

# ズームレンズの理論的検討

## — その2 組合せレンズの基礎 —

- 虫眼鏡の世界
- 望遠鏡の世界
- 顕微鏡の世界

2020(令和2)年04月25日

菅原 政治郎

# 1. 背景

ズームレンズの理論的検討ーその1では、1枚の凸レンズの理論的展開を行い、数値解析により光の光跡を検討しました。

本資料では、複数の凸レンズの組合せについて、数値解析により光の光跡を検討して、虫眼鏡、望遠鏡及び顕微鏡の仕組みについて勉強したいと思います。

注:

本資料での実像とは、光の進行方向に対して光線が収束する状態を指します。  
また、虚像とは、光の進行方向に対して光線が発散する状態を指します。

## 2. 複数枚の組合せレンズの基礎的検討

本章においては、複数の凸レンズ(以下、「レンズ」と記載)による理論的検討をします。対象物に近い方を対物レンズ、眼に近い方を接眼レンズと呼びます。

### 2.1 各レンズの基礎的情報

解析を進めるに当たり、組合せレンズの情報を以下の表2.1に示します。この内、黄色で示すレンズの曲率半径、屈折率、口径、空気の屈折率、対象物-対物レンズ間距離、レンズ間(対物レンズ-接眼レンズ、接眼レンズ-眼)距離及び対象物の大きさは、既知とします。

表2.1 組合せレンズの情報

項目	対物レンズ	接眼レンズ	眼
レンズ曲率半径	$r_1$	$r_2$	$r_3$
レンズの屈折率	$n_1$	$n_2$	$n_3$
レンズの大きさ(口径)	$Lh_1$	$Lh_2$	$Lh_3$
レンズ焦点距離 $f$	$f_1 = \frac{n_{air}r_1}{2(n_1 - n_{air})}$	$f_2 = \frac{n_{air}r_2}{2(n_2 - n_{air})}$	$f_3 = \frac{n_{air}r_3}{2(n_3 - n_{air})}$
レンズ曲率中心とレンズ中心の距離 $Lcnt$	$Lcnt_1 = r_1 * \text{Cos}[\theta]$ $\theta = \text{ArcSin}[Lh_1/(2r_1)]$	$Lcnt_2 = r_2 * \text{Cos}[\theta]$ $\theta = \text{ArcSin}[Lh_2/(2r_2)]$	$Lcnt_3 = r_3 * \text{Cos}[\theta]$ $\theta = \text{ArcSin}[Lh_3/(2r_3)]$
レンズの幅 $depL$	$depL_1 = 2(r_1 - Lcnt_1)$	$depL_2 = 2(r_2 - Lcnt_2)$	$depL_3 = 2(r_3 - Lcnt_3)$
空気の屈折率	$n_{air}$		
対象物-対物レンズ間距離	$a$		
レンズ間距離	$Ldst1$ (対物-接眼レンズ), $Ldst2$ (接眼レンズ-眼)		
対象物の大きさ	$h$		

## 2.2 解析体系

レンズの図示的位置関係は、図2.1に示すものです。解析の都合上、原点(0,0)を対物レンズの中心とし、光軸をX軸とし、対物レンズの中心を通りX軸に垂直な軸をY軸とします。

対物レンズから左へ  $a$  だけ離れた対象物から出た光は、口径  $Lh_1$  の対物レンズにて集光され、原点から右へ  $Ldst1$  だけ離れた口径  $Lh_2$  の接眼レンズに入射・集光され、最終的に原点から右へ  $Ldst2$  だけ離れた眼の結像位置  $b$  (原点から右へ  $L_{lastfilm}$  の距離)にて結像し、物が見えるようになります。詳細は次節以降で検討します。

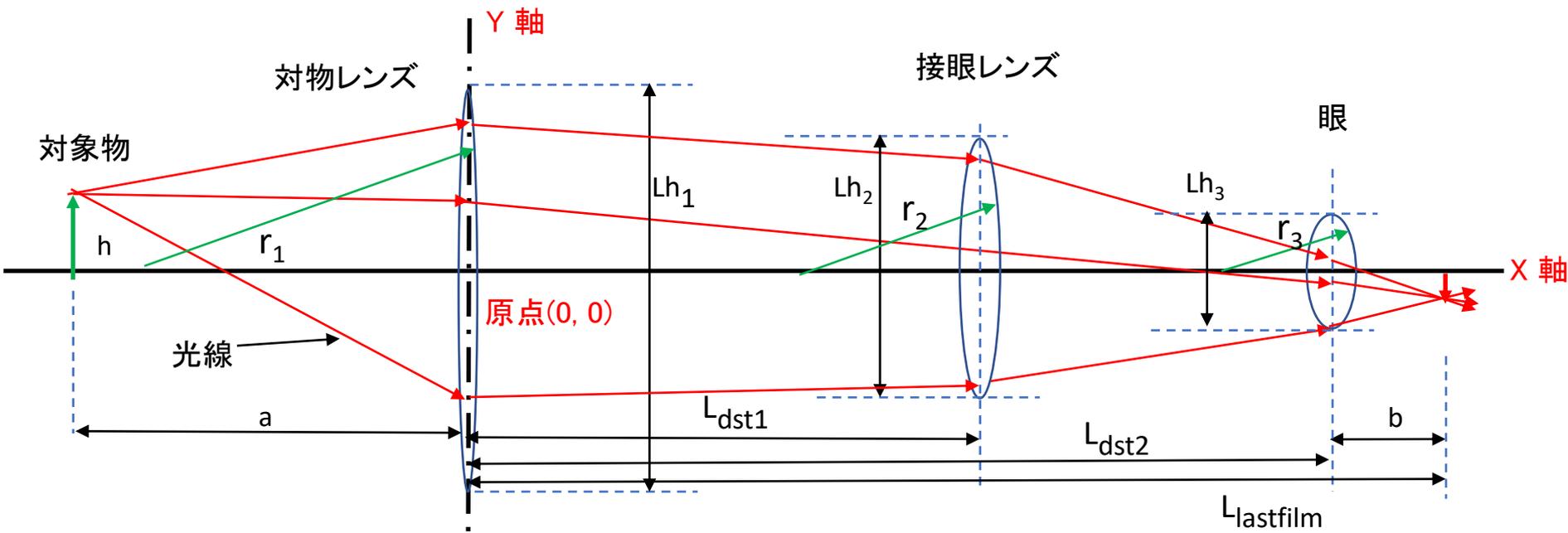
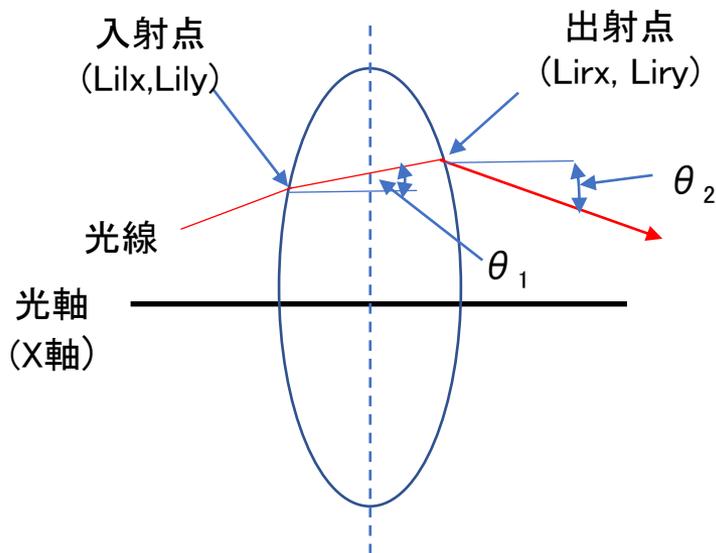


図2.1 レンズの図示的位置関係

## 2.2 解析体系（続き）

図2.2に示す様に、説明の都合上、光線がレンズに入射した点を説明上入射点と呼び、その点を  $(Lilx, Lily)$ 、屈折した時の傾きを  $\beta_1$ 、光線がレンズを出る点を説明上出射点と呼び、その点を  $(Lirx, Liry)$ 、出ていくときの傾きを  $\beta_2$  とします。

ここに  $i$  はレンズ識別番号です。 $i=1$ は対物レンズ、 $i=2$ は接眼レンズ、 $i=3$ は眼としますが、眼単独で解析する場合は、 $i=1$ が眼の識別番号となります。また、レンズと眼の組合せ解析では、 $i=1$ が対物レンズ、 $i=2$ が眼となります。



更に、  
 $\beta_1 = \tan[\theta_1]$ 、 $\beta_2 = \tan[\theta_2]$  です。

図2.2 レンズの図示的位置関係

## 2.3 結像位置、像の大きさ、光束幅の検討（その1の改良）

前回報告の理論検討—その1では、球面収差等により、点光源から出た光線が必ずしも1点に収束しないことを報告しました。このことは、レンズ間の距離  $L_{dst}$  を設定するときの不確かさ要素となります。

これを解決する一方法として、任意のX位置における光束の収束度合いを調べれば良いのではないかと思い、光軸上の任意のX位置における光線のY位置の平均  $y_{av}$  からの距離 ( $dst_i$ ) の二乗和を求め、それが**最小となる位置を結像位置**とすることとします。本解析では、この  $y_{av}$  の**絶対値を像の大きさと呼んでいます**。

上記を模式化したものが図2.3です。

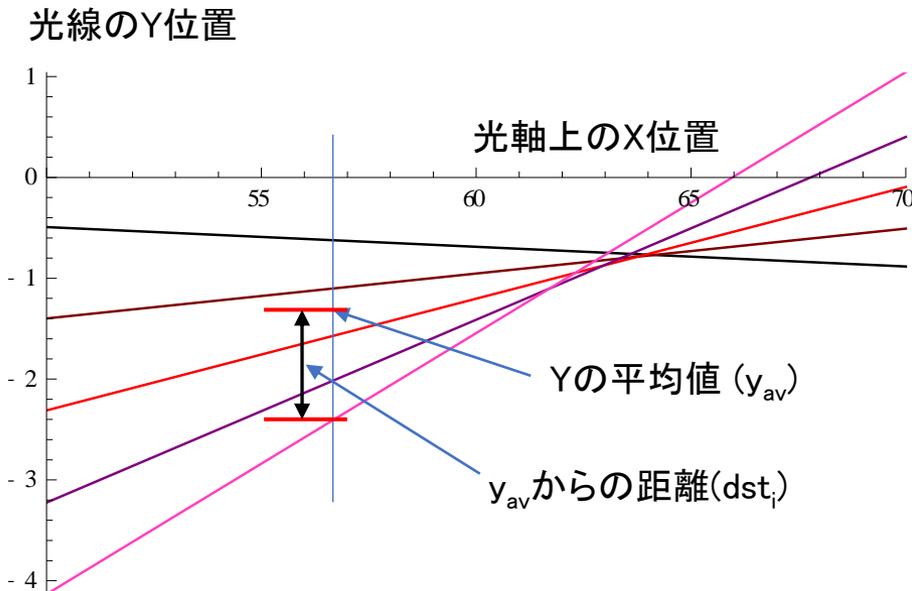


図2.3 光線の交差のイメージ図

- ①各光線の傾きを  $a_i$ 、各光線が既知の点  $(x_{i0}, y_{i0})$  を通るとすると、X位置における各光線のY位置  $y_i$  は以下となります。

$$y_i(x) = a_i(x - x_{i0}) + y_{i0} \quad \dots(1)$$

- ②式(1)より、X位置におけるYの平均値  $y_{av}(x)$  は以下で求められます。

$$\begin{aligned} y_{av}(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i(x)) \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N (y_{i0} - a_i x_{i0}) + a_i x \right) \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N (y_{i0} - a_i x_{i0}) \right) + x \sum_{i=1}^N a_i \quad \dots(2) \end{aligned}$$

ここに N: 光線の本数

## 2.3 結像位置、像の大きさ、光束幅の検討（その1の改良）

式(2)において、 $a_i$ 、 $x_{i0}$ 、 $y_{i0}$ は既知ですので、平均値 $y_{av}(x)$ は容易に求められます。

③次に光線  $i$  の平均 $y_{av}(x)$ からの距離( $dst_i(x)$ )の二乗和( $Sdst(x)$ )は、以下となります。

$$dst_i(x) = |y_i(x) - y_{av}(x)| \quad \text{ここに、} | \quad | \text{は絶対値の記号です。} \quad \dots(3)$$

$$\begin{aligned} Sdst(x) &= \sum_{i=1}^N (dst_i(x))^2 = \sum_{i=1}^N (y_i(x) - y_{av}(x))^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (y_i(x)^2 + y_{av}(x)^2 - 2y_i(x)y_{av}(x)) \quad \dots(4) \end{aligned}$$

$$= x^2 \sum_{i=1}^N C1_i + x \sum_{i=1}^N C2_i + \sum_{i=1}^N C3_i = D_1 x^2 + D_2 x + D_3$$

$$\text{ここに、} \quad D_1 = \sum_{i=1}^N C1_i, \quad D_2 = \sum_{i=1}^N C2_i, \quad D_3 = \sum_{i=1}^N C3_i$$

$$\begin{aligned} C1_i &= a_i^2 + \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \right]^2 - 2a_i \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \right] \\ C2_i &= 2 \left\{ -a_i^2 x_{i0} + a_i y_{i0} + \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{i0} - a_i x_{i0}) \right] \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \right] \right. \\ &\quad \left. - a_i \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{i0} - a_i x_{i0}) \right] - \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \right] (y_{i0} - a_i x_{i0}) \right\} \\ C3_i &= a_i^2 x_{i0}^2 - 2a_i x_{i0} y_{i0} + y_{i0}^2 + \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{i0} - a_i x_{i0}) \right]^2 \\ &\quad - 2 \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{i0} - a_i x_{i0}) \right] (y_{i0} - a_i x_{i0}) \end{aligned} \quad \dots(5)$$

## 2.3 結像位置、像の大きさ、光束幅の検討（その1の改良）

- ④式(4)により、距離(dsti)の二乗和(Sdst)が得られましたので、これを光線本数Nで割り、1本あたりの平均距離の二乗を求め、平方根を取ることにより1本あたりの平均距離( $\mu \text{dst}(x)$ )を以下により求めます。この平均距離  $\mu \text{dst}(x)$  を本解析では、**光束幅と呼んでいます**。

$$\mu \text{dst}(x) = \sqrt{S \text{dst}(x)/N} \quad \dots(6)$$

- ⑤平均距離( $\mu \text{dst}(x)$ )の最小値を求めるには、式(4)をXで微分し、微分値が0となるXが最小値となる場所です。

$$\frac{d}{dx} (S \text{dst}(x)) = 2D_1 x + D_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-D_2}{2D_1} \quad \dots(7)$$

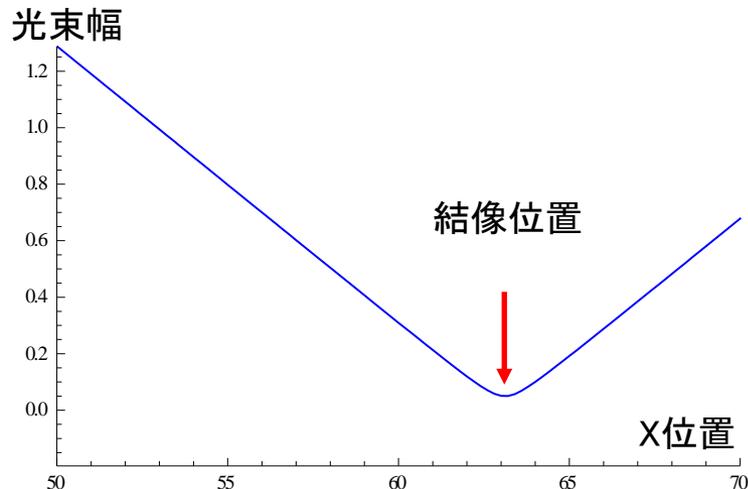


図2.4 光束の挙動

- ⑥図2.3の光線群に対する光束幅の挙動は、図2.4に示すもので、最小を与えるX値は63.1で、そのときの像の大きさ(|Y値|)は0.8、光束幅(光の広がり)は0.05となります。

この様に確実に位置等が得られます

## 2.3 結像位置、像の大きさ、光束幅の検討（その1の改良）

- ⑦以上説明しました様に、レンズの出射点(Lirx, Liry)とその時の傾き $\beta_2$ が分かれば、**実像・虚像に関わらず**、最小位置 $X$ 、その時の像の大きさ $|yav(x)|$ 、光束幅  $\mu_{dst}(x)$ が瞬時に得られます。
- ⑧実像・虚像の判定は、最小位置 $X$  が当該レンズの設置位置(Ldst1, Ldst2等)の**右に位置**(この場合、**実像**)するか、**左に位置**(この場合、**虚像**)するかで判定します。
- ⑨判定に当たっては、光線数 $N$ が最低2以上で有ることが必要となります。解析では、精度を増すため、3本未満となった場合は強制的に解析を終了させることとしています。

(理論上2本でも解析は可能ですが、光線が2本の場合は、最外周及びその内側の光線です。前回の報告では、最外周の光線による結像位置は、中央の光線に較べてばらつきが大きく、信憑性に欠けるものでした。このため3本以上としています。)

## 2.4 解析手順

解析は、ズームレンズの理論的検討—その1で検討した数値解析モデルを使用し、図2.5に示す流れにて計算します。以下、簡単に説明します。

- ①必要な情報(レンズの曲率半径  $r$ 、屈折率  $n$ 、口径  $L_h$ 、空気の屈折率)を入力します。
- ②レンズの焦点距離  $f$ 、レンズ曲率中心とレンズ中心の距離  $L_{cnt}$ 、レンズの幅  $depL$  を表2.1に記載の式を用いて求めます。
- ③レンズ間距離  $L_{dst1}$  は、原則手入力とします。目安として以下の式を用いて当たりを付けてください。対象物—対物レンズ間の距離  $a$ 、対物レンズの焦点距離  $f_1$ 、接眼レンズの焦点距離  $f_2$  を用いて、以下の様に設定します。

$$L_{dst1} = \frac{a \cdot f_1}{a - f_1} + f_2 + \varepsilon \quad \dots(8)$$

ここに、 $\varepsilon$  : 調整長さ (この値が正の場合は実像になり、負の場合は虚像となります。)

式(8)は、対物レンズによる結像位置と接眼レンズの焦点距離  $f_2$  を加えた距離に、若干の調整長さ  $\varepsilon$  を足した距離を意味します。即ち、調整長さを負(マイナス)に設定することにより、対物レンズによる結像位置を接眼レンズの焦点距離以内に設定し、正立虚像の拡大像を作ることの意味します。

$\varepsilon$  の値については、解析者が実像を解析したいのか、虚像を解析したいのかにより、随意に設定するものとします。

## 2.4 解析手順（続き）

- ④対象物から対物レンズへの光跡、対物レンズ内の屈折角及び対物レンズからの出射角を求め、接眼レンズに至る光跡を求めます。この求め方は、前報のその1で求めた手法を用います。
- ⑤上記④で求めた全ての光跡が、接眼レンズの中心位置( $L_{dst1}$ )で接眼レンズの口径( $L_{h2}$ )を外れている場合は、計算を停止します。(対物レンズと対象物が近い顕微鏡の解析において、実際にこの様な状況が出現します。)
- ⑥実像・虚像に関わらず、結像点での光線のX位置、像の大きさ及び光束幅を求めます。
- ⑦最後に結果を作図します。

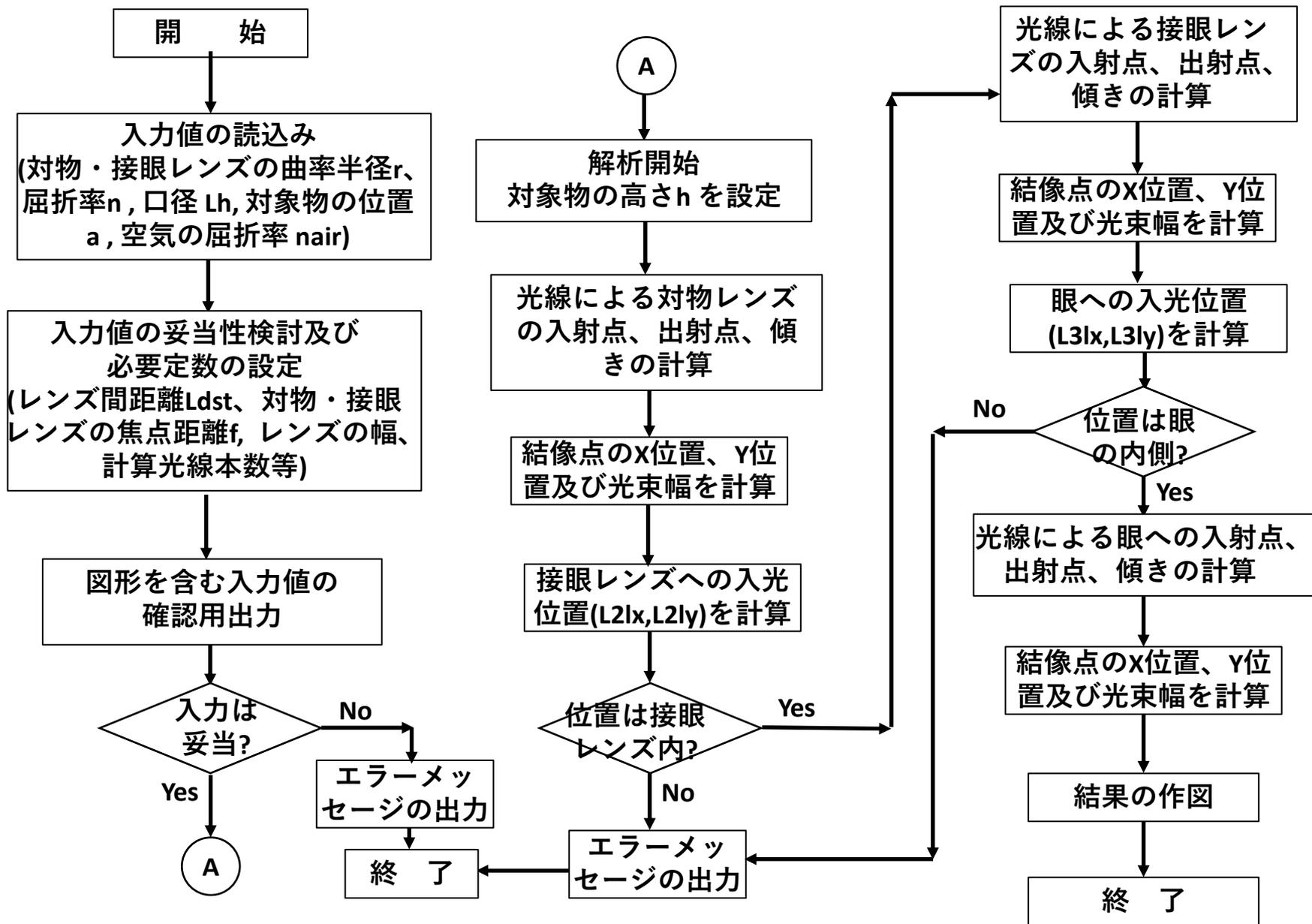


図2.5 組合せレンズの解析の流れ

### 3. 虫眼鏡で見た世界（レンズ+眼）

前報及び前章までで整備した計算式を用い、実際に虫眼鏡で見た世界をサンプル計算しました。

虫眼鏡で物を見る場合、通常は物を大きく(拡大して)見るために、虚像を作成して見っていますが、実像を作成して見たらどの様になるのかも検討しました。

虚像になるか、実像になるかは、光線が眼に入る場合に光線が拡大しているか、縮小して入るかの違いです。一旦、光線が眼に入れば、必ず網膜の位置に実像として物が見えます。

3.1及び3.2節にて虚像を取り扱った場合、3.3及び3.4節にて実像を取り扱った場合について、説明致します。

### 3.1 虫眼鏡で見た世界（虚像の場合）

対象物が対物レンズの焦点距離内にある場合、虚像が出来ます。その場合を解析します。

#### 3.1.1 解析条件

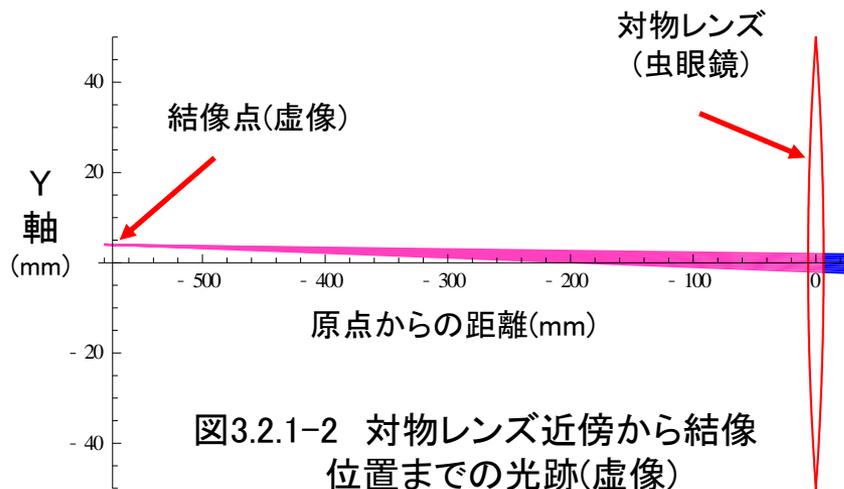
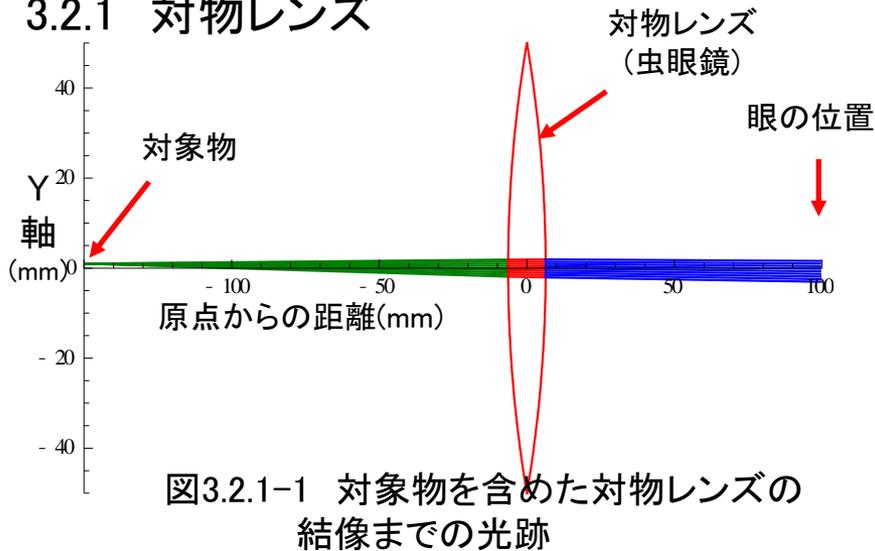
表3.1 組合せレンズの解析条件（虚像の場合）

項目	対物レンズ(虫眼鏡)	接眼レンズ(眼)
レンズ曲率半径	$r_1 = 200 \text{ mm}$	$r_2 = 14.89 \text{ mm}$
レンズの屈折率	$n_1 = 1.5$	$n_2 = 1.4$
レンズの大きさ(口径)	$Lh_1 = 100 \text{ mm}$	$Lh_2 = 9 \text{ mm}$
レンズ焦点距離 $f$	$f_1 = 200 \text{ mm}$	$f_2 = 18.61 \text{ mm}$
レンズ曲率中心とレンズ中心の距離 $Lcnt$	$Lcnt_1 = 193.65 \text{ mm}$	$Lcnt_2 = 14.19 \text{ mm}$
レンズの幅 $depL$	$depL_1 = 12.7 \text{ mm}$	$depL_2 = 1.39 \text{ mm}$
空気の屈折率	$n_{air} = 1.0$	
対象物-対物レンズ間距離	$a = 150 \text{ mm}$	
レンズ-眼の距離	$Ldst1 = 100 \text{ mm}$	
対象物の大きさ	$h = 1 \text{ mm}$	

## 3.2 解析結果 虫眼鏡で見た世界 (虚像の場合)

解析結果を対物レンズ(虫眼鏡)と、接眼レンズ(眼)の部分に分けて説明します。

### 3.2.1 対物レンズ



- ① 図3.2.1-1に対象物(被写体)から対物レンズを経由して、接眼レンズの左側まで至る光跡を示します。
- ② 点光源から出た光は、全方位に広がりますが、解析上の制約から、光線を狭めて対物レンズに入射するようにしています。
- ③ 対物レンズ(虫眼鏡)に入射した光は屈折はしますが幅は狭まることなく対物レンズを抜けて行きます。それは青い光線が広がっていることから分かります。即ち、虚像になっているということです。
- ④ そのことを示す図が3.2.1-2です。ピンクの線は、対物レンズの右側の光線を左側に延長したものです。対象物は、対物レンズから左側に150mmの位置に有りますが、虚像位置は更に左側に行った573mmの所で結像しています。
- ⑤ 虚像に対して結像という言葉は正確ではありませんが、説明の都合上使います。

## 3.2 解析結果 虫眼鏡で見た世界 (虚像の場合) (続き)

### 3.2.1 対物レンズ

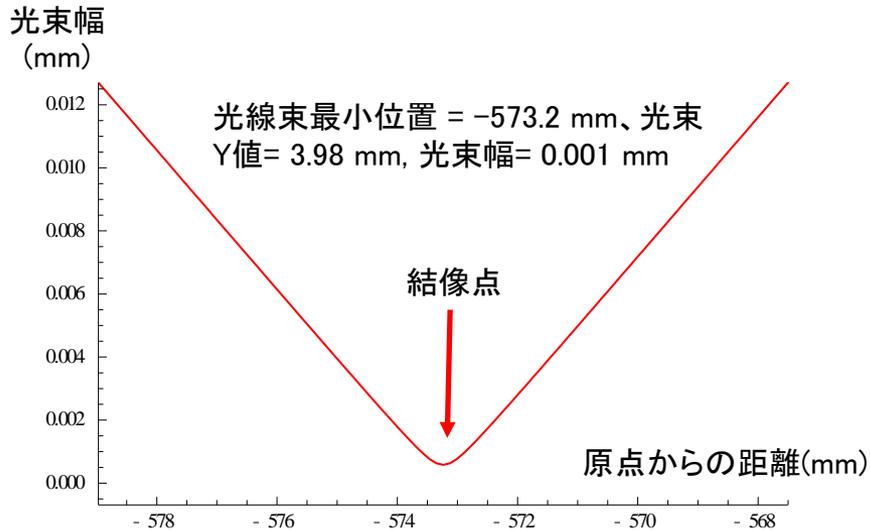


図3.2.1-3 対物レンズ結像位置(虚像)にての光束幅の挙動、位置解析光線数= 9

⑥ピンクの光線束の挙動を見たのが、図3.2.1-3です。これは式(6)で与えられる光線幅(光線の広がり)を見たものです。これによれば、最小X位置は-573.2mmの位置で、そのときのY値(即ち像の大きさ)は、3.98mmで、そのときの光の広がり(光束幅)は0.001mmとかなりの収束度合いを示しています。

### 3.2.2 接眼レンズ(眼)

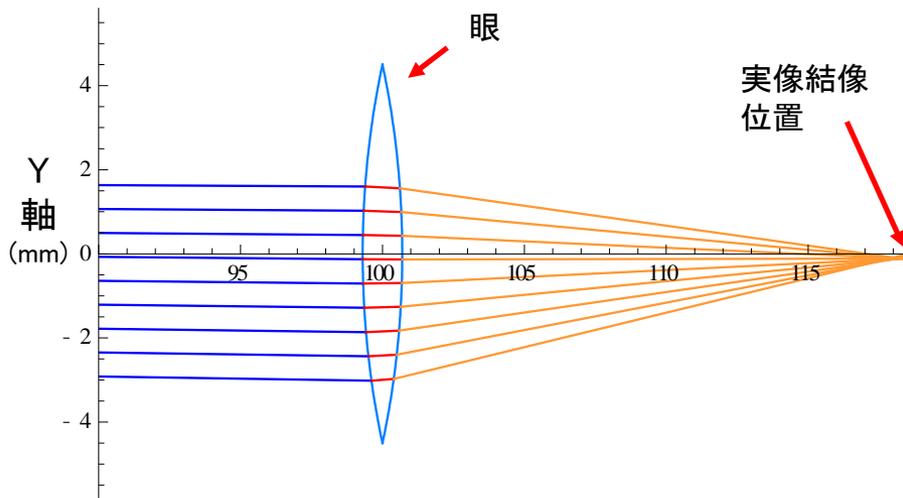


図3.2.2-1 眼の近傍から網膜位置までの光跡

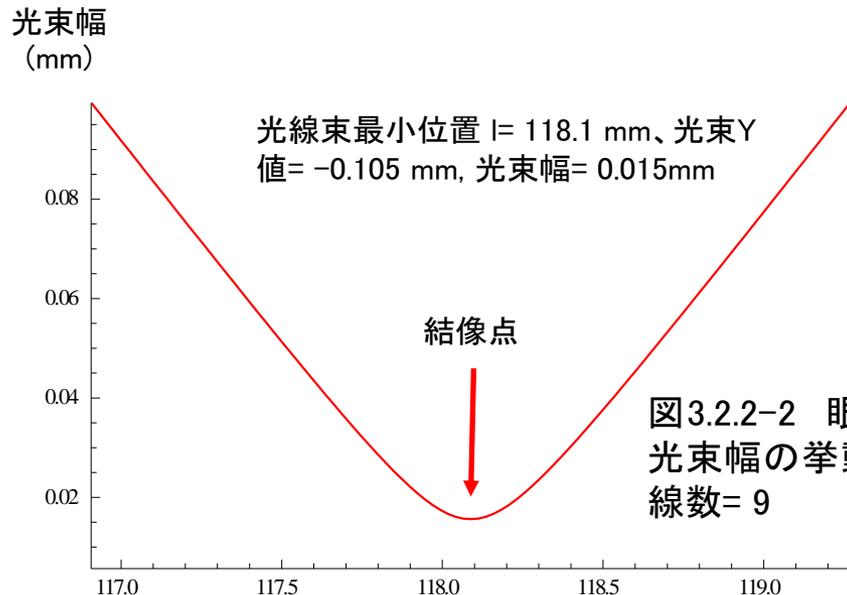


図3.2.2-2 眼の網膜にての  
光束幅の挙動、位置解析光  
線数= 9

⑦眼の近傍の光跡を示したものが、図3.2.2-1です。対物レンズを出た光(図の青色)は、広がりながら眼に入ってきます。今回の場合、眼の焦点距離は14.9mmと短いので、必ず網膜の位置に結像するように作用します。即ち、実像を作る様になります。

⑧図を見ると分かる様に、光線(橙)は1点で収束している様に見えます。下図の図3.2.2-2と合わせて見て頂くと、光線の収束位置は、118.1mmです。即ち眼の水晶体の位置から、18.1mmの所です。水晶体の網膜の位置は18.5mmですので、数値解析は、結構な精度で合うことが分かりました。

⑨図3.2.2-2は眼による光線幅(光線の広がり)の挙動を見たものです。これによれば、結像点での光束幅は0.015mm で、像の大きさは、0.105mm です。

### 3.2.2 接眼レンズ(眼)

- ⑩対象物の大きさ(1mm)について、今回の場合、網膜に映った像の大きさは、0.105mm となっています。
- ⑪ちなみに、裸眼で250mm (=150+100) 離れた対象物を見た場合の網膜に映った像の大きさは、図3.2.2-3及び図3.2.2-4に示す様に、0.075mm となっています。
- ⑫このことより、本サンプル計算の虫眼鏡は、1.4倍の大きさに物を拡大して見せていると言えます。虚像の大きさが3.98mmでしたので、対象物の大きさと比較して、3.98を倍率と思わないでください。

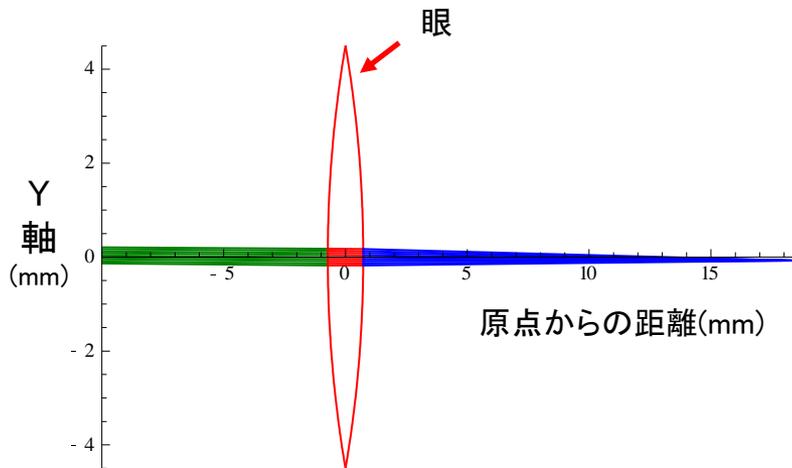


図3.2.2-3 裸眼近傍から網膜までの光跡

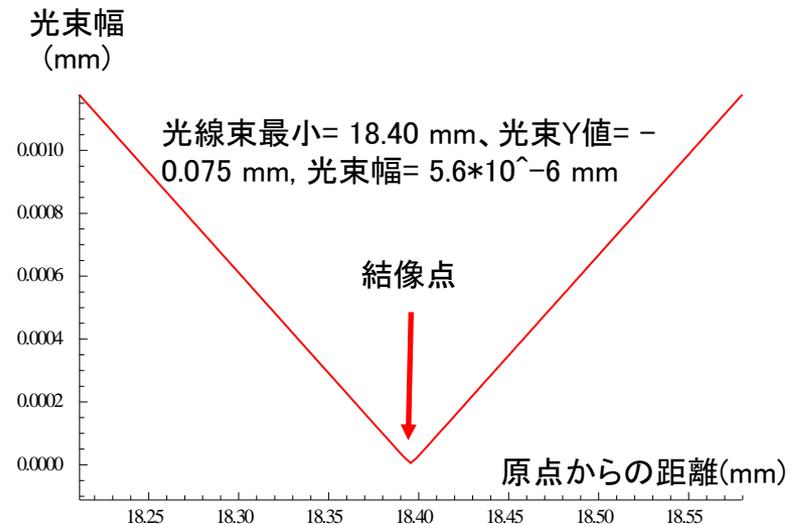


図3.2.2-4 裸眼の網膜位置にての光束幅の挙動

### 3.2.3 全体の光跡 虫眼鏡で見た世界（虚像の場合）

- ⑬図3.2.3-1に、以上説明した実光線の眼の網膜までの光跡を示します。ここでの実光線とは、光が後戻りすることなく、最終位置(網膜)まで到達する光線を意味します。
- ⑭図を見て分かる様に、物を虫眼鏡を通してみる場合、虫眼鏡から出た光(図の青色)は眼に入るまでに角度を広げます。このことが物を大きく見せている要因です。最終的に光線が眼に入ると、必ず実像として網膜に結像します。この実像を見て、物を大きいと脳が判断しています。虚像そのものを見て大きいと感じている訳ではありません。
- ⑮図3.2.3-2に、虚像を含めた光跡を示します。前述④で説明しましたが、虫眼鏡から出た光(図の青色)を逆走(図のピンク色)しますと虚像の結像点に至ります。前述⑫で記載の様に、対象物の大きさが1mm、虚像の大きさが3.94mmなので、レンズの倍率が3.94と誤解しないでください。と言うのも、虫眼鏡の焦点位置に対象物を設定した場合、虚像は無限の大きさになります。虫眼鏡が無限の倍率になることは生活実感からして有りえないからです。
- ⑯それでは拡大レンズ(虫眼鏡)の倍率  $M$  はどの様に計算されるのでしょうか。明視の距離  $D$  とレンズの焦点距離  $f$  を用いて、以下の式(9)の様に計算します。明視の距離とは人間が裸眼で物体を見る時250mm離れた所から見ると眼が割合に疲労せずはっきり見えると決められた距離のこととされています。

$$M = \frac{D}{f} \quad \dots(9)$$

### 3.2.3 全体の光跡 虫眼鏡で見た世界（続き）

- ⑰式(9)に今回の場合の  $f = 200$  を代入すると、虫眼鏡の倍率は  $M = 1.25$ 倍です。数値解析では1.4倍でしたので、比較的近い値と言えると思います
- ⑱虫眼鏡を通して物が大きく見えることを簡単に説明するため、中学校の教科書では虚像を見ていると説明しています。これはあくまで簡単に説明するためであり、虚像そのものを見て大きいと感じている訳ではないことを強調しておきたいと思います。

### 3.2.3 全体の光跡 虫眼鏡で見た世界（虚像の場合）

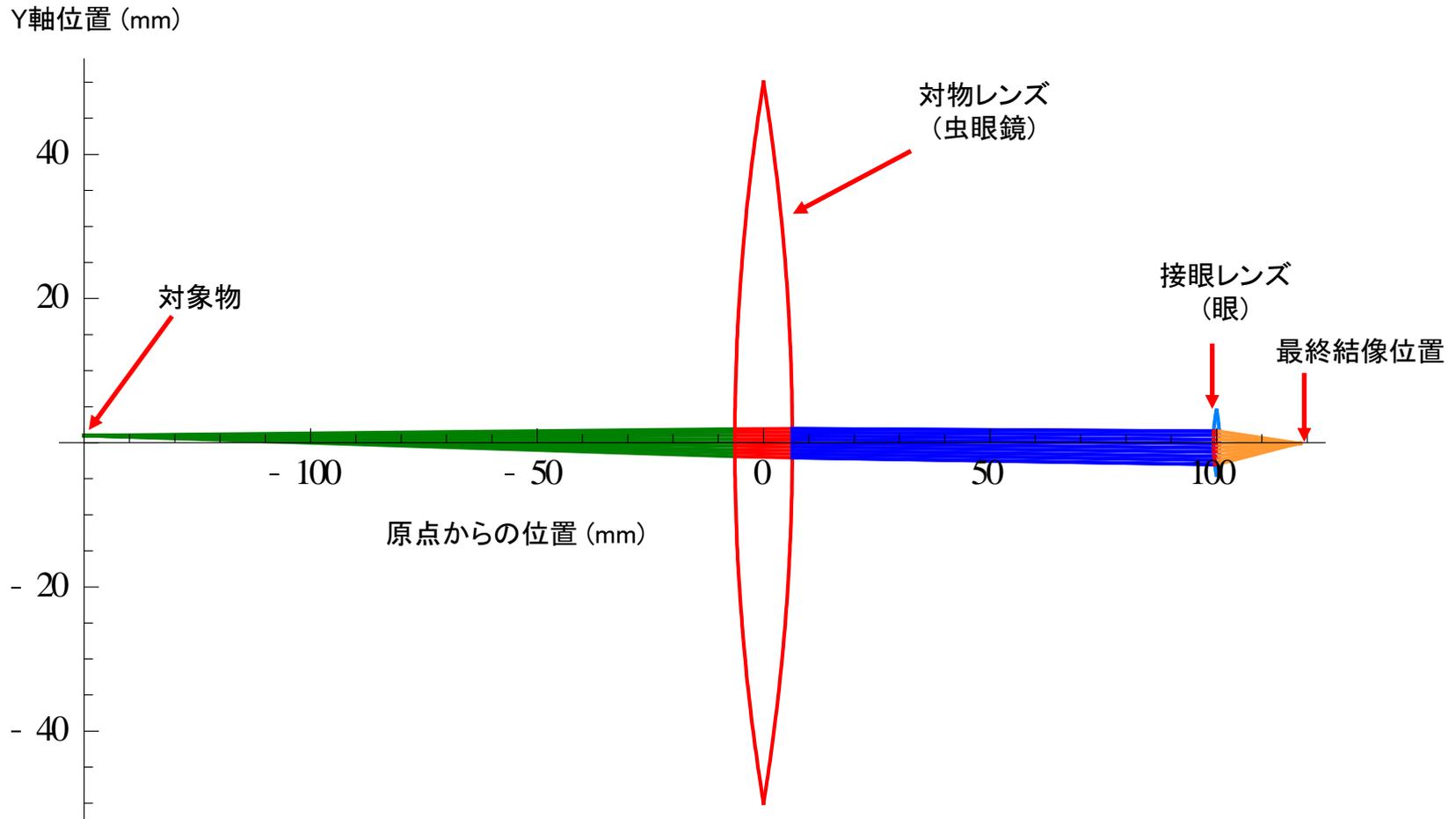


図3.2.3-1 虫眼鏡の世界 全体の実光線の光跡

### 3.2.3 解析結果 (続き)

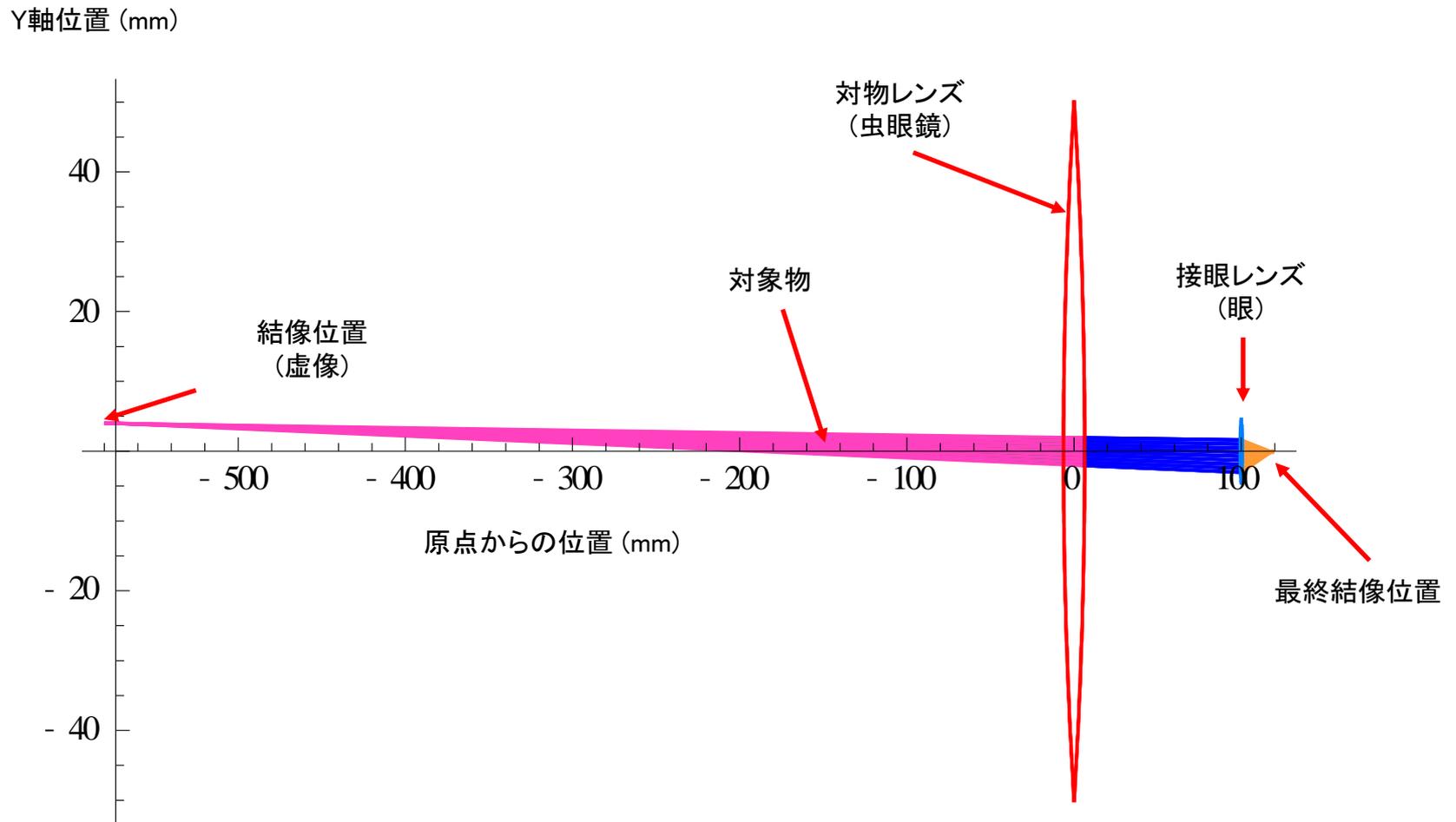


図3.2.3-2 虫眼鏡の世界 対象物から最終結像位置までの光跡(虚像を含む)

### 3.3 虫眼鏡で見た世界（実像の場合）

対象物が対物レンズの焦点距離外にある場合、実像が出来ます。その場合を解析します。（今回、偶々、対物レンズの焦点距離に対象物を置いたところ、実像が出来ました。理論上は無限遠に実像も虚像も出来ます。今回実像が出来たのは、結像の式が近似式であることを示しているのではないかと思います。）

3.3.1 解析条件（黄色部分が、虚像解析と違う部分です。対象物と眼の距離は同じです。）

表3.2 組合せレンズの解析条件（実像の場合）

項目	対物レンズ(虫眼鏡)	接眼レンズ(眼)
レンズ曲率半径	$r_1 = 200 \text{ mm}$	$r_2 = 15.27 \text{ mm}$
レンズの屈折率	$n_1 = 1.5$	$n_2 = 1.4$
レンズの大きさ(口径)	$Lh_1 = 100 \text{ mm}$	$Lh_2 = 9 \text{ mm}$
レンズ焦点距離 $f$	$f_1 = 200 \text{ mm}$	$f_2 = 19.09 \text{ mm}$
レンズ曲率中心とレンズ中心の距離 $L_{cnt}$	$L_{cnt1} = 193.65 \text{ mm}$	$L_{cnt2} = 14.59 \text{ mm}$
レンズの幅 $depL$	$depL_1 = 12.7 \text{ mm}$	$depL_2 = 1.36 \text{ mm}$
空気の屈折率	$n_{air} = 1.0$	
対象物-対物レンズ間距離	$a = 200 \text{ mm}$	
レンズ-眼の距離	$Ldst1 = 50 \text{ mm}$	
対象物の大きさ	$h = 1 \text{ mm}$	

### 3.4 解析結果 虫眼鏡で見た世界（実像の場合）

解析結果を対物レンズ(虫眼鏡)と、接眼レンズ(眼)の部分に分けて説明します。

#### 3.4.1 対物レンズ

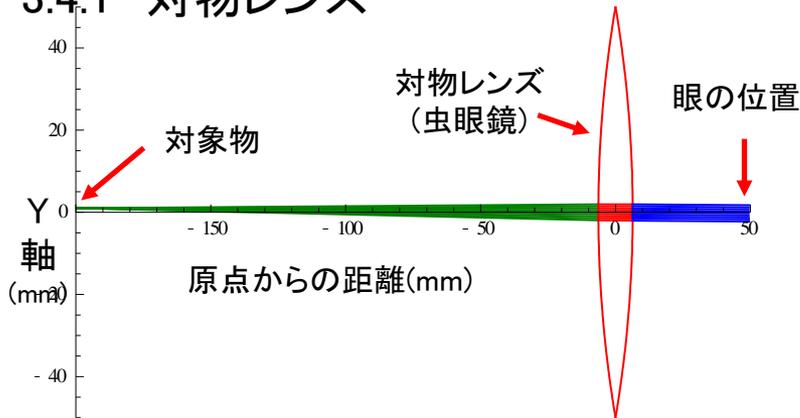


図3.4.1-1 対象物を含めた対物レンズの結像までの光跡

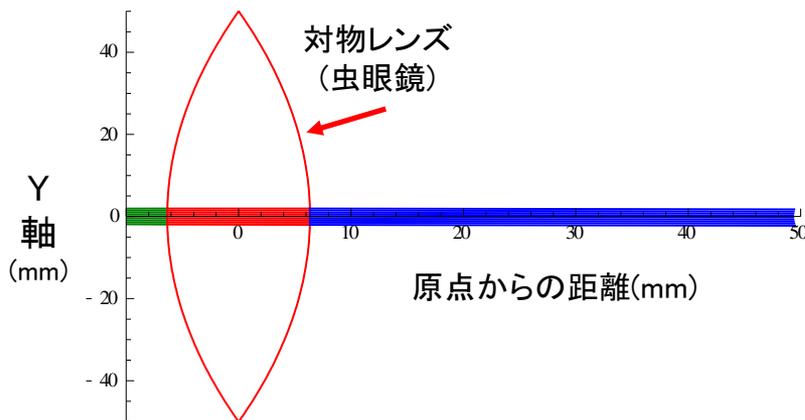


図3.4.1-2 対物レンズ近傍から眼までの光跡(実像)

①図3.4.1-1に対象物(被写体)から対物レンズを経由して、接眼レンズ(眼)の左側まで至る光跡を示します。

②対象物の位置に、対物レンズの焦点を置くと、レンズ以降の光(図の青色)は平行光線となり、実像・虚像のいずれにも結像しないようになります。しかし、後述⑤の様に、ほぼ無限遠点(解析では、レンズの右側162mの位置)と考えられる場所に、実像を結像しました。

③前報の式(14)の結像の式を見てみます。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

ここに、a: 対象物(被写体)とレンズ中心間の距離

b: レンズ中心と結像位置との間の距離

f: レンズの焦点距離

今回の場合、 $a = f$  と設定しましたので、b、即ち、結像の位置は無限となります。これは、上記②の事を説明したものです

## 3.4 解析結果 虫眼鏡で見た世界（実像の場合）（続き）

### 3.4.1 対物レンズ

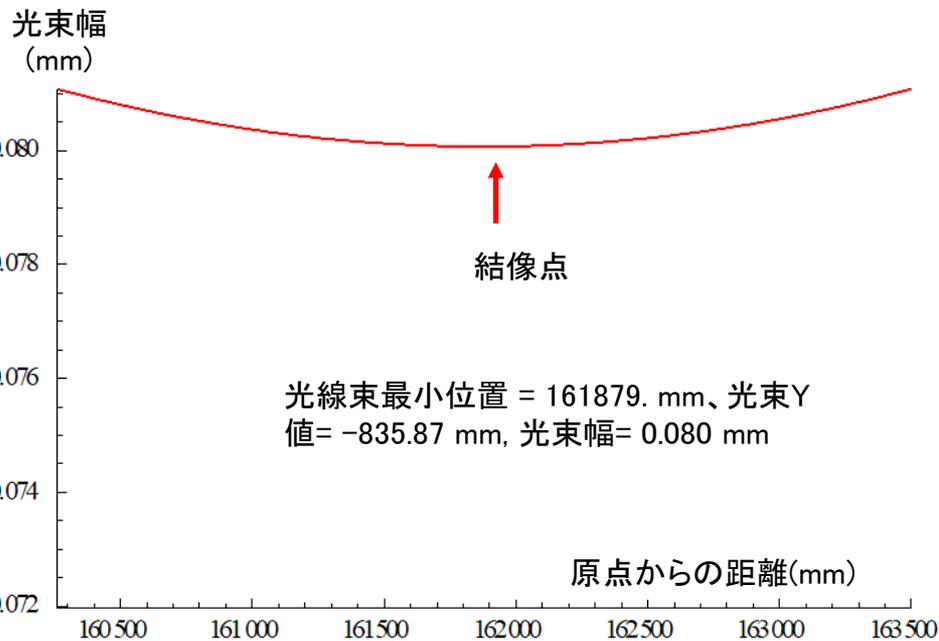


図3.4.1-3 対物レンズ結像位置(実像)にての光束幅の挙動、位置解析光線数= 9

④ 図3.4.1-2に、対物レンズから眼までの光跡を示します。上述の様に、対物レンズから出た光は、ほぼ平行光線として眼に入って来ます。

⑤ 実像の光線束の挙動を見たのが、図3.4.1-3です。これによれば、最小X位置は161,879mm（約162m）の位置で、そのときのY値（即ち像の大きさ）は、835.9mmで、そのときの光の広がり は0.08mmとなっています。

⑥ 3.2.1項の結果と比較すると、光束幅の収斂度が鈍いのは、収束距離の問題ではないかと考えられます。（詳細は今後の検討課題）

### 3.4.2 接眼レンズ(眼)

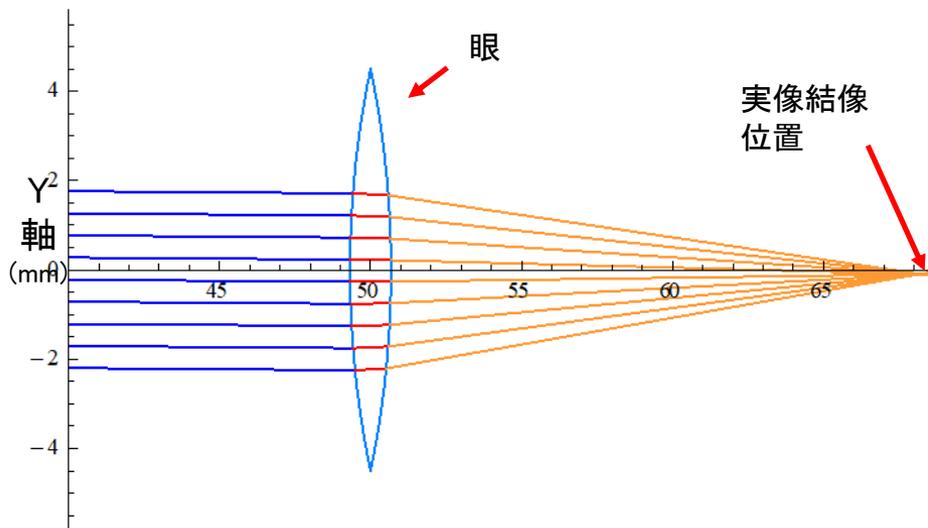


図3.4.2-1 眼の近傍から網膜位置までの光跡

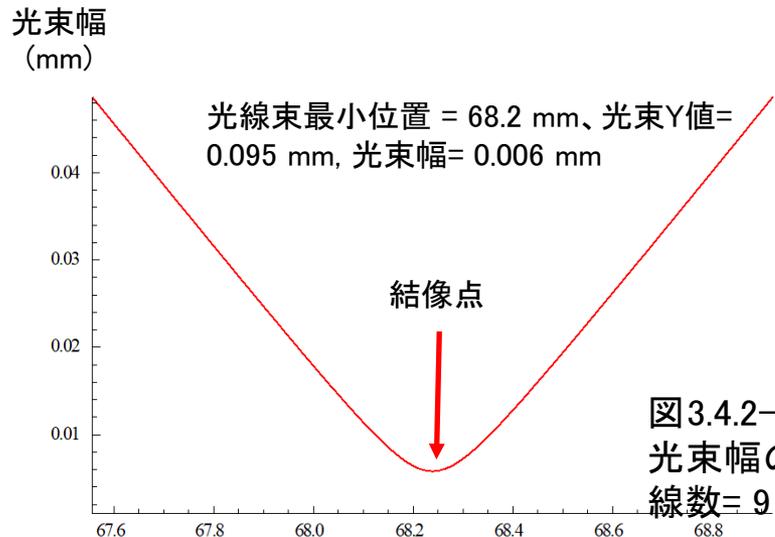


図3.4.2-2 眼の網膜にての  
光束幅の挙動、位置解析光  
線数=9

⑦眼の近傍の光跡を示したものが、図3.4.2-1です。対物レンズを出た光(図の青色)は、ほぼ平行光線として眼に入ってきます。今回の場合、眼の焦点距離は19.1mmと短いので、必ず網膜の位置に結像するように作用します。即ち、実像を作る様になります。

⑧図を見ると分かる様に、光線(橙)は1点で収束している様に見えます。下図の図3.4.2-2と合わせて見て頂くと、光線の収束位置は、68.2mmです。即ち眼の水晶体の位置から、18.2mmの所です。水晶体の網膜の位置は18.5mmですので、数値解析は、結構な精度で合うことが分かりました。

⑨図3.4.2-2は眼による光線幅(光線の広がり)の挙動を見たものです。これによれば、結像点での光束幅は0.006mmで、像の大きさは、0.095mmです。

### 3.4.2 接眼レンズ(眼)

- ⑩対象物の大きさ(1mm)について、今回の場合、網膜に映った像の大きさは、0.095mm となっています。3.2.2項の虚像の場合に較べて、若干小さくなっていることが分かります。
- ⑪網膜に映った像の大きさから推定すると、虫眼鏡で実像を作って見るよりも、虚像を作って見た方が、大きく見えることが分かります。
- ⑫上記の事を確認するため、眼の網膜の結像の大きさに関係ない比較を試してみたいと思います、これには視角倍率Mという以下の式を使います。

$$M = \text{Tan}[\sigma'] / \text{Tan}[\sigma] \quad \dots(10)$$

ここに、 $\sigma'$  : 肉眼用光学器械を通して像を見た場合の視角

$\sigma$  : 物体を光学器械を通さず直接肉眼で見た場合の視角

(この視角倍率という言葉は、筑波大学名誉教授の三宅和夫氏(故人)の提唱している言葉で、英語ではanguler magnification という言葉で使用されて来たものです。日本では、anguler magnification という言葉を角倍率という別の定義に使用してきたので、混乱が生じているとのことです。)

### 3.4.2 接眼レンズ(眼)

- ⑬結果を表3.3に示します。表には、参考のために、網膜像比を記載しています。視角倍率の比からも明らかな様に、虚像と実像とでは倍率が違い、虚像の方が大きく見えているということが分かります。そのことを網膜像比が裏付けています。但し、網膜像比は視角倍率程差は無い様に思います。
- ⑭余談になりますが、従来、視角倍率のみで光学器械の倍率を定義して来たのは、眼の位置による倍率の変動を避ける他に、眼迄入れた解析が行われて来なかったためと考えられます。

表3.3 視角倍率の比較

	肉眼	虫眼鏡(虚像)	虫眼鏡(実像)
Tan[ $\sigma$ ]	$1/250=4.0 \times 10^{-3}$	同左	同左
Tan[ $\sigma'$ ]	—	$3.98/573.2$ $=6.94 \times 10^{-3}$	$835.9/16187.9$ $=5.16 \times 10^{-3}$
M	1	1.74	1.29
網膜像の大きさ	0.075	0.105	0.095
網膜像比	1	1.4	1.23

### 3.4.3 全体の光跡 虫眼鏡で見た世界（実像の場合）

- ⑮図3.4.3-1に、対象物を含めた光跡を示します。虚像の場合の図3.2.3-2の光線(図の青色)と比較しますと、本ケースの実像の場合は、光線(図の青色)が眼に入る前に光線の拡散が無いことが分かります。このことが、虚像に較べて像が小さくなっている要因です。
- ⑯昔の光学科学者が実像で物を見ようとしなかったのは、この点にある様に思います。

### 3.4.3 全体の光跡 虫眼鏡で見た世界（実像の場合）

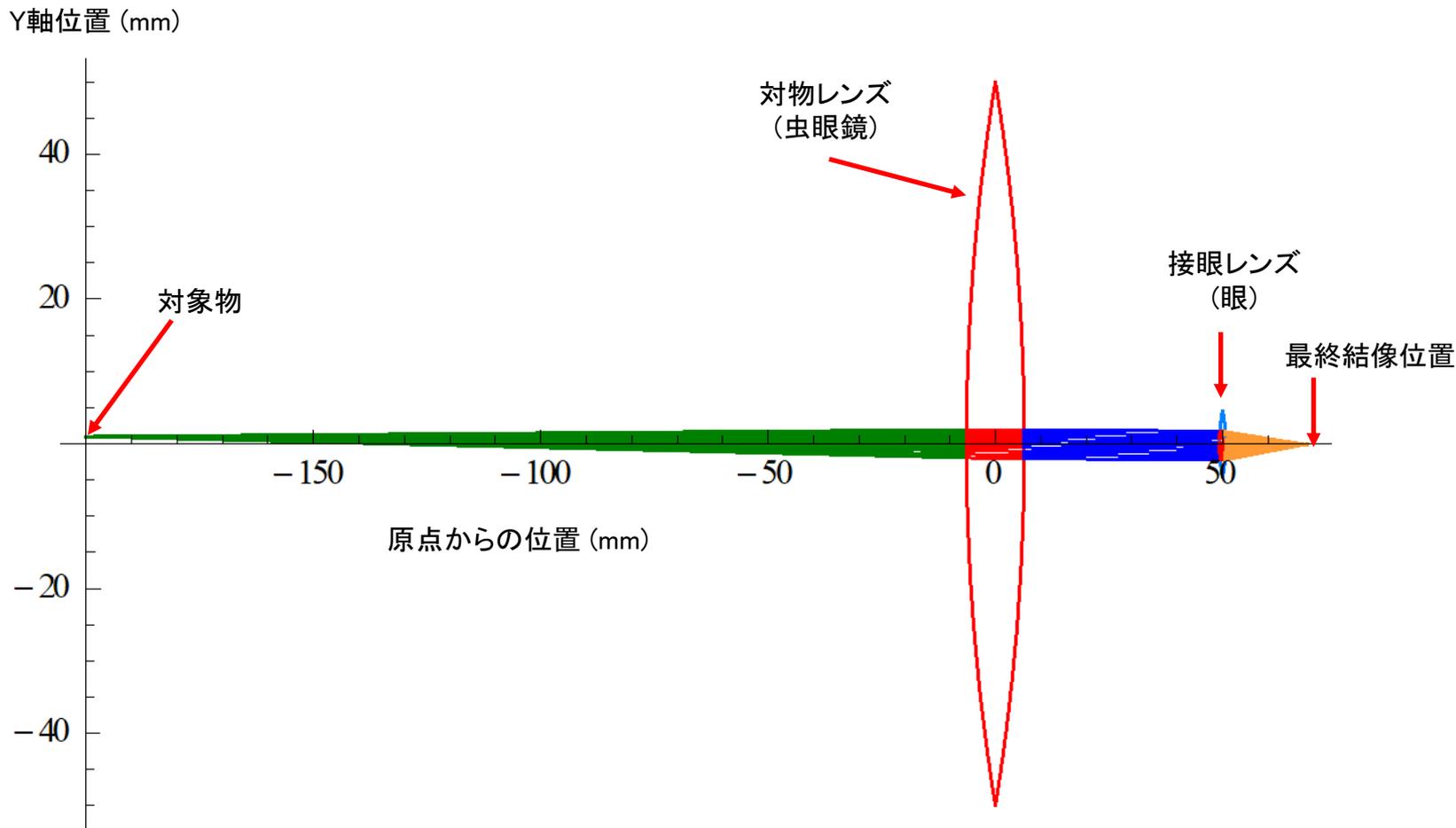


図3.4.3-1 虫眼鏡の世界 全体の実光線の光跡（実像の場合）

## 4. 解析2 望遠鏡で見た世界（対物レンズ+接眼レンズ+眼）

サンプル計算として望遠鏡で見た世界を解析します。

### 4.1 解析条件

表4.1 組合せレンズの解析条件

項目	対物レンズ	接眼レンズ	眼
レンズ曲率半径	$r_1 = 200 \text{ mm}$	$r_2 = 50 \text{ mm}$	$r_3 = 11.59 \text{ mm}$
レンズの屈折率	$n_1 = 1.5$	$n_2 = 1.5$	$n_3 = 1.4$
レンズの大きさ(口径)	$Lh_1 = 100 \text{ mm}$	$Lh_2 = 20 \text{ mm}$	$Lh_3 = 9 \text{ mm}$
レンズ焦点距離 $f$	$f_1 = 200 \text{ mm}$	$f_2 = 50 \text{ mm}$	$f_3 = 14.49 \text{ mm}$
レンズ曲率中心とレンズ中心の距離 $Lcnt$	$Lcnt_1 = 193.65 \text{ mm}$	$Lcnt_2 = 48.99 \text{ mm}$	$Lcnt_3 = 10.69 \text{ mm}$
レンズの幅 $depL$	$depL_1 = 12.7 \text{ mm}$	$depL_2 = 2.02 \text{ mm}$	$depL_3 = 1.82 \text{ mm}$
空気の屈折率	$n_{air} = 1.0$		
対象物-対物レンズ間距離	$a = 10,000 \text{ mm} (10\text{m})$		
レンズ間距離	$Ldst1 = 220 \text{ mm}$ (対物-接眼レンズ), $Ldst2 = 240 \text{ mm}$ (接眼レンズ-眼)		
対象物の大きさ	$h = 10 \text{ mm}$		

## 4.2 解析結果 望遠鏡で見た世界

解析結果を対物レンズ、接眼レンズと眼の部分に分けて説明します。

### 4.2.1 対物レンズ

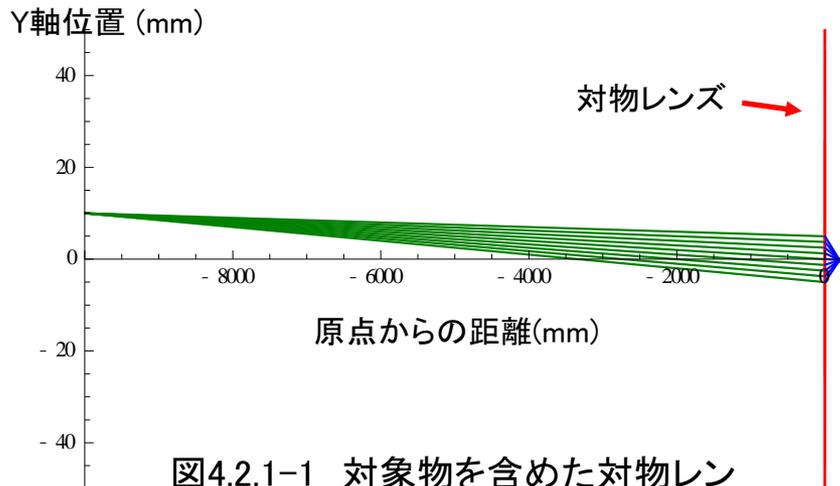


図4.2.1-1 対象物を含めた対物レンズの結像までの光跡

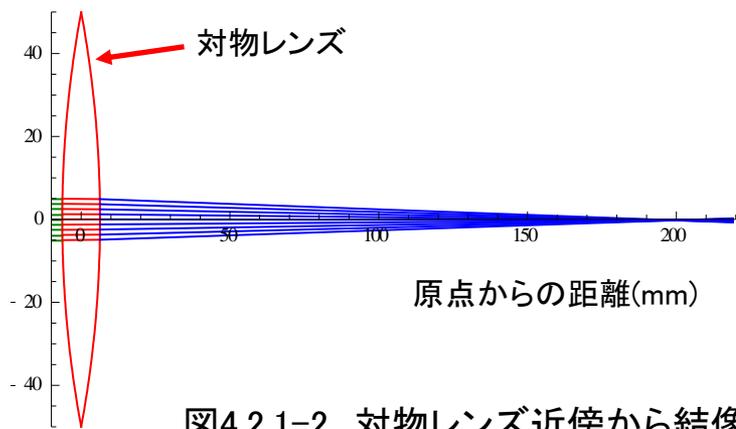


図4.2.1-2 対物レンズ近傍から結像位置までの光跡(実像)

- ① 図4.2.1-1に対象物(被写体)から対物レンズを経由して、接眼レンズの左側まで至る光跡を示します。
- ② 対象物から対物レンズまでの距離  $a$  は、対物レンズの焦点距離  $f_1$  に較べてはるかに長いので、対物レンズに入射した光は必ず実像を結びます。それは青い光線が収束していることから分かります。
- ③ 対象物が対物レンズの焦点距離外に有れば実像を、焦点距離内に有れば虚像となります。そのことを示しているのが図4.2.1-2です。これは図4.2.1-1の対物レンズの右側の部分、即ち、対物レンズ近傍から結像位置までを示したものです。
- ④ 一般に望遠鏡で物を見る場合、距離  $a$  は、焦点距離  $f_1$  に較べて無限長と考えられますので、結像位置は焦点距離  $f_1$  (200mm) の近傍に有ります。

## 4.2 解析結果 望遠鏡で見た世界

### 4.2.1 対物レンズ

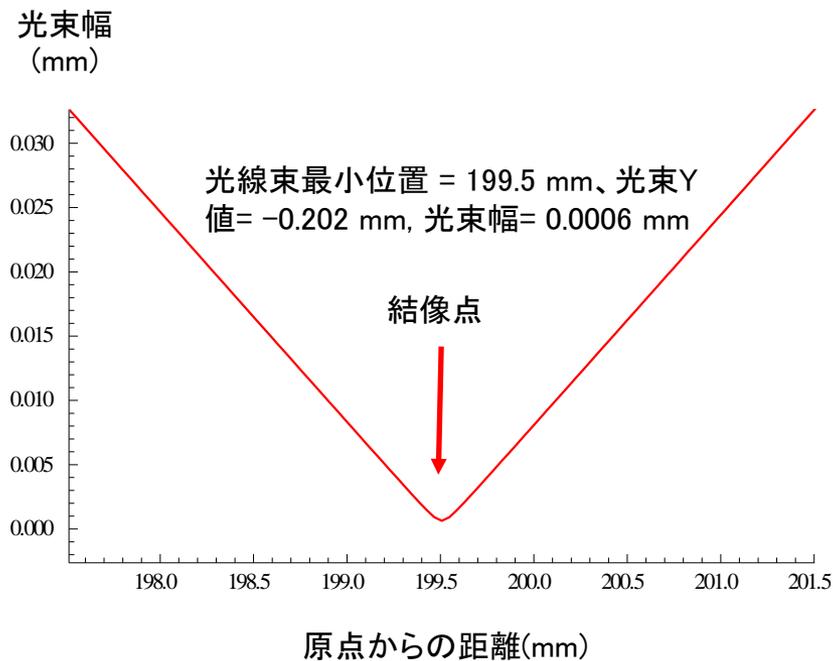


図4.2.1-3 対物レンズ結像位置(実像)にての光束幅の挙動、位置解析光線数= 9

⑤図4.2.1-3は、対物レンズの結像位置近傍の光線の広がりを見たものです。これによれば、光束幅の最小X位置は199.5mmの位置で、そのときのY値(即ち像の大きさ)は、0.2mmで、そのときの光の広がり(光束幅)は0.001mmとかなりの収束度合いを示しています。

## 4.2.2 接眼レンズ

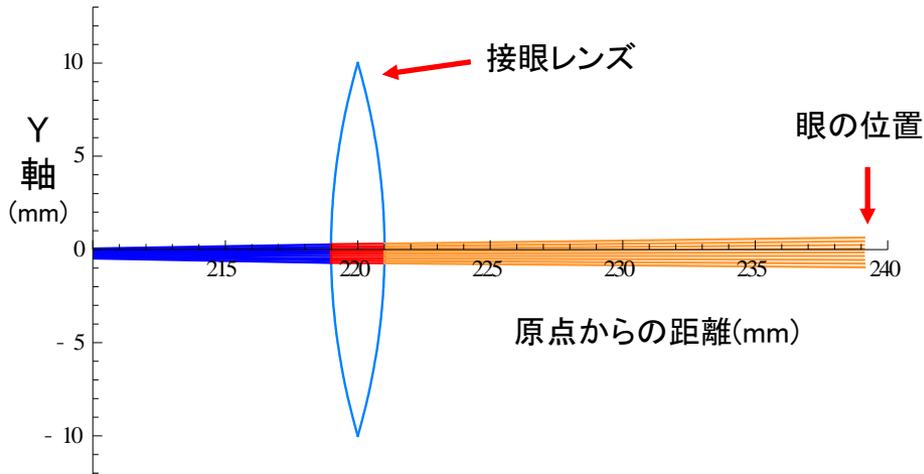


図4.2.2-1 接眼レンズ近傍から結像位置までの光跡(虚像)

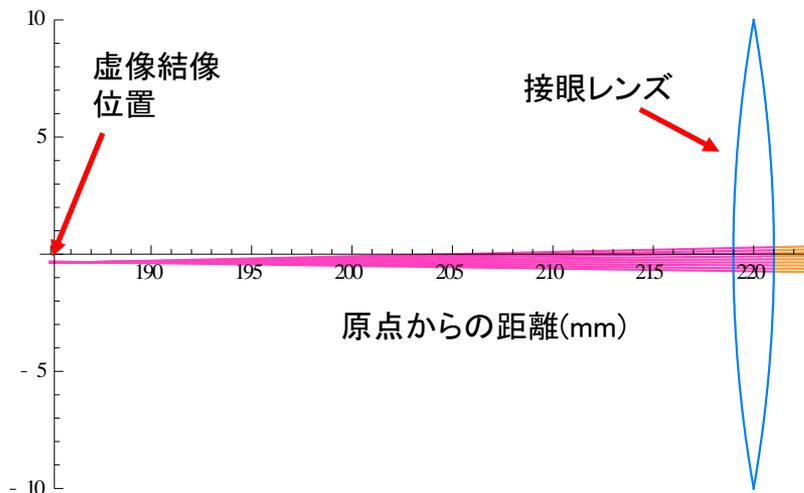


図4.2.2-2 接眼レンズ近傍から虚像位置までの光跡(虚像)

⑥接眼レンズの近傍の光跡を示したものが、図4.2.2-1です。図4.2.1-2の対物レンズを出た光は一旦収束し、その後広がりながら接眼レンズに入ってきます。接眼レンズは原点から220mmの位置に有り、焦点距離  $f_2$  は50mmです。また、対物レンズの結像位置は199.5mm (接眼レンズの左側 20.5 mm) ですので、接眼レンズの焦点距離  $f_2$  内のため、光はレンズ内で広がり、出るときに更に広がります(橙色)。(虚像)

⑦図4.2.2-2は接眼レンズによる虚像の図です。接眼レンズの右側の光線を左側に延長したもので、虚像位置は186.8mmの所で結像しています。

⑧対象物の大きさは10mm で、虚像の大きさが0.34mm です。望遠鏡を使ったのに物が小さく見えると誤解しないでください。望遠鏡の場合も、式(10)の視角倍率  $M$  で判断すべきです。後述⑨をご覧ください。

## 4.2.2 接眼レンズ（続き）

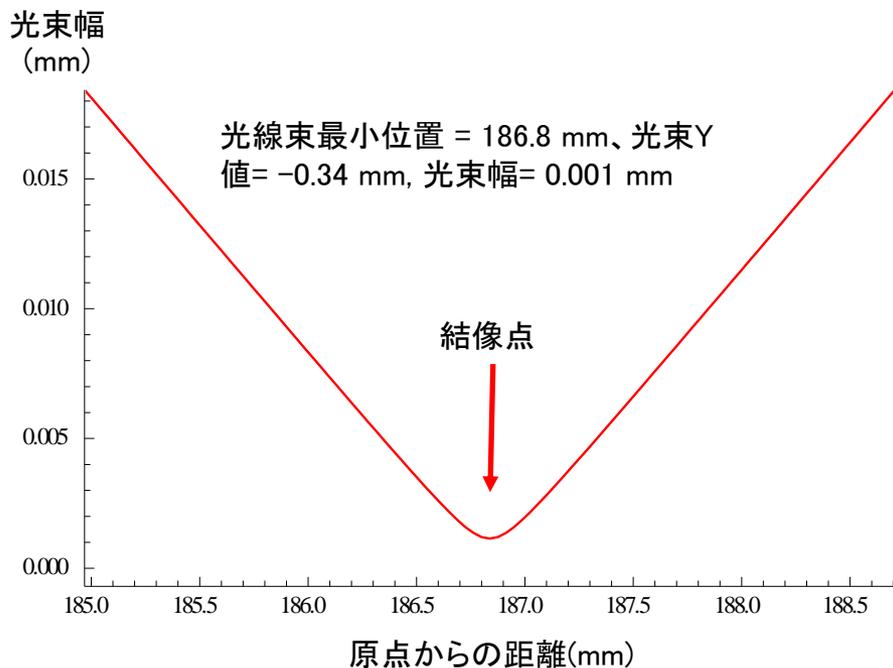
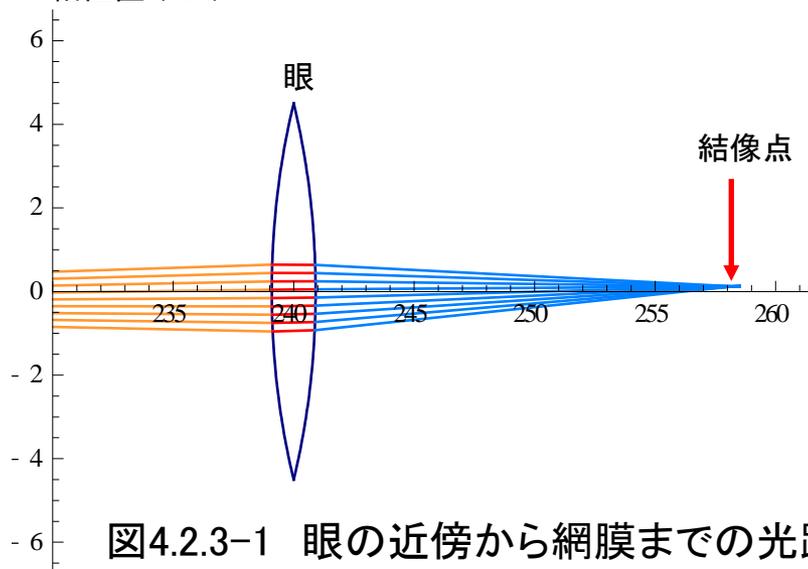


図4.2.2-3 接眼レンズ結像位置(虚像)にての光束幅の挙動、位置解析光線数= 9

- ⑨肉眼の場合、対象物の $\tan[\sigma]$ は、 $10/10000$ 、一方、望遠鏡の場合の $\tan[\sigma']$ は、 $(0.34 - 0.22)/(220 - 186.8)$ です。これより、 $M=3.6$ となり、約4倍の倍率となります。**(0.22は、接眼レンズからの光線の平均位置です。この位置から光が逆進して虚像を結ぶものとして計算しています。以下、同様の処理をしています。)**
- ⑩望遠鏡の倍率は、対物レンズの焦点距離 $f_1$ を接眼レンズの焦点距離 $f_2$ で割ったもので定義されています。それによれば、 $200/50=4$ となり、上記⑨の値に近い値となっています。
- ⑪ピンクの光線束の挙動を見たのが、図4.2.2-3です。これによれば、前述の様に最小X位置は186.8mmの位置です。そのときのY値(即ち像の大きさ)は0.34mmで、そのときの光の広がり(光束幅)は0.001mmとかなりの収束度合いを示しています。

## 4.2.3 眼

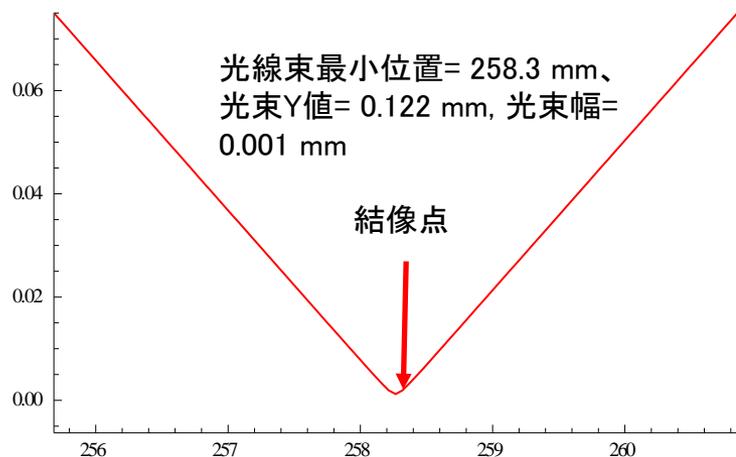
Y軸位置 (mm)



⑫眼の近傍の光跡を示したものが、図4.2.3-1です。図4.2.2-1の接眼レンズを出た光(図の橙色)は、広がりながら眼に入ってきます。虫眼鏡の場合と同様、眼に入った光線は必ず網膜の位置に結像します。即ち、実像を作る様になります。

⑬図4.2.3-2は眼による光の収束度合いを見たものです。最小X位置は258.3mmの位置です。網膜位置が258.5mmですので、かなり近い位置に結像しています。

光束幅 (mm)



そのときのY値(即ち像の大きさ)は0.12mmで、そのときの光の広がり(光束幅)は0.001mmとかなりの収束度合いを示しています。

図4.2.3-2 眼の結像位置(実像)にての光束幅の挙動

## 4.2.4 全体の光跡 望遠鏡で見た世界

- ⑭図4.2.4-1に、以上説明した実光線の眼の網膜までの光跡を示します。この図では、対象物と対物レンズ間の距離が10,000mm (10m) と長いので、対物レンズ以降の光跡はどの様になっているかは分かりません。
- ⑮図4.2.4-2に、対物レンズ以降の光跡を示します。本図により、対物レンズ以降の光跡がより明確に把握できます。接眼レンズから眼に入る光線(橙)が広がっていることが分かります。即ち、遠方の物体を大きく見るためには、眼に入る前に必ず光線を広げる必要が有ります。これは虚像を作ることを意味しています。
- ⑯望遠鏡は、対象物と対物レンズ間の距離  $a$  を変化させることが出来ないため、対物レンズと接眼レンズ間の距離( $L_{dst1}$ )を変化させて像をより鮮明に見ようとします。今回の解析では、自動的にレンズ間を設定することはせず、手入力で設定しました。今後改良が必要な部分です。

## 4.2.4 全体の光跡（続き） 望遠鏡で見た世界

Y軸位置 (mm)

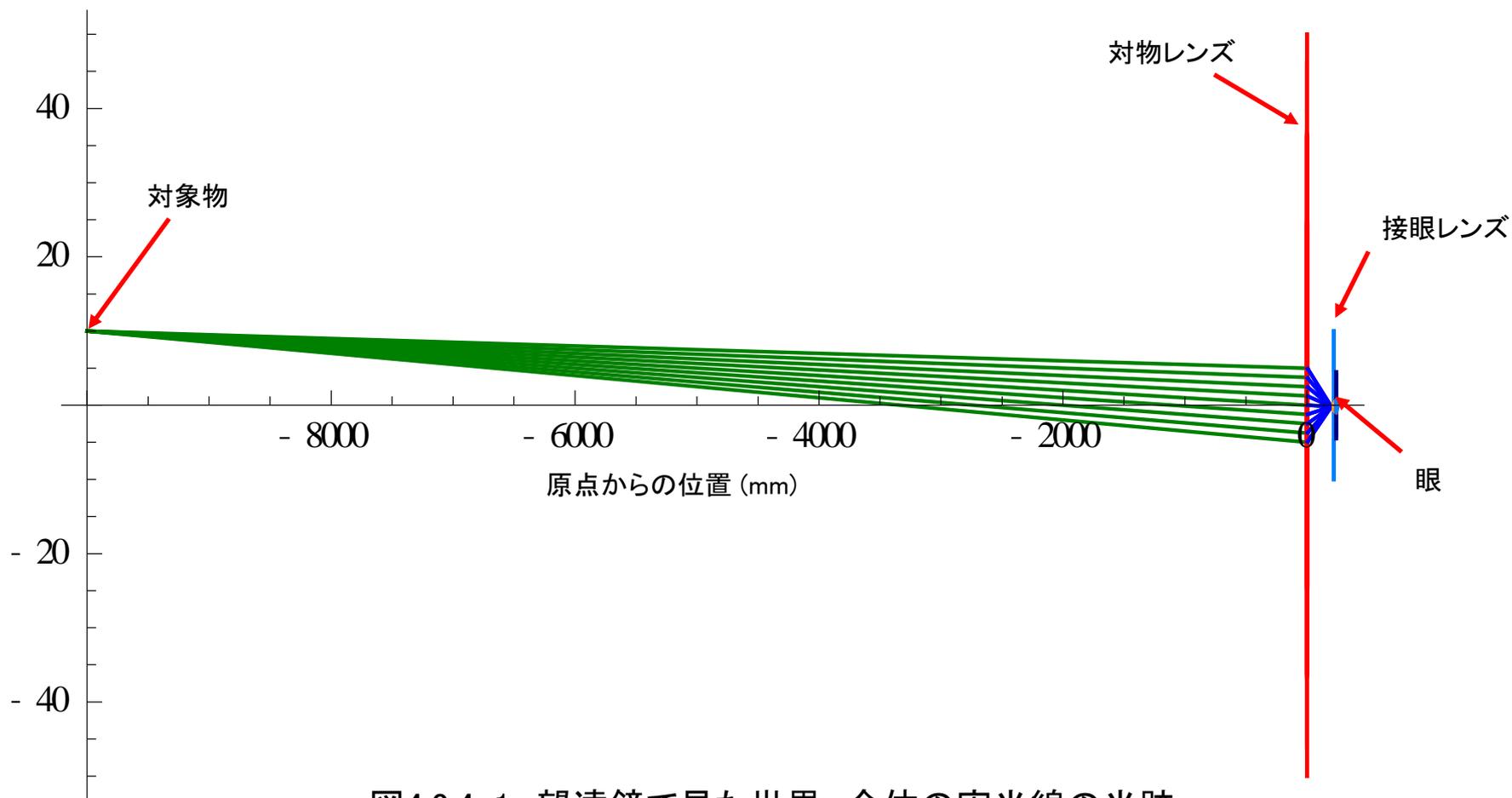


図4.2.4-1 望遠鏡で見た世界 全体の実光線の光跡

## 4.2.4 全体の光跡（続き） 望遠鏡で見た世界

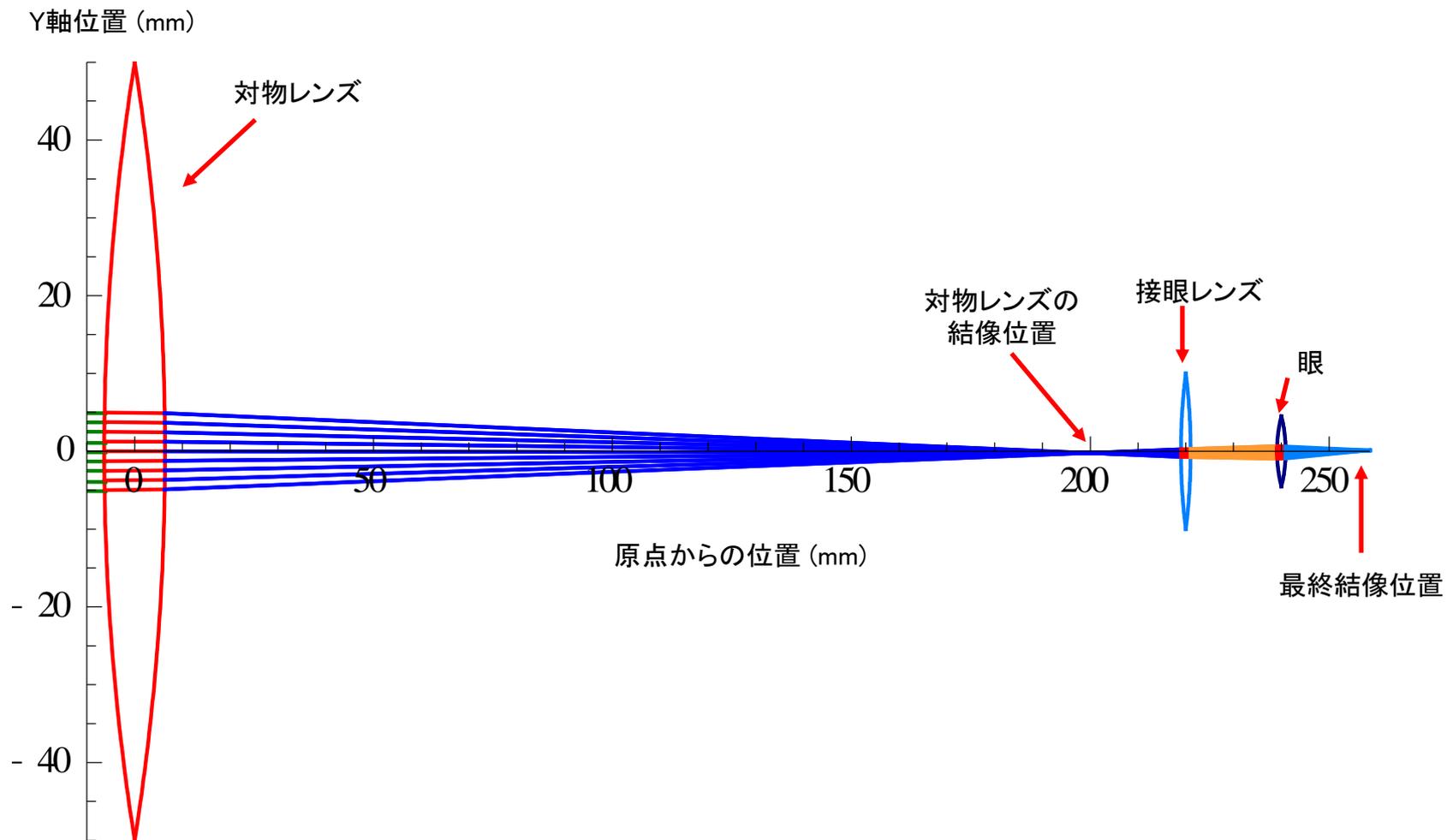


図4.2.4-2 望遠鏡で見た世界 対物レンズから最終結像位置までの実光線の光跡

## 5. 解析3 顕微鏡で見た世界（対物レンズ+接眼レンズ+眼）

サンプル計算として顕微鏡で見た世界を解析します。

### 5.1 解析条件

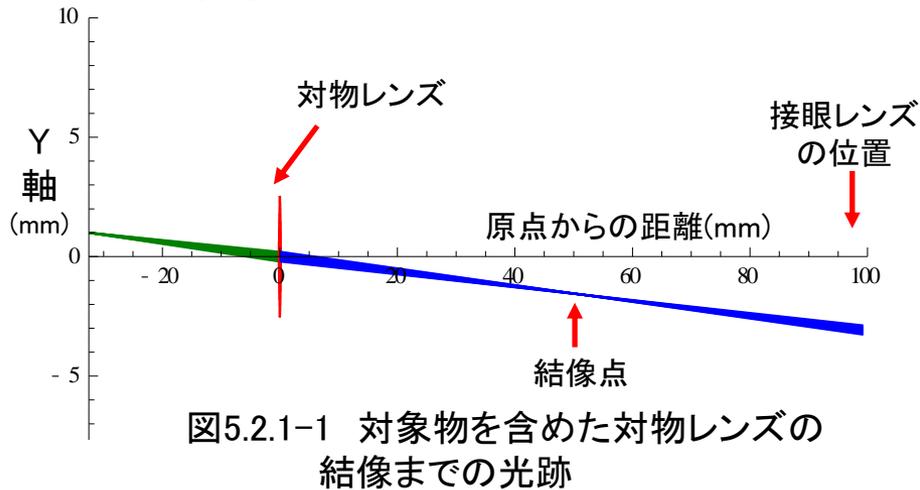
表5.1 組合せレンズの解析条件

項目	対物レンズ	接眼レンズ	眼
レンズ曲率半径	$r_1 = 20 \text{ mm}$	$r_2 = 50 \text{ mm}$	$r_3 = 15.17 \text{ mm}$
レンズの屈折率	$n_1 = 1.5$	$n_2 = 1.5$	$n_3 = 1.4$
レンズの大きさ(口径)	$Lh_1 = 5 \text{ mm}$	$Lh_2 = 20 \text{ mm}$	$Lh_3 = 9 \text{ mm}$
レンズ焦点距離 $f$	$f_1 = 20 \text{ mm}$	$f_2 = 50 \text{ mm}$	$f_3 = 18.96 \text{ mm}$
レンズ曲率中心とレンズ中心の距離 $Lcnt$	$Lcnt_1 = 19.84 \text{ mm}$	$Lcnt_2 = 48.99 \text{ mm}$	$Lcnt_3 = 14.49 \text{ mm}$
レンズの幅 $depL$	$depL_1 = 0.31 \text{ mm}$	$depL_2 = 2.02 \text{ mm}$	$depL_3 = 1.37 \text{ mm}$
空気の屈折率	$n_{air} = 1.0$		
対象物-対物レンズ間距離	$a = 30 \text{ mm}$		
レンズ間距離	$Ldst1 = 100 \text{ mm}$ (対物-接眼レンズ), $Ldst2 = 120 \text{ mm}$ (接眼レンズ-眼)		
対象物の大きさ	$h = 1 \text{ mm}$		

## 5.2 解析結果 顕微鏡で見た世界

解析結果を望遠鏡の場合と同様、対物レンズ、接眼レンズと眼の部分に分けて説明します。

### 5.2.1 対物レンズ

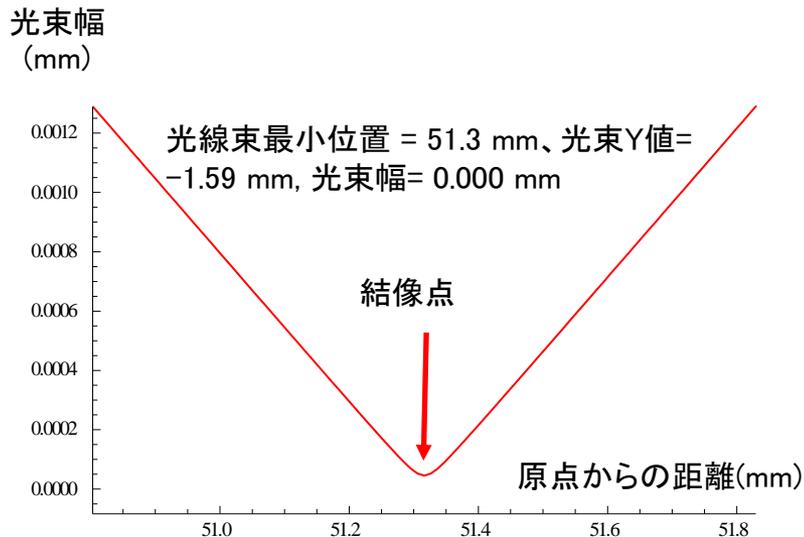


①図5.2.1-1に対象物(被写体)から対物レンズを経由して、接眼レンズの左側まで至る光跡を示します。

②顕微鏡で物を見る場合、対物レンズと接眼レンズ間の距離(Ldst1)は一定で、その代わりに対象物と対物レンズ間の距離(a)を調節して、物を大きく見ます。本解析では  $a=30$  mmと設定しました。(ピントが良く合う最適数値では有りません。)

③対物レンズの焦点距離は、 $f_1=20$ mm であり、対象物は焦点距離外に有るので、実像となります。そのことを示しているのが図5.2.1-2です。結像点は後述の様に、X位置は51.3mmの所です。

④光線束の挙動を見たのが、図5.2.1-2です。これによれば、最小X位置は51.3mmの位置で、そのときのY値(即ち像の大きさ)は、1.59 mmで、そのときの光の広がり(光束幅)は0.000mmとかなりの収束度合いを示しています。



## 5.2.2 接眼レンズ

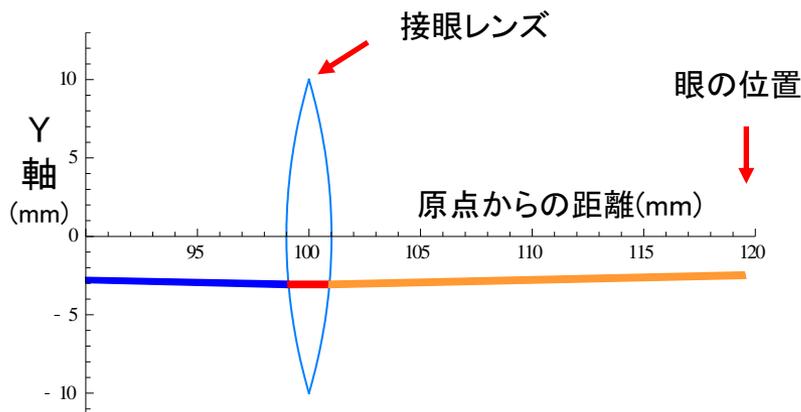


図5.2.2-1 接眼レンズ近傍から眼までの光跡  
(虚像)

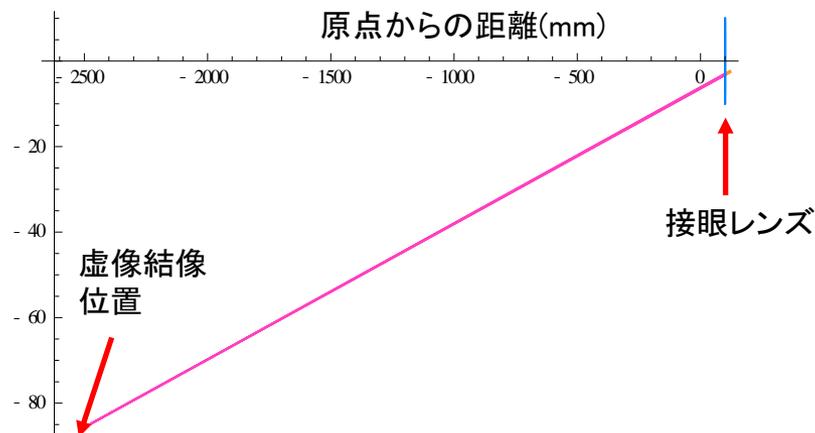


図5.2.2-2 接眼レンズ近傍から虚像位置までの光跡(虚像)

⑤接眼レンズの近傍の光跡を示したものが、図5.2.2-1です。対物レンズを出た光(青色)は、広がりながら接眼レンズに入ってきます。接眼レンズは原点から100mm の位置に有り、焦点距離  $f_2$  は50mm です。また、対物レンズの結像位置は51.3mm (接眼レンズの左側 48.7 mm) ですので、接眼レンズの焦点距離  $f_2$  内のため、光はレンズ内で広がり、出るときに更に広がります(橙色)。(虚像)

⑥図5.2.2-2は接眼レンズによる虚像の図です。接眼レンズの右側の光線を左側に延長したもので、虚像位置は-2492mmの所で結像しています。虚像位置が大きなマイナスの値となったのは、対物レンズの結像位置が接眼レンズの焦点距離に近づきすぎたためです。

⑦上記②で言及しましたが、対象物と対物レンズ間の距離(a)をどの位に設定すれば良いのでしょうか。以下の様に考えてみました。

レンズ間距離  $L_{dst1}$ 、対物レンズの焦点距離  $f_1$  と接眼レンズの焦点距離  $f_2$  は固定していますので、対物レンズの結像位置  $b$  を、以下の様に  $f_2$  以内にすれば良いこととなります。即ち以下です。

## 5.2.2 接眼レンズ

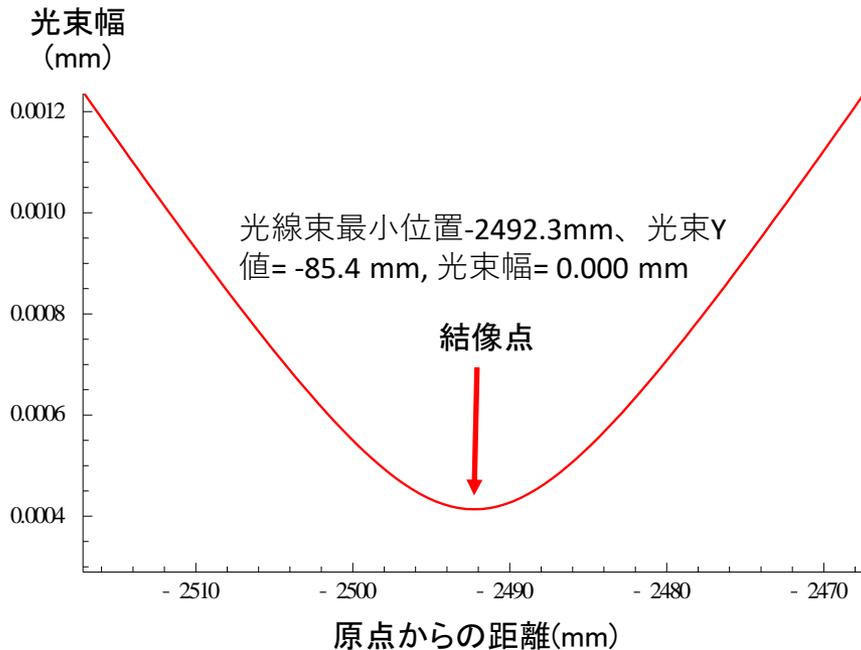


図5.2.2-3 接眼レンズ結像位置(虚像)にての光束幅の挙動、位置解析光線数= 9

- ⑧ 図5.2.2-3は接眼レンズによる光の収束度合いを見たものです。結像位置は $X = -2492\text{mm}$ 、そのときの $Y$ 値(虚像の大きさ)は $85.4\text{mm}$ 、光束幅は $0.000\text{mm}$ です。

望遠鏡の場合と同じく、視角倍率 $M$ を求めてみましょう。

肉眼の場合、対象物の $\text{Tan}[\sigma]$ は、 $1/(30+138.5)$ 、一方、顕微鏡の場合の $\text{Tan}[\sigma']$ は、 $(85.4-3.07)/(100-(-2492.3))$ です。これより、 $M=5.4$ となり、約5倍の倍率となります。(3.07は、接眼レンズからの光線の平均位置です。)

$b = (L_{dst1} - f_2 + \varepsilon)$ 、ここに位置調整量

また、対物レンズによる結像位置 $b'$ は、 $b' = a \cdot f_1 / (a - f_1)$ です。 $b$ と $b'$ は同じものなので、代入すると、 $a$ に対して以下が得られます。

$$a = (L_{dst1} - f_2 + \varepsilon) \cdot f_1 / [L_{dst1} - f_1 - f_2 + \varepsilon]$$

今回の場合  $\varepsilon = 0$  とすれば、  
 $a = (50 \cdot 20) / 30 = 33.3 \text{ mm}$  となります。

実際の設定は  $a = 30\text{mm}$  ですので、近い値となっています。

実際の顕微鏡では調整ねじを回転させればピントが良く合う場所を容易に探せますが、今回の様な数値解析の場合は、経験が必要な様に感じられます。

## 5.2.3 眼

Y軸位置 (mm)

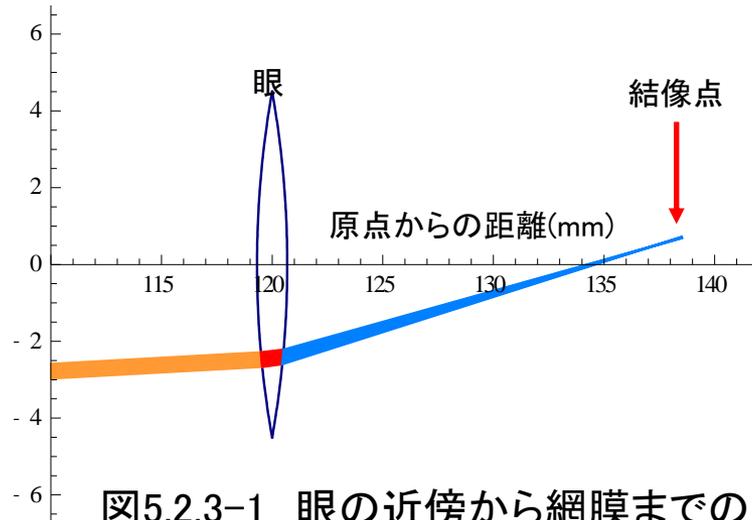


図5.2.3-1 眼の近傍から網膜までの光跡

光束幅 (mm)

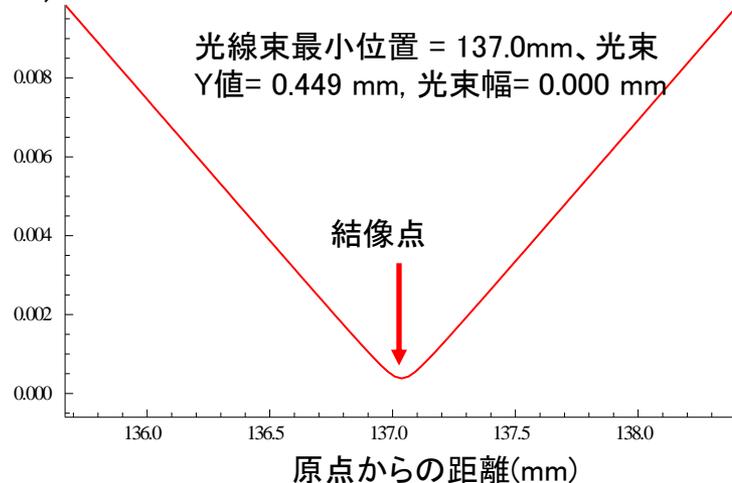


図5.2.3-2 眼の結像位置(実像)にての光束幅の挙動

⑨眼の近傍の光跡を示したものが、図5.2.3-1です。接眼レンズを出た光(橙)は、広がりながら眼に入ってきます。望遠鏡の場合と同様、眼に入った光線は必ず網膜の位置に結像します。即ち、実像を作る様になります。

⑩図5.2.3-2は眼による光の収束度合いを見たものです。最小X位置は137.0mmの位置です。網膜位置が138.5mmですので、かなり近い位置に結像しています。

⑪そのときのY値(即ち像の大きさ)は0.449mmで、そのときの光の広がり(光束幅)は0.000mmとかなりの収束度合いを示しています。

⑫対象物の大きさは同じですので、網膜での結像の大きさを、虫眼鏡の場合と比較してみましょう。

裸眼: 0.075 mm

虫眼鏡: 0.105 mm

顕微鏡: 0.449 mm

比は約4.3倍です。これより虫眼鏡に較べて顕微鏡は網膜の映像比で約4倍の拡大性能が有ると言えます。裸眼との比では、6倍となります。

## 5.2.4 全体の光跡 顕微鏡で見た世界

- ⑬ 図5.2.4-1に、以上説明した実光線の眼の網膜までの光跡を示します。図を見て分かる様に、物を顕微鏡を通してみる場合、望遠鏡と同様、**接眼レンズから出た光(図の橙)は眼に入るまでに角度を広げます。このことが物を大きく見せている要因です。**最終的に光線が眼に入ると、必ず実像として網膜に結像します。この実像を見て、物を大きいと脳が判断しています。虚像そのものを見て大きいと感じている訳ではありません。
- ⑭ 図5.2.4-2に、虚像を含めた光跡を示します。前述⑥で説明しましたが、接眼レンズから出た光(図の橙)を逆走(図のピンク色)しますと虚像の結像点に至ります。虫眼鏡の項でも記載の様に、虚像結像点のY位置と対象物の大きさを比較しても、顕微鏡の倍率にはなりません。視角倍率での比較が正しい認識です。
- ⑮ 今回、対象物と対物レンズの距離( $a$ )を適当に設定しました。どの位置が適切な場所であるのかを示すパラメータを見極めて、自動で設定できるように改良したいと思います。

## 5.2.4 全体の光跡（続き）顕微鏡で見た世界

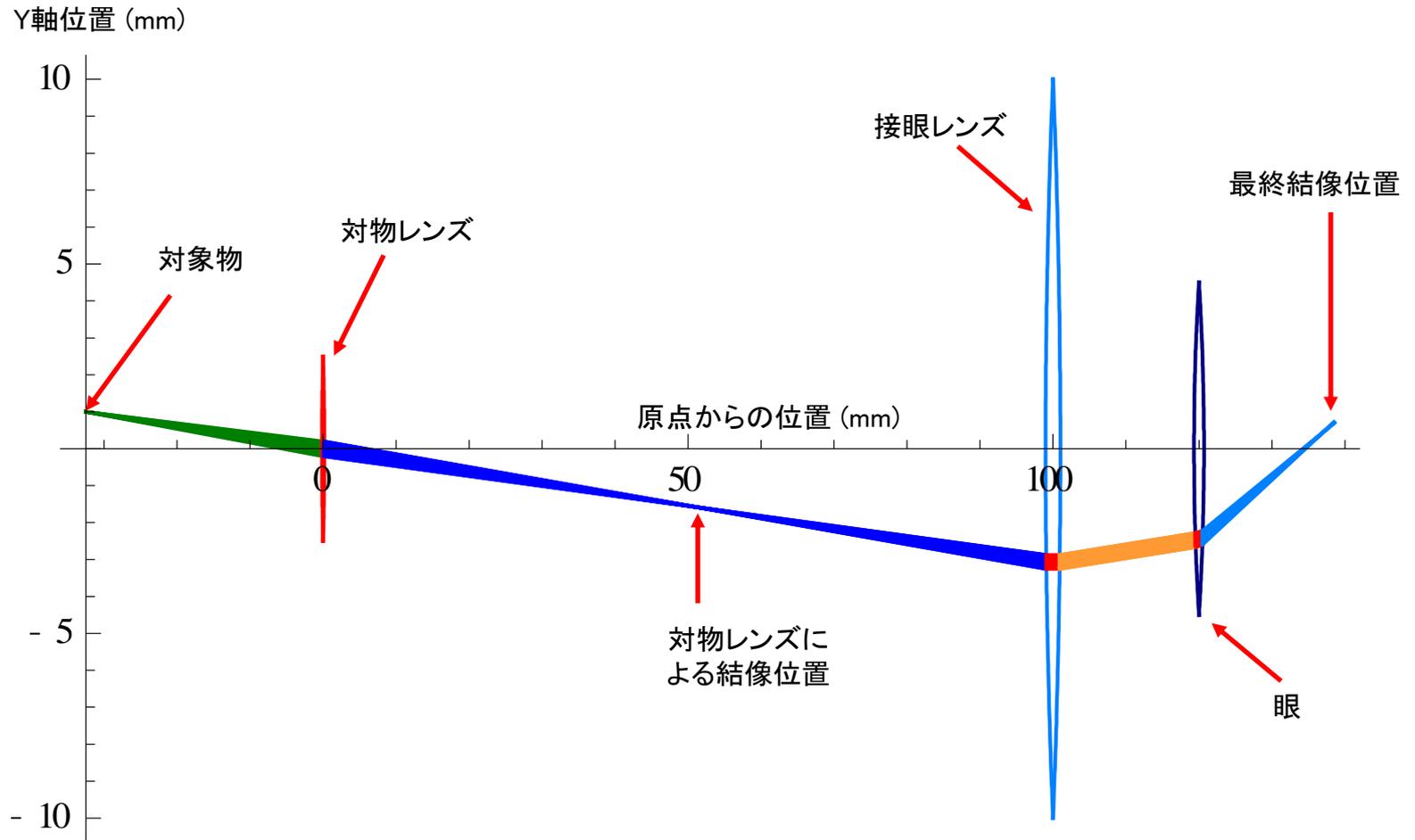


図5.2.4-1 全体の実光線の光跡

## 5.2.4 全体の光跡（続き）顕微鏡で見た世界

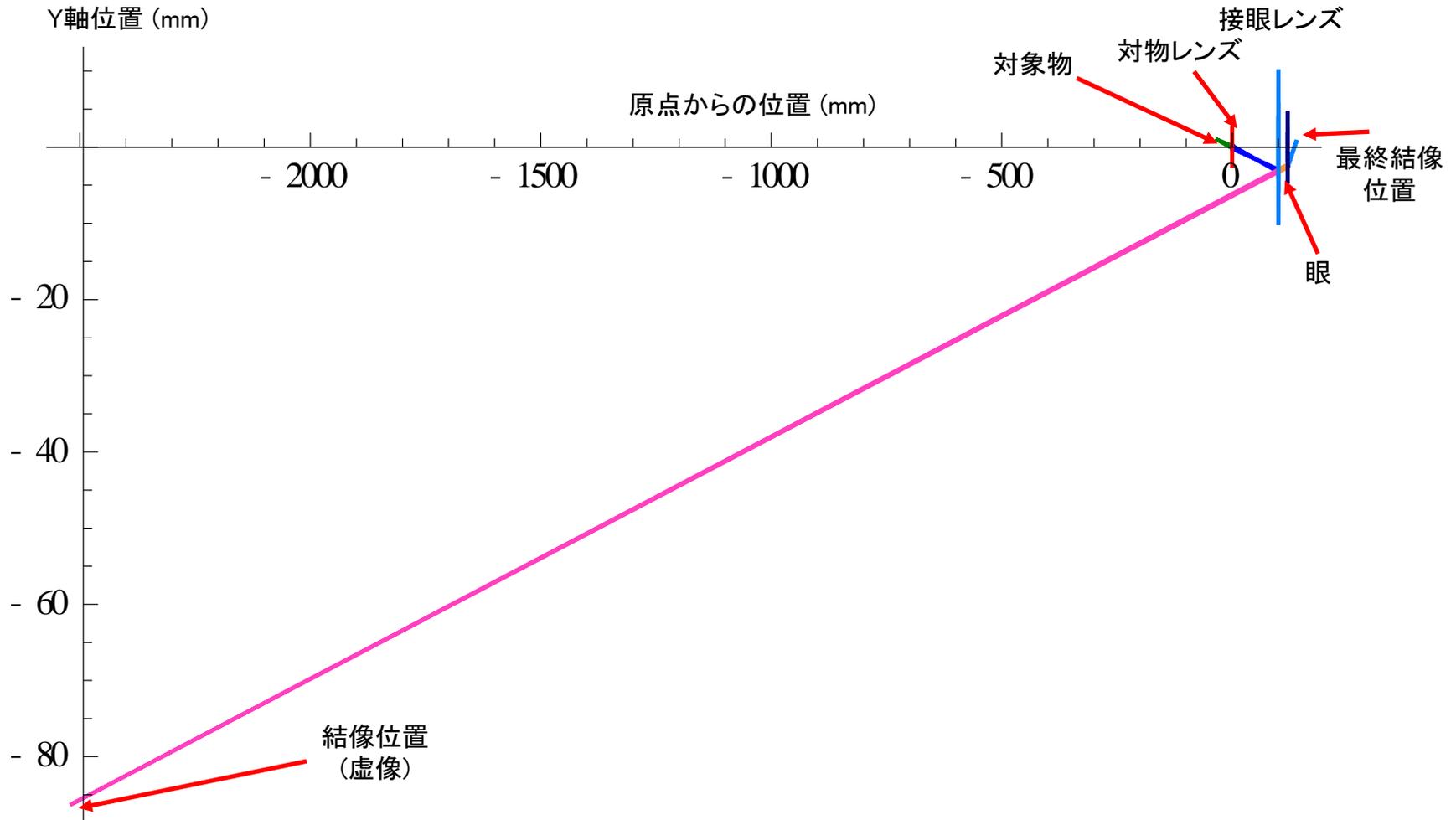


図5.2.4-2 対象物から最終結像位置までの光跡(虚像を含む)

## 6. 考察

今回、組合せレンズの数値解析を行い、以下の知見を得ました。

- ①数値解析プログラムを作成することにより、光学レンズの挙動をより詳細に把握することが出来ました。
- ②サンプル計算を通して、虫眼鏡、望遠鏡、顕微鏡を用いて物を見る場合、対象物が大きいと感じるのは全て網膜に映る実像を見て、脳が判断しているということです。決して虚像を見て大きいと感じている訳では有りません。
- ③網膜の像の倍率と、虫眼鏡、望遠鏡、顕微鏡の視角倍率 $M$ が比較的に近い値であることが分かりました。このため、光学器械の倍率の推定に、網膜の像の倍率が使用可能であることが分かりました。
- ④今回のサンプル計算では、対物レンズか接眼レンズのいずれかで虚像を作成して、像を大きくするようにしました。虚像を作成せずに実像のみでは結像を大きくすることは出来ないことが分かりました(3.4節参照)。
- ⑤顕微鏡の解析においては、対象物と対物レンズの距離( $a$ )を適当に設定しました。どの位置が適切な場所で有るのかを示すパラメータを見極めて、自動で設定できる様に改良したいと思います。
- ⑥また、解析プログラムの改良点としては、レンズ間距離の自動設定、前回報告—その1—で示したような、結像の姿(対象物の像の見え方)を取り扱えるようにしたいと思います。
- ⑦本解析の最終目的である、ズームレンズとは何かについて引き続き検討したいと思います。