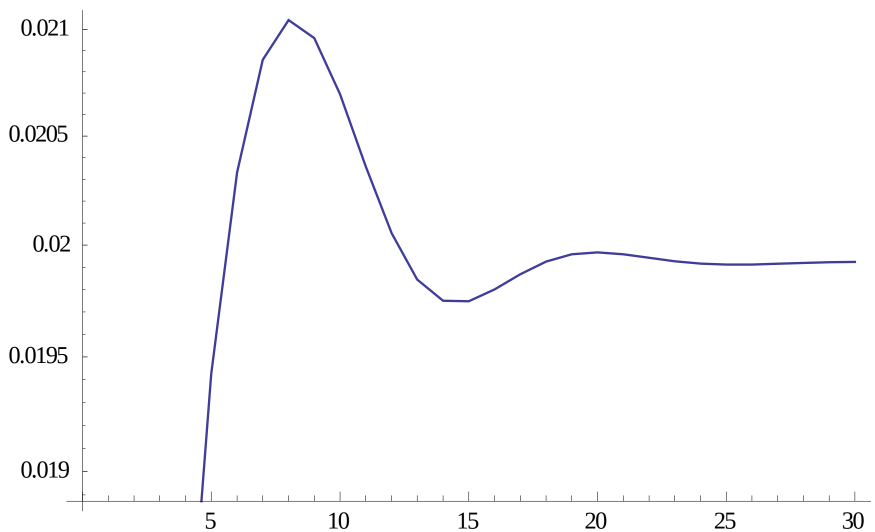
3.2.1 3次元図



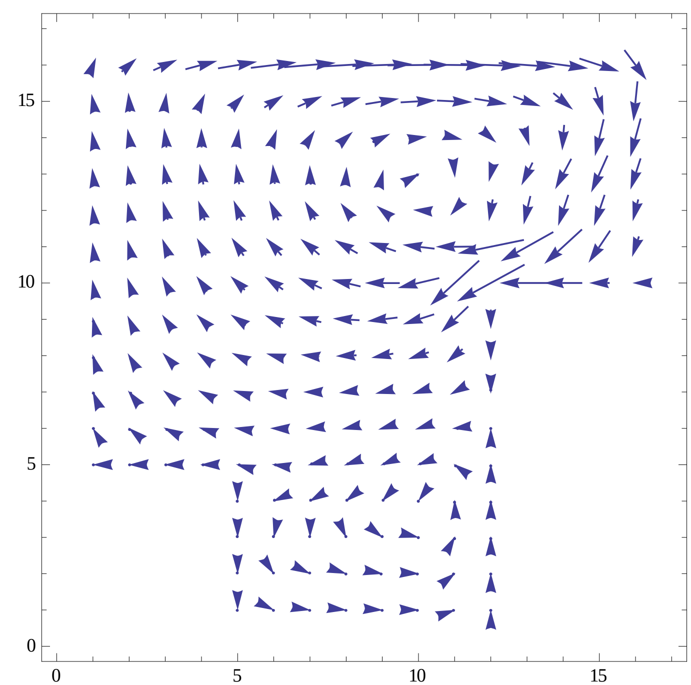
3.2.2 等高線図



3.2.3 誤差fijの履歴



最終流体ベクトル図



4. 考察

(1)正方キャビティの渦問題については、数多くの検討事例がインターネットにて参照可能ですが、２段キャビティについては、殆んど解析事例を見たことが有りません。今回、２段キャビティではどのような挙動を示すのか、興味本位で試解析をしました。

(2)繰返し計算時の速度ベクトル(同一スケール表示)の変化は、3.1項に示し、最終計算時(ik=30)のものは3.2項に示すものです。第２段キャビティ部で2次渦が生じている様に見えます。但し、計算誤差は3.2.3に示す様にそれ程の精度は無いです。(計算は30回行いましたが、収束はしていません。）

(3)小生は流体力学の専門家ではないので、何方か小生の問題について検討して頂ければ幸いです。