

# 慣性抵抗が作用する場合の 球体の運動軌跡の検討

1. 概要
2. 理論的検討
3. サンプル計算(自由落下)
4. サンプル計算(弾道運動)
5. 考察

2015(平成27).07.27  
菅原政治郎

## 1. 概要

話し好きの歯科医の治療の際に、どのような経緯であったか、映画「American sniper」の内容が話題となりました。内容は、「実在の狙撃の名手が、2000m先のターゲットを「あっ」と言う間に射殺したと言うもの」と彼は治療中に話していました。

私は内容を信じられなくて、『「あっ」と言う間』が何秒間なのかを問いただしたところ、それこそ『「あっ」と言う間』だとの返答でした。

そこで仮に3秒間掛ったとし、仮にライフルを水平にして撃った場合、3秒間に弾は、約45m落下する事に成り、ライフルの発射角度を正確に計算しなければなりません。また、発射速度は約670 m/s (時速2400 km/h) となり、空気抵抗を考慮して発射角度を調節しなければなりません。

そこで、取り扱いの簡単さを考慮して、**飛行物体は球体**と仮定し、それが空気中を飛行する場合に、**速度の二乗の抵抗を受ける(慣性抵抗)場合の、軌跡を検討しました。**

## 2. 理論的検討

### 2-1 運動方程式

抵抗が速度の二乗に比例すると仮定した場合の球体の運動方程式は以下となります。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\mathbf{g} - k|\mathbf{v}|\mathbf{v} \quad (2-1)$$

ここに、 $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  とします。

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

ここに、 $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{v}$  はそれぞれ、球体の位置、重力加速度、及び速さを示すベクトルです。

$m$  は球体の質量、 $k$  は慣性抵抗指標

$$k = c_0 \rho A, \quad c_0 = 0.5 (\text{空気の場合の抵抗係数})$$

$A$  = 物体の断面積、 $\rho$  = 空気の密度

(註: 式(2-1)においてベクトル $\mathbf{v}$ の二乗としますと、スカラーになりますので、 $\mathbf{v}$ の絶対値 $|\mathbf{v}|$ とベクトル $\mathbf{v}$ の積として、全体として、ベクトルとしました。)

## 2-2 (X, Y)座標での運動方程式

式(2-1)を(x,y)座標を用いて表現すると、x方向及びy方向の運動方程式は以下と成ります。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c' \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (2-2)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g - c' \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (2-3)$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_o \cdot \cos \alpha = vx_o, \quad x(0) = px_o \quad (2-4)$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_o \cdot \sin \alpha = vy_o, \quad y(0) = py_o \quad (2-5)$$

ここに、 $c' = k/m$

ここで、計算の初期条件として、球体は初速度  $v_0$  で水平となす角を  $\alpha$  とします。  
また発射位置を( $P_{x0}$ ,  $P_{y0}$ ) とします。

## 2-3 実際の計算

式(2-2)～(2-5)を連立微分方程式により、x位置、y位置を時間  $t$  の関数として算出します。

計算に当たっては、**Mathematica** の微分方程式の数値解を求める **NDSolve** を使用しました。

以下は、実際に組込んだ関数です。

```
NDSolve[{x''[t] == -c'*Sqrt[x'[t]^2 + y'[t]^2]*x'[t],  
y''[t] == -c'*Sqrt[x'[t]^2 + y'[t]^2]*y'[t] - g,  
x'[0] == vxo, x[0] == pxo, y'[0] == vyo, y[0] == pyo},{x, y},{t,0,tstp]}];
```

### 3. サンプル計算 (自由落下)

#### 3-1 終端速度の検討

霧雨、雨滴、霰(あられ)、雹(ひょう)の直径と、空気の抵抗係数  $c_0$  をパラメータにして、終端(最終)速度を求めてみました。また、参考に硬式ボールについても同様に終端速度を求めました。以下は、用いた数値です。(初速度は0です。)

##### 3-1.1 諸量

空気の密度:  $1.205 \text{ kg/m}^3$ 、重力加速度:  $9.80665 \text{ m/s}^2$

空気の抵抗係数  $c_0 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$

表3-1 計算諸量

| 名称     | 直径(m)  | 断面積( $\text{m}^2$ )   | 体積( $\text{m}^3$ )     | 質量(浮力無)kg              | 質量(浮力有) kg             |
|--------|--------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 霧雨1    | 0.0001 | $7.85 \times 10^{-9}$ | $5.26 \times 10^{-13}$ | $5.24 \times 10^{-10}$ | $5.23 \times 10^{-10}$ |
| 霧雨2    | 0.0005 | $1.96 \times 10^{-7}$ | $6.54 \times 10^{-11}$ | $6.54 \times 10^{-8}$  | $6.54 \times 10^{-8}$  |
| 雨滴     | 0.002  | $3.14 \times 10^{-6}$ | $4.19 \times 10^{-9}$  | $4.19 \times 10^{-6}$  | $4.18 \times 10^{-6}$  |
| 霰(あられ) | 0.005  | $1.96 \times 10^{-5}$ | $6.54 \times 10^{-8}$  | $6.54 \times 10^{-5}$  | $6.54 \times 10^{-5}$  |
| 雹(ひょう) | 0.02   | $3.14 \times 10^{-4}$ | $4.19 \times 10^{-6}$  | $4.19 \times 10^{-3}$  | $4.18 \times 10^{-3}$  |
| 硬式ボール  | 0.0734 | $4.23 \times 10^{-3}$ | $2.07 \times 10^{-4}$  | 0.145                  | 0.145                  |

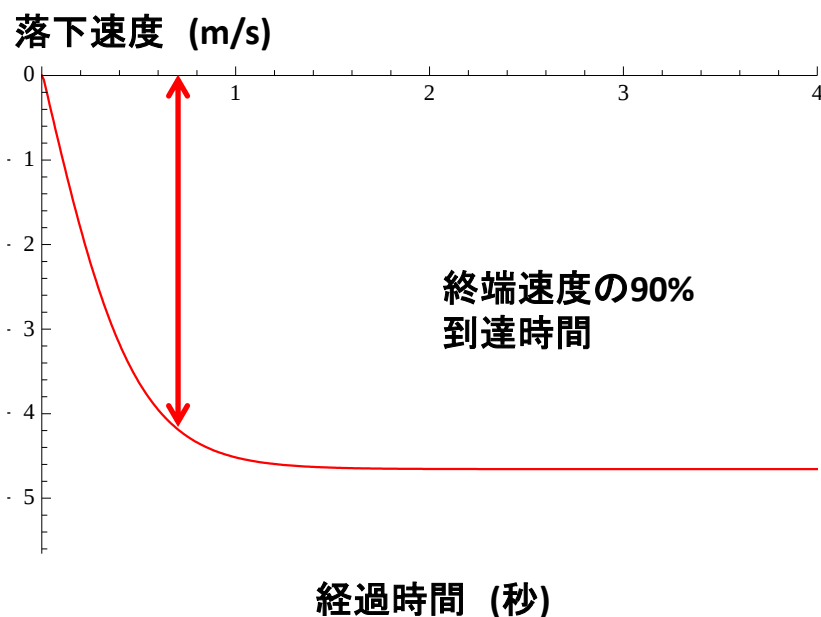
## 3-2 評価結果 終端速度 $V_{final}$

計算式の妥当性をチェックする一方法として、理論値と計算結果との比較が有ります。理論値は、式(2-1)で  $md^2r/dt^2 = 0$  から得られます。即ち、以下です。

$$V_{final} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (3-1)$$

### 3-2.1 雨滴の終端速度

空気の抵抗係数  $c_0 = 0.5$  の場合の雨滴(直径2mm、重さ約4mg)の終端速度の時間変化を図3-1に示します。



後述掲載の表3-2に示すように、計算結果及び理論値共に、終端速度は4.66 m/sでした。計算では、終端速度の90%に至る時間は、約0.71秒です。

左図の様に、終端速度の90%以降の落下速度は、だらだらとした時間挙動と成ることが分かります。

雨粒の大きさにも因りますが、生活実感として、終端速度が4.66m/sと言うのは少し大きい様に感じます。恐らく落下中に雨滴が変形して抵抗係数が大きくなり、終端速度はもう少し小さくなるように感じます。

図3-1 雨滴の終端速度

### 3-2.2 硬式ボールの終端速度

空気の抵抗係数  $c_0 = 0.5$  の場合の硬式ボール(直径7.34cm、重さ約145g)の終端速度の時間変化を図3-2に示します。表3-1に示す数値は、公認ボールの数値です。

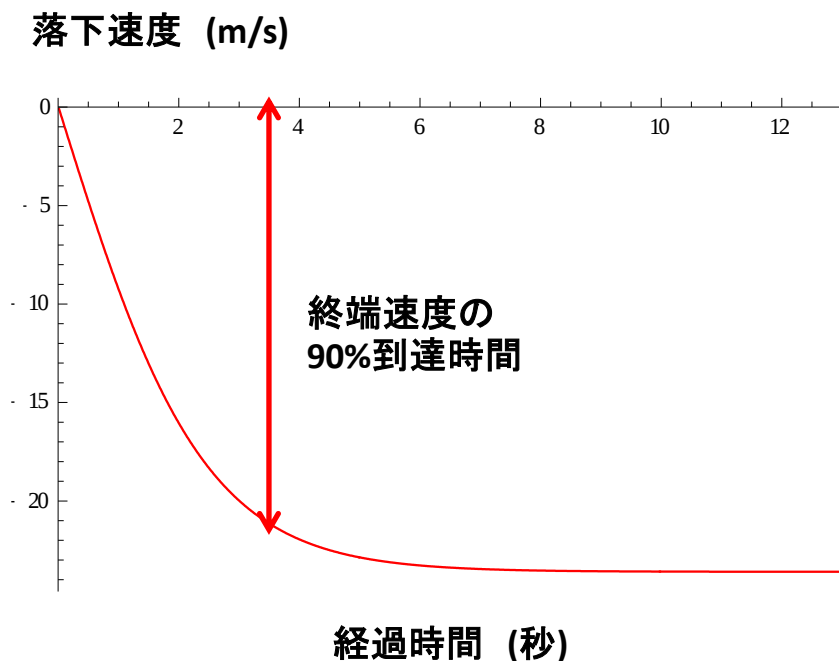


図3-2 硬式ボールの終端速度

後述掲載の表4-2に示すように、計算結果及び理論値共に、終端速度は23.60m/sでした。計算では、終端速度の90%に至る時間は、約3.55秒です。

左図の様に、雨滴の場合と同様、終端速度の90%以降の落下速度は、だらだらとした時間挙動と成ることが分かります。

硬式ボールは落下の際、球体が変形することはないので、抵抗係数  $c_0$  としてどの値が妥当であるかは、実験で確かめられる必要があります。(多くの文献で使用されている数値は、0.5です。)

ちなみに、3.55秒間で落下する距離は約 47 m です。

### 3-2.3 評価結果の一覧 終端速度

表3-2 計算結果の一覧

(計算値及び理論値の単位は m/s、時刻は秒です)

| 名称         |         | 霧雨 <sub>1</sub><br>(0.1 mm) | 霧雨 <sub>2</sub><br>(0.5mm) | 雨滴<br>(2 mm) | 霰<br>(5 mm) | 雹<br>(2 cm) | ボール<br>(7.34 cm) |
|------------|---------|-----------------------------|----------------------------|--------------|-------------|-------------|------------------|
| C0=<br>0.1 | 計算値     | 2.33                        | 5.21                       | 10.41        | 16.46       | 32.92       | 54.76            |
|            | 理論値     | 2.33                        | 5.21                       | 10.41        | 16.46       | 32.92       | 52.76            |
|            | 90%到達時刻 | 0.36                        | 0.79                       | 1.56         | 2.48        | 4.95        | 7.95             |
| 0.2        | 計算値     | 1.65                        | 3.68                       | 7.36         | 11.64       | 23.28       | 37.31            |
|            | 理論値     | 1.65                        | 3.68                       | 7.36         | 11.64       | 23.28       | 37.31            |
|            | 90%到達時刻 | 0.26                        | 0.56                       | 1.11         | 1.78        | 3.51        | 5.61             |
| 0.3        | 計算値     | 1.34                        | 3.01                       | 6.01         | 9.50        | 19.00       | 30.46            |
|            | 理論値     | 1.34                        | 3.01                       | 6.01         | 9.50        | 19.00       | 30.46            |
|            | 90%到達時刻 | 0.22                        | 0.46                       | 0.92         | 1.43        | 2.86        | 4.59             |
| 0.4        | 計算値     | 1.16                        | 2.60                       | 5.21         | 8.23        | 16.46       | 26.38            |
|            | 理論値     | 1.16                        | 2.60                       | 5.21         | 8.23        | 16.46       | 26.38            |
|            | 90%到達時刻 | 0.13                        | 0.39                       | 0.79         | 1.23        | 2.46        | 4.0              |
| 0.5        | 計算値     | 1.04                        | 2.33                       | 4.66         | 7.36        | 14.72       | 23.60            |
|            | 理論値     | 1.04                        | 2.33                       | 4.66         | 7.36        | 14.72       | 23.60            |
|            | 90%到達時刻 | 0.17                        | 0.36                       | 0.71         | 1.1         | 2.21        | 3.55             |

### 3-2.4 終端速度の評価結果の考察

- (1) 表3-2に示す様に、種々の雨滴及び硬式ボールに対して、空気の抵抗係数を変化させた場合でも、終端速度の計算値は理論値と同じで、精度が良いことが分かります。
- (2) 終端速度の90%到達時間は、落下後かなり早い時点である事が分かります。
- (3) 雨滴の様に、落下途中で変形するものに対しては、終端速度の推定は大きめに出るようになります。例えば、表3-2の霧雨1での終端速度は約 1.0 m/s です。この数値は、「たゆとう」と表現される霧雨に対して持っている生活実感としての霧雨の落下速度よりかなり大きい様に感じます。

## 4. サンプル計算 (弾道運動)

前章では自由落下の場合を対象に、計算式の妥当性を検証しました。本章では、検証した計算式を用いて、野球ボール及びライフルの弾道を計算してみます。

### 4-1 野球ボールの弾道

#### 4-1.1 評価結果 (その1)

ピッチャーが投げたボール(表3-1の公認硬式ボール)を、バッターが秒速42 m/s (時速 151 km/h)で45度の角度で打ち返した時の軌跡を、抵抗係数 $c_0 = 0.1$ の場合で求めました。結果を図4-1.1に示します。(フェンス位置と高さ(4m)は東京ドームの大きさを参考として示しました。)

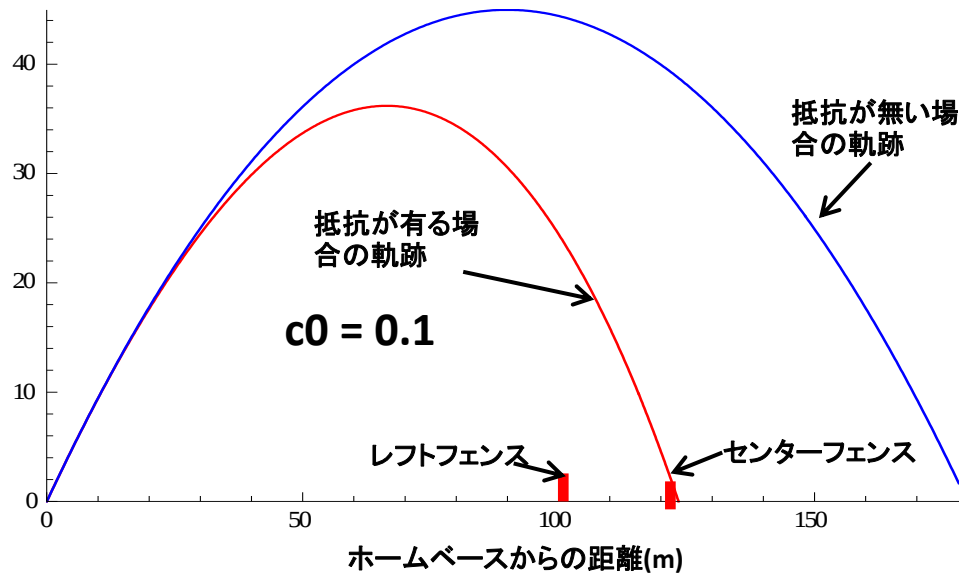


図4-1.1 ボール軌跡 ( $c_0=0.1$ )

空気抵抗の有無を見るため、空気抵抗の無い場合を参考に示しました。抵抗の無い場合(青色)、ボールは約180m飛びます。東京ドームでは勿論特大ホームランですが、抵抗係数 $c_0 = 0.1$ の場合(赤色)、ぎりぎりでセンターオーバーのホームランと成ります。両着地点の差は、約60mになります。

## 4-1.2 評価結果 (その2)

空気抵抗が無い場合、「打球の飛距離が一番大きいのは、打上げ角度が45度の時」である事は、高校の物理の時間に習ったような気がします。抵抗が有る場合はどうなりますでしょうか。

このため、角度と抵抗係数をパラメータとして検討しました。結果は以下の通りです。

表4-1 抵抗係数と打上げ角度に対する飛距離の解析結果

|      |     | 打上げ角度  |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|      |     | 36     | 37     | 38     | 39     | 40     | 41     | 42     | 43     | 44     | 45     | 46     |
| 抵抗係数 | 0.1 | 121.45 | 122.15 | 122.75 | 123.25 | 123.65 | 123.75 | 123.95 | 123.86 | 123.67 | 123.39 | 122.84 |
|      | 0.2 | 96.45  | 96.80  | 97.08  | 97.29  | 97.28  | 97.34  | 97.18  | 96.96  | 96.67  | 96.30  | 95.87  |
|      | 0.3 | 80.94  | 81.22  | 81.31  | 81.35  | 81.21  | 81.13  | 81.00  | 80.70  | 80.45  | 80.03  | 79.56  |
|      | 0.4 | 70.32  | 70.34  | 70.42  | 70.34  | 70.22  | 70.15  | 69.93  | 69.66  | 69.26  | 68.91  | 68.50  |
|      | 0.5 | 62.34  | 62.36  | 62.33  | 62.26  | 62.15  | 62.00  | 61.80  | 61.49  | 61.21  | 60.82  | 60.38  |

上記赤枠で示す様に、空気抵抗  $c_0$  が大きくなるにつけ、飛距離の最長到達点に対する打上げ角度は、45度より小さい方向に移行して行くことが分かります。

## 4-1.2 考察

- (1) 表4-1に示す様に、抵抗係数により飛距離が違ってきます。抵抗係数が0.1の場合、東京ドームでホームランになり、「わあー」と言う大歓声が沸き上がる打球が、0.5の場合、平凡なセンターフライに終わり、「あー」と言う深いため息に変わります。
- (2) インターネットで検索した範囲では、球体に対する空気の抵抗係数  $c_0$  は0.5近辺の数値が使用されています。どの位の抵抗係数になるかは、今後の更なる実験が必要になるのではないかと思います。

## 4-2 ライフルの弾道

さて、話は一番最初に戻り、「あっという間」に2000m先のターゲットをライフルで射撃する場合、どのような事に成るかを検討しました。

### 4-2.1 計算仮定

- (1) ライフル弾の速度は音速以上になりますが、衝撃波による減速は無いものとし、慣性抵抗のみが作用するとします。
- (2) 発射時に反動衝撃により、発射角度がずれますが、それは無いとします。
- (3) 発射から着地まで、途中、風や雨等の天候の影響は無いものとしします。
- (4) 弾は細長いものですが、球体とし、質量は仮想的なものとしします。

### 4-2.2 計算諸量

- (1) ライフル弾は、射程距離が1800m～2300mある14.5mmx114mmの弾薬を参考に、直径を14.5mmとしました。
- (2) 弾の質量は100gとしました。(直径が14.5mmで質量が100gである球体の密度は62.64 g/cm<sup>3</sup>となります。理科年表による最大密度はイリジウム、オスミウム、の22.5 g/cm<sup>3</sup> ですので、上記の値は非現実的な仮想弾丸となります。)
- (3) 発射初速は、800 m/s と1600 m/s の二種類でサーベイしました。
- (4) 発射角度は、初速度に応じて設定しました。
- (5) 発射高さは、1mとします。
- (6) 空気の抵抗係数は、硬式ボールと同様、 $c_0 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ を用いました。

### 4-2.3 評価結果 その1 (発射速度 800 m/s)

発射角度 = 1.1度～1.5度、抵抗係数  $c_0 = 0.1 \sim 0.5$  をパラメータとしました。結果の一部を図4-2.1～4-2.4及び、表4-2.1に示します。尚、弾が地中に入った場合は、以降の計算は停止しました。

- (1) 図4-2.1は、発射角度 = 1.2度、抵抗係数  $c_0 = 0.1$  の場合の軌跡です。参考に抵抗が無い場合の軌跡も掲載しました。抵抗の有る場合が、抵抗の無い場合に比べて軌跡が左に寄るのは、Y方向に比べてX方向の抵抗の効果が大きいと考えられます。この角度及び抵抗係数であれば、2000m到達地点でのY位置は2.1mですので、殺傷可能性は高いと考えられます。
- (2) 図4-2.2は、発射角度 = 1.3度、抵抗係数  $c_0 = 0.1$  の場合の軌跡です。2000m到達地点でのY位置は5.6mですので、殺傷可能性は低いと考えられます。
- (3) 図4-2.3は、発射角度 = 1.3度、抵抗係数  $c_0 = 0.2$  の場合の軌跡です。弾は2000m地点に到達していませんので、当たりません。上図と本図は同じ打上げ角度ですので、抵抗係数でかなりの飛距離に違いが出て来ます。
- (4) 図4-2.4は、発射角度 = 1.5度、抵抗係数  $c_0 = 0.2$  の場合の軌跡です。弾は2000m地点に到達していませんので、当たりません。

結果の一覧を表4-2.1に示します。結果より判断すると、2000m到達時の弾丸の速度は300m/s以上有り、殺傷能力は十分と考えられますが、「あっという間」に2000m先のターゲットを殺傷するには、発射角度の厳密な設定と、空気抵抗の読みを正確にしなければならないし、確度の高い殺傷は殆んど不可能と考えられます。

## 4-2.3 評価結果 その1

表4-2.1 ライフル弾の軌跡の評価結果 (発射速度 800m/s:時速 2880km/h)

| 発射<br>角度 | 抵抗係数<br>c0 | 2000m   |        | 着地点の情報    |            |               | 備考 |
|----------|------------|---------|--------|-----------|------------|---------------|----|
|          |            | 到達時間(秒) | Y位置(m) | 時刻<br>(秒) | 飛距離<br>(m) | 弾丸速度<br>(m/s) |    |
| 1.1度     | 0.1        | 3.071   | -1.3   | 2.981     | 1950.0     | 542           | 地中 |
| 1.2度     | 0.1        | 3.071   | 2.2    | 3.221     | 2079.8     | 529           |    |
|          | 0.2        | 3.825   | -13.3  | 3.032     | 1697.4     | 407           | 地中 |
| 1.3度     | 0.1        | 3.075   | 5.6    | 3.459     | 2204.0     | 516           |    |
|          | 0.2        | 3.825   | -9.9   | 3.243     | 1781.8     | 394           | 地中 |
| 1.4度     | 0.1        | 3.075   | 9.1    | 3.696     | 2324.7     | 504           |    |
|          | 0.2        | 3.825   | -6.3   | 3.452     | 1862.7     | 381           | 地中 |
| 1.5度     | 0.1        | 3.075   | 19.0   | 3.93      | 2441.1     | 492           |    |
|          | 0.2        | 3.825   | -2.9   | 3.658     | 1939.9     | 370           | 地中 |

発射速度 = 800 m/s

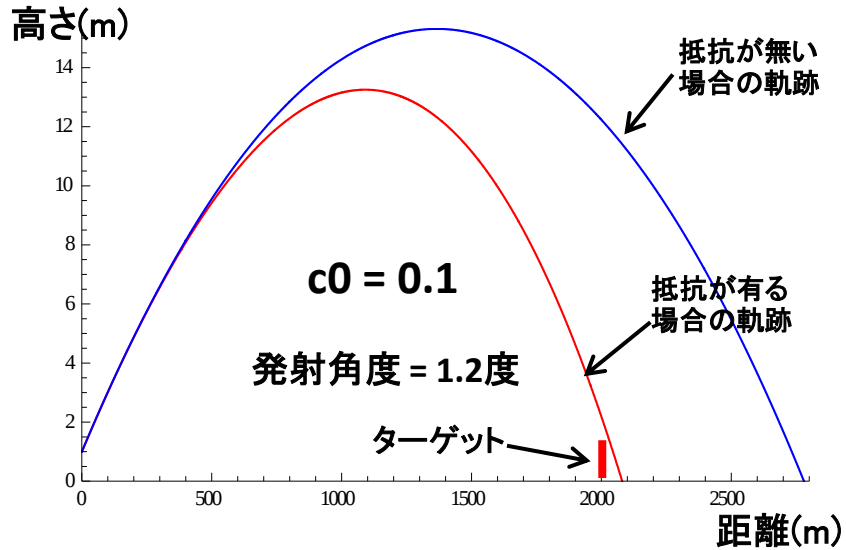


図4-2.1 ライフル弾  $c0 = 0.1$

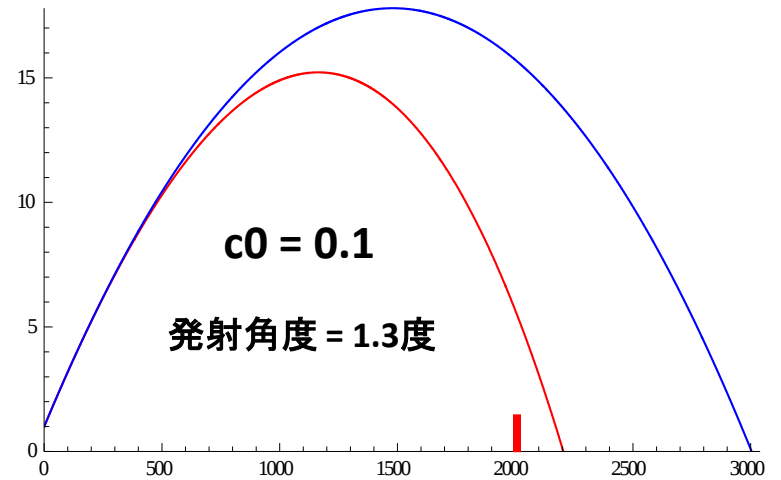


図4-2.2 ライフル弾  $c0 = 0.1$

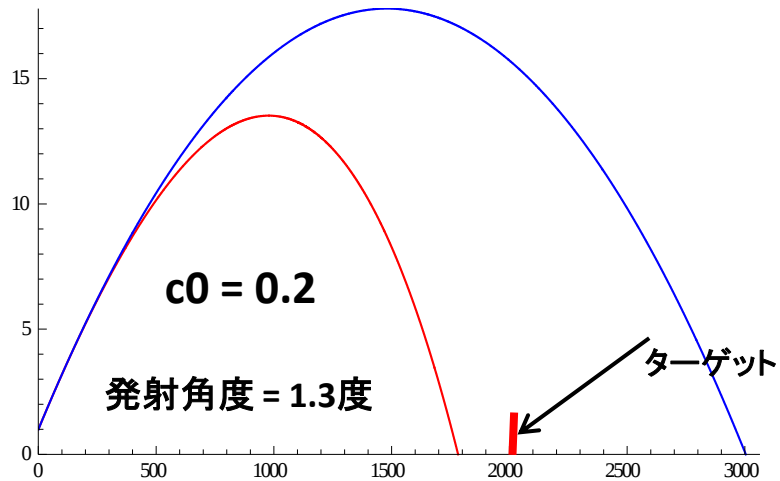


図4-2.3 ライフル弾  $c0 = 0.2$

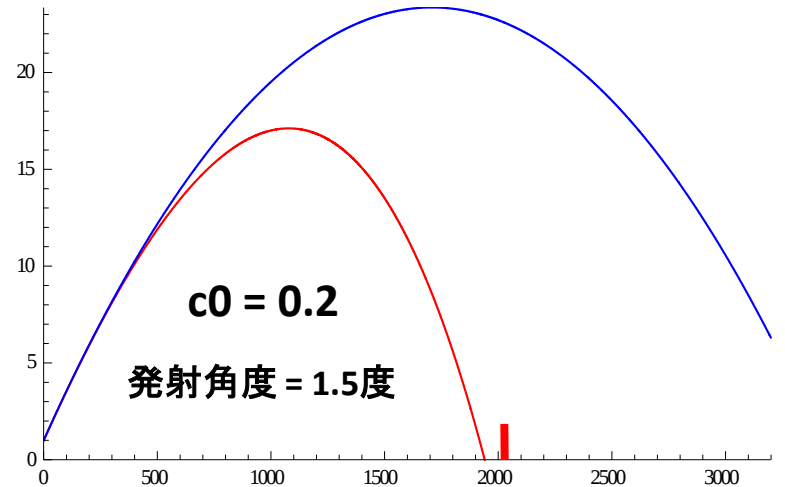


図4-2.4 ライフル弾  $c0 = 0.2$

#### 4-2.4 評価結果 その2 (発射速度 1600 m/s)

発射速度が倍の 1600 m/s としましたので、発射角度を小さくし、発射角度 = 0.6、0.5、0.4、0.3度、抵抗係数  $c_0 = 0.1$ 、0.2、0.3、0.4、0.5をパラメータとしました。結果の一部を図4-2.5～4-2.8及び、表4-2.2に示します。

- (1)図4-2.5は、発射角度 = 0.6度、抵抗係数  $c_0 = 0.3$  の場合の軌跡です。2000m 到達地点でのY位置は1.8mですので、殺傷可能性は高いと考えられます。
- (2)図4-2.6は、発射角度 = 0.56度、抵抗係数  $c_0 = 0.3$  の場合です。この場合、弾は 2000mに到達しません。
- (3)図4-2.7は、発射角度 = 0.4度、抵抗係数  $c_0 = 0.2$  の場合の軌跡です。2000m 到達地点でのY位置は0.9mですので、殺傷可能性は高いと考えられます。
- (4)図4-2.8は、発射角度 = 0.3度、抵抗係数  $c_0 = 0.1$  の場合の軌跡です。2000m 到達地点でのY位置は1.3mですので、殺傷可能性は高いと考えられます。

結果の一覧を表4-2.2に示します。上図には、比較的殺傷可能性が高い場合を掲載しましたが、表に示す様に、当たらない場合の方が多いのです。

結果より判断しますと、2000m到達時の弾丸の速度は450m/s以上有り、殺傷能力は十分と考えられます。又、「あっという間」に2000m先のターゲットに弾は到達します。但し、発射速度が 800 m/s の場合と同様、殺傷するには、発射角度の厳密な設定と、空気抵抗の読みを正確にしなければならないし、殆んど不可能と考えられます。

## 4-2.4 評価結果 その2

表4-2.2 ライフル弾の軌跡の評価結果 (発射速度 1600m/s:時速5760 km/h)

| 発射<br>角度 | 抵抗係数<br>c0 | 2000m   |        | 着地点の情報    |            |               | 備考 |
|----------|------------|---------|--------|-----------|------------|---------------|----|
|          |            | 到達時間(秒) | Y位置(m) | 時刻<br>(秒) | 飛距離<br>(m) | 弾丸速度<br>(m/s) |    |
| 0.6度     | 0.1        | 1.535   | 11.8   | 3.032     | 3395.3     | 814           |    |
|          | 0.2        | 1.91    | 7.9    | 2.762     | 2549.7     | 580           |    |
|          | 0.3        | 2.41    | 1.76   | 2.572     | 2077.6     | 463           |    |
|          | 0.4        | 3.075   | -8.3   | 2.427     | 1769.8     | 391           | 地中 |
| 0.5度     | 0.1        | 1.536   | 8.1    | 2.6       | 3030.8     | 876           |    |
|          | 0.2        | 1.911   | 4.4    | 2.395     | 2327.4     | 634           |    |
|          | 0.3        | 2.41    | -1.7   | 2.247     | 1920.0     | 508           | 地中 |
| 0.4度     | 0.1        | 1.535   | 4.8    | 2.157     | 2627.3     | 948           |    |
|          | 0.2        | 1.911   | 0.92   | 2.014     | 2073.6     | 701           |    |
|          | 0.3        | 2.41    | -5.2   | 1.906     | 1737.0     | 567           | 地中 |
| 0.3度     | 0.1        | 1.536   | 1.3    | 1.704     | 2178.1     | 1038          |    |
|          | 0.2        | 1.911   | -2.6   | 1.618     | 1779.4     | 787           | 地中 |

発射速度 = 1600 m/s

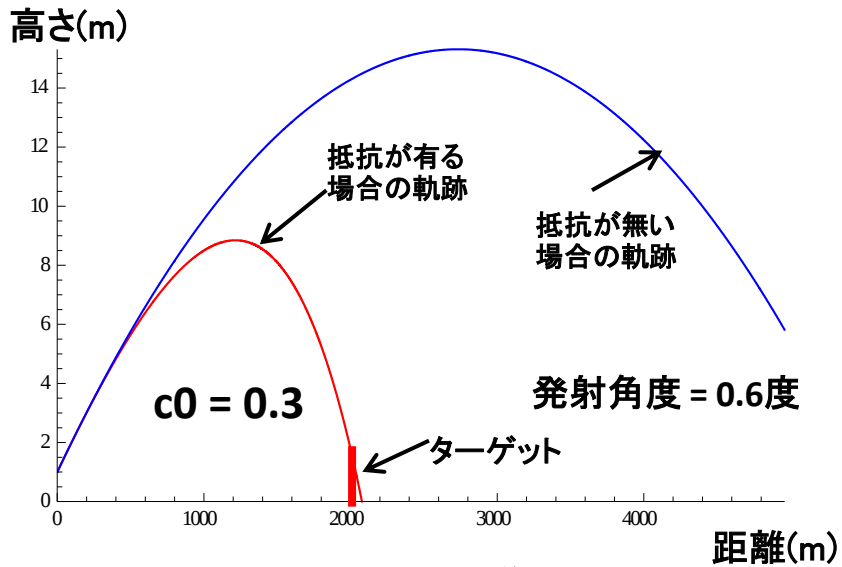


図4-2.5 ライフル弾  $c0 = 0.3$

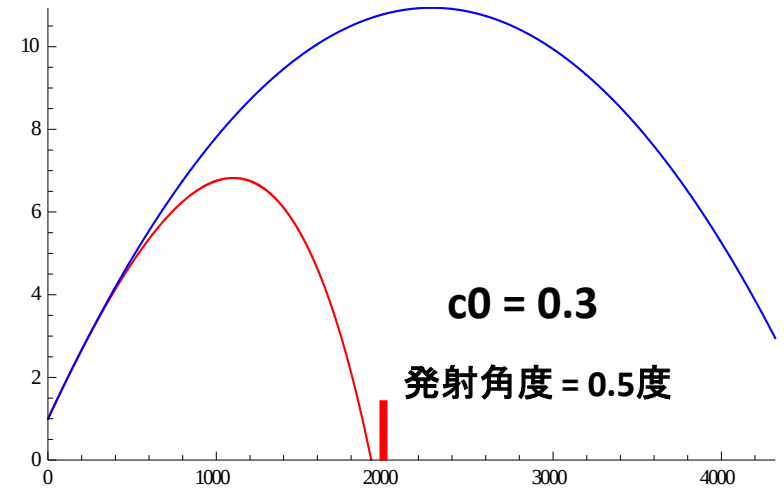


図4-2.6 ライフル弾  $c0 = 0.3$

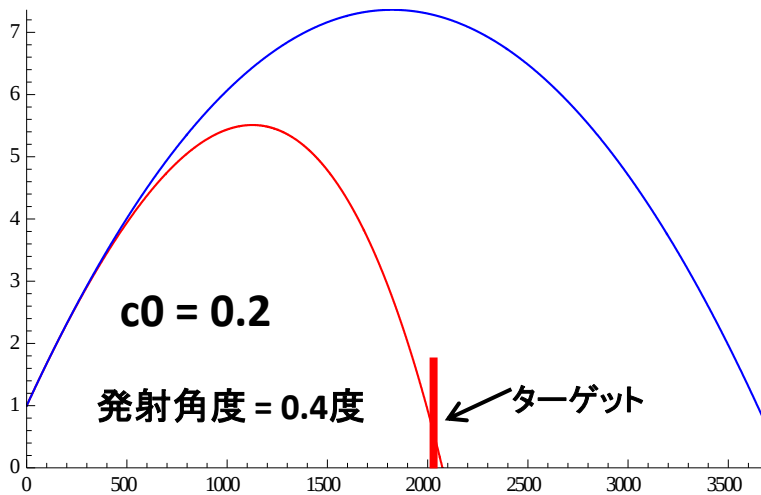


図4-2.7 ライフル弾  $c0 = 0.2$

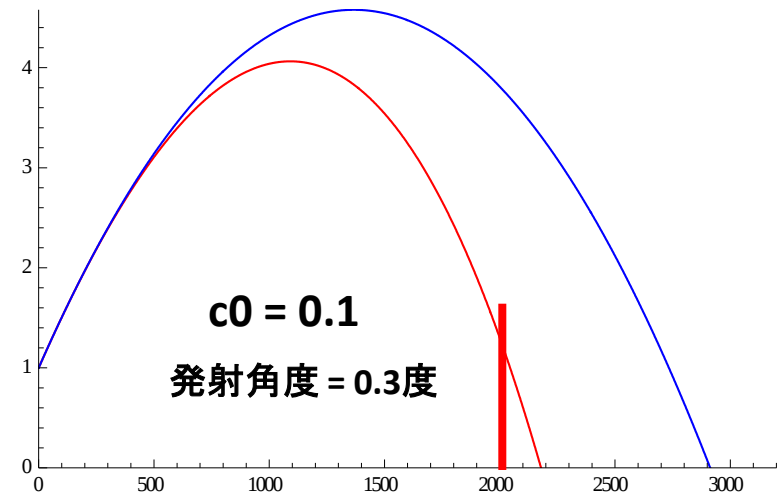


図4-2.8 ライフル弾  $c0 = 0.1$

## 5. 考察

以上の検討より、2000m先のターゲットを殺傷するには、発射角度の厳密な設定と、空気抵抗の読みを正確にしなければなりません。

また、計算では考慮しなかった衝撃波による減速、発射時の反動衝撃による発射角度のずれ、発射から着地までの風や雨等の天候の影響が有り、それらを正確に考慮しなければなりません。

一人の優秀な射撃手が、これらの情報を全て解析・処理して、ターゲットを射撃することは、殆んど不可能と考えられます。皆さんはどう思いますか。