

ズームレンズの理論的検討

－ その1 レンズの基礎 －

2020(令和2)年03月16日

菅原 政治郎

1. 背景

小生が良く散歩する恩田川(一級河川「鶴見川」の支流)を散歩している時にきれいな翡翠色の羽を持つカワセミに出会い、その美しさをカメラに撮っておきたいと思ったのは、小生一人だけではないと思います。しかし、カワセミは警戒心の強い鳥で、中々人の近くに来てくれません。このため、大きな望遠レンズを持ったカメラマンが、好条件の場所を求めて群がります。

小生の持っている望遠レンズは、焦点距離150-500mm、全長250mm、重さ1.9 kg の結構重いズームレンズです。この様な重いレンズでは、気軽にカメラを持って野外撮影とは行きません。このため、小型で性能の良い望遠カメラがあればカワセミを自由に撮影できます。

ところで、物が大きく見えるというのはどういうことなのであろうかと思い、凸レンズについて基本的な所から考えたいと思い、本資料を作成しました。

検討範囲は、レンズによる実像、虚像の検討、及び我々の眼で物を見たときにどの様に見えるかを検討しました。

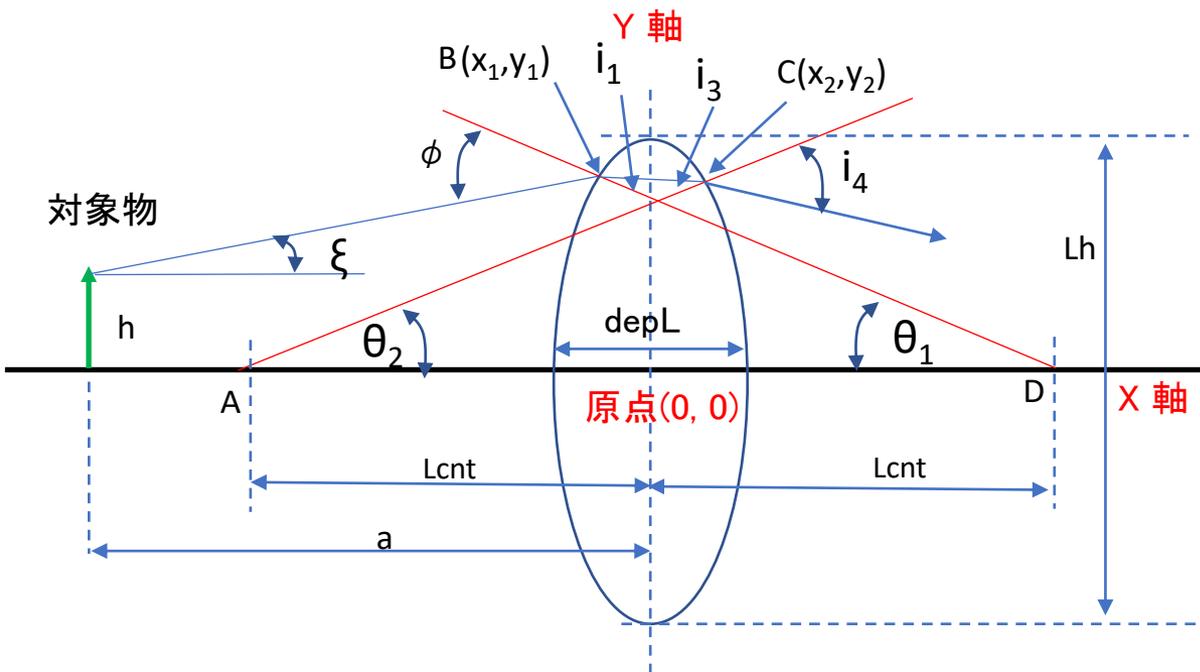
2. レンズの基礎的検討

本章においては、1枚の凸レンズ(以下、「レンズ」と記載)による理論的検討をします。レンズの特徴は以下です。

- (1)レンズは曲率半径 r_1 の対称形レンズ。
- (2)レンズの屈折率は n_1 、空気の屈折率は n_{air} 。
- (3)レンズの大きさ(口径)は Lh 。

2.1 解析体系

解析体系は、図2.1に示すものです。



- (1)レンズの左方 a の位置に対象物が有り、その高さを h とし、先端に点光源があるとします。
- (2)Aの点にレンズの右曲面の中心が有り、D点に左曲面の中心が有り、曲率半径は r_1 です。
- (3)点光源から ξ の角度を持って出た光はB点 (x_1, y_1) に達するものとし、この時のレンズへの入射角を ϕ とします。

図2.1 レンズの図示的位置関係

2.1 解析体系（続き）

(4) 光は屈折率 n_1 のレンズ中を進行し、この時の屈折角を i_1 とします。

(5) 光はレンズの右側面に達し、その点をC (x_2, y_2) とします。点Cでの法線と光とのなす角を i_3 とします。

(6) その後、光は空気中に出ますが、この時の屈折角を i_4 とします。

以上より、以下のことが得られます。

(1) レンズの焦点距離を f_1 とすると、以下となります。

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n_1 - n_{air}}{n_{air}} \right) \left(\frac{2}{r_1} \right) \quad \longrightarrow \quad f_1 = \frac{n_{air} r_1}{2(n_1 - n_{air})} \quad \dots(1)$$

(2) レンズ中心の点A(及びD)間の距離 L_{cnt} は以下となります。

$$L_{cnt} = r_1 * \text{Cos}[\theta] \quad \text{ここに、} \quad \theta = \text{ArcSin}[Lh/(2r_1)] \quad \dots(2)$$

従って、レンズの幅を $depL$ とすると以下となります。

$$depL = 2(r_1 - L_{cnt}) \quad \dots(3)$$

(3) 角度 ξ は以下となります。

$$\xi = \text{ArcTan}[(y_1 - h)/(|x_1 - (-a)|)] \quad \dots(4)$$

2.1 解析体系（続き）

(4) レンズへの入射角度 ϕ は以下となります。

$$\phi = \theta_1 + \xi \quad \text{但し、}\theta_1\text{は解析の時に既知とします。}\left(\text{事前に設定して置きます。}\right) \quad \dots(5)$$

ここに、式(4)の x_1, y_1 は以下で与えられます。

$$x_1 = Lcnt - r_1 * \text{Cos}[\theta_1], \quad y_1 = r_1 * \text{Sin}[\theta_1] \quad \dots(6)$$

(5) 屈折角度 i_1 は、スネルの法則を用い、以下となります。

$$i_1 = \text{ArcSin}\left[\frac{n_{air} * \text{Sin}[\phi]}{n_1}\right] \quad \dots(7)$$

(6) 屈折角度 i_1 で点B (x_1, y_1)を通る光線の直線の式は下となります。

$$y = \alpha(x - x_1) + y_1 \quad \text{但し、}\alpha = -\text{Tan}[\theta_1 - i_1] \quad \dots(8)$$

(7) レンズの右側曲面の方程式は以下となります。

$$(x - (-Lcnt))^2 + y^2 = r_1^2 \quad \dots(9)$$

2.1 解析体系 (続き)

(8) 点C (x_2, y_2) は、式(8)及び(9)を同時に満たす点です。但し、 $x_2 > 0$ に注意します。

(9) 次に点AとCを結ぶ直線を考えると、これはレンズから空気中に出ようとする光線に対する法線になります。角度 θ_2, i_3 は以下で与えられます。

$$\theta_2 = \text{ArcTan}\left[\frac{y_2}{|x_2 - (-Lcnt)|}\right] \quad \dots(10)$$

$$i_3 = \theta_2 + \theta_1 - i_1 \quad \dots(11)$$

(10) 屈折角度 i_4 は、スネルの法則を用い、以下となります。

$$i_4 = \text{ArcSin}\left[\frac{n_1 * \text{Sin}[i_3]}{n_{\text{air}}}\right] \quad \dots(12)$$

(11) 点C (x_2, y_2)を通る光線の式は以下となります。

$$y = \beta(x - x_2) + y_2 \quad \text{但し、} \beta = -\text{Tan}[i_4 - \theta_2] \quad \dots(13)$$

2.2 光学的数式の検討

幾何光学の代表的な式として、以下の式があります。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \dots(14)$$

ここに、a: 対象物(被写体)とレンズ中心間の距離
b: レンズ中心と結像位置との間の距離
f: レンズの焦点距離

上式は、薄レンズに対する式です。

2.3 数値解析による光学公式の検討

本節では、前節までに検討した式を用い、実際に光がどのように像を結ぶかを、対象物(被写体)とレンズ中心間の距離 a をパラメータとして検討します。

2.3.1 解析条件

- (1) レンズ曲率半径 $r_1 = 200 \text{ mm}$
- (2) レンズの大きさ(口径) $Lh = 50 \text{ mm}$
- (3) レンズの屈折率 $n_1 = 1.5$
- (4) 空気の屈折率 $n_{\text{air}} = 1.0$
- (5) 対象物の大きさ $h = 10 \text{ mm}$

2.3.2 解析条件から得られる定数

- (1) レンズの焦点距離 $f_1 = 200 \text{ mm}$
- (2) レンズの幅 $\text{depL} = 3.14 \text{ mm}$

2.3.3 パラメータ (a)

- (1) $a = 10,000 \text{ mm}$
- (2) $a = 500 \text{ mm}$
- (3) $a = 250 \text{ mm}$
- (4) $a = 50 \text{ mm}$

2.3.4 パラメータ ($a = 10,000$ mm)の結果

- ①対象物の先端 $h=10$ mm に点光源が有る場合の、光跡の結果を図2.3.1に示します。光跡を示すに当たり、**光を9本の光線で模擬しました**。図の緑の線は、レンズに入る前の光跡、赤はレンズ及びレンズ内の光跡、青はレンズ透過後の光跡を示します。レンズ透過後に光線が収束していることが分かります。また、対象物がレンズより10mの遠方にあるので、1点から出た光はほぼ平行光線として入って来ていることが分かります。**(光は等方向(全空間)に放射されるので、必ずレンズの大きさ(口径)に入射する光があります。対象物が10mmの大きさなので、10mmの長さの光のみがレンズに入るということでは有りません。)**
- ②式(14)より得られる結像位置は、 $b = 204.08$ mmです。この点における9本で模擬した光線のY軸位置の像の大きさは、 $-0.440237, -0.268346, -0.193784, -0.182835, -0.203514, -0.224678, -0.215203, -0.143154, 0.0250924$ です。このことは、対象物よりもかなり小さく結像(実像)されているということです。
- ③上記①の光線の交点の分布を示したのが図2.3.2です。交点数は9本の光線から2本を選ぶので、その組合せ(交点)数は36で、そのX軸方向の平均値 X_{av} は202.50 mm、Y軸方向の平均値 Y_{av} は -0.202 mmです。図より分かる様に、交点がかかなり分散していることが分かります。上記②で示した様に、式(14)より得られる結像位置は、 $b = 204.08$ mmですが、**解析で分かったことは、1点で光が収束することは無く、分散することです。唯、どこに交点が集まっているかで、像がくっきり見えるか見えないかだと思います。**
- ④上記①では対象物の頂上に点光源が有る場合の光跡を示しました。これを応用し、対象物の下($h=0$)から頂上($h=10$)まで点光源を付けてみたら、対象物がどの様に見えるかが分かります。それを示したのが図2.3.3です**(方法は後述2.7.2項を参照ください)**。図より分かる様に、像は倒立です。この様な像を**倒立実像**と呼んでいます。本ケースでは、対象物より像は小さくなっています。

2.3.4 パラメータ ($a = 10,000$ mm)の結果 (続き)

レンズ中心からの
Y 軸位置(mm)

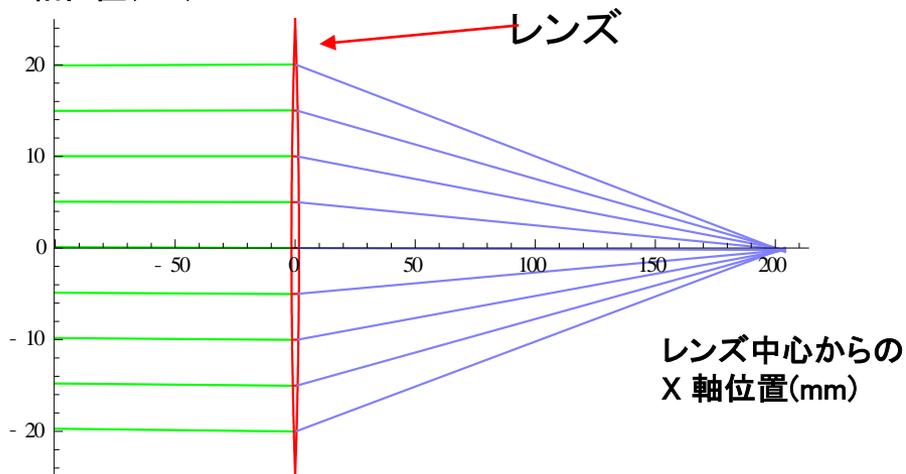


図2.3.1 光跡 ($a = 10,000$ mm)

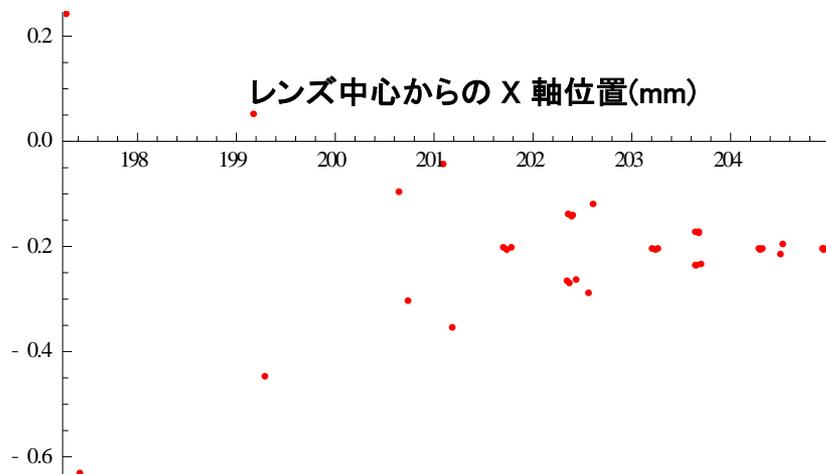


図2.3.2 光線交点の分布 ($a = 10,000$ mm)

レンズ中心からの X 軸位置(mm)

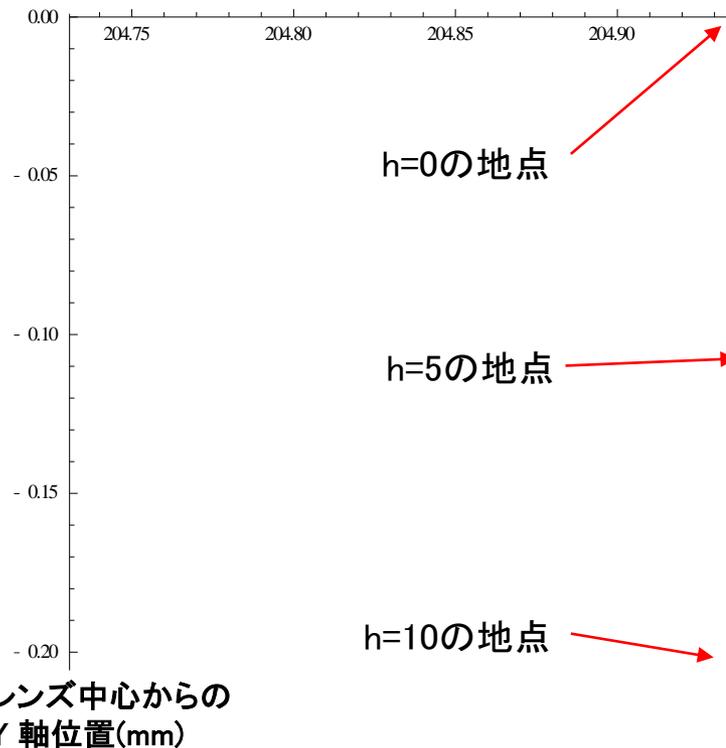


図2.3.3 対象物の像の見え方
($a = 10,000$ mm)

2.3.5 パラメータ ($a = 500 \text{ mm}$)の結果

- ①光跡の結果を図2.3.4に示します。対象物がレンズより500mmと比較的近いので、レンズ透過後に角度を持って光線が収束していることが分かります(倒立実像)。
- ②式(14)より得られる結像位置は、 $b = 333.33 \text{ mm}$ です。この点における9本で模擬した光線のY軸位置の像の大きさは、 $-6.97087, -6.76005, -6.66374, -6.64381, -6.66331, -6.68601, -6.67589, -6.59665, -6.4112$ です。このことは、対象物よりも小さく結像(実像)されているということです。但し、2.3.4項よりも像の大きさは約30倍ほど大きくなっていることが分かります。即ち、10m遠方よりも50cmの方が同じ物でも大きく見えるのは、日常我々が経験していることです。
- ③上記①の光線の交点の分布を示したのが図2.3.5です。交点数36のX軸方向の平均値 X_{av} は330.16 mm、Y軸方向の平均値 Y_{av} は -6.601 mm です。図より分かる様に、交点はかなり分散していることが分かります。
- ④また、図2.3.4より、実像(光線がレンズの右側で交差する)であることが確認されますが、光線の収束点(交点)より求めた結像位置B(交点の平均値)のX軸方向は、式(14)より得られる位置($b = 333.33 \text{ mm}$)より内側に入っており、計算との若干のずれが見られます。但し、Y軸の変動はそれ程大きくはなっていません。
- ⑤対象物がどの様に見えるかを示したのが図2.3.6です。図より倒立実像で、 $a=10000 \text{ mm}$ のケースに較べて像が大きく、かつ、像のそりが見えてきました。(そりについては、後述「2.7 Seidelの収差」にて解説しています)

2.3.5 パラメータ ($a = 500$ mm)の結果 (続き)

レンズ中心からの
Y 軸位置(mm)

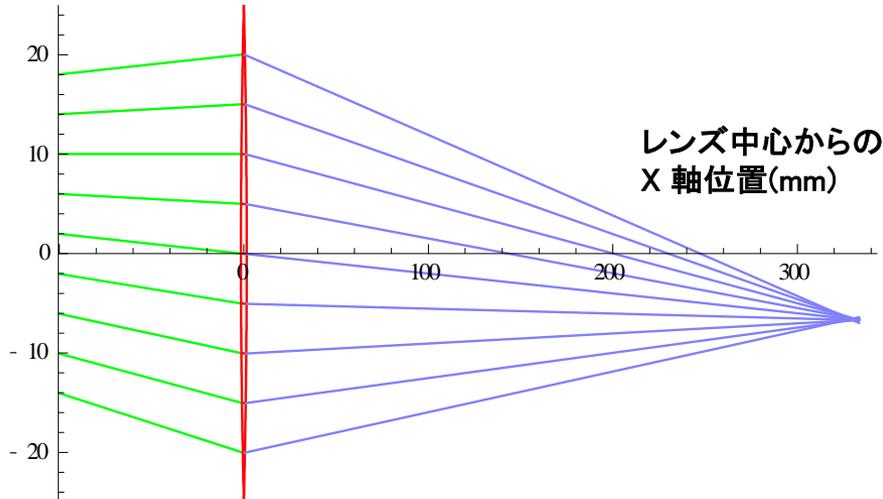


図2.3.4 光跡 ($a = 500$ mm)

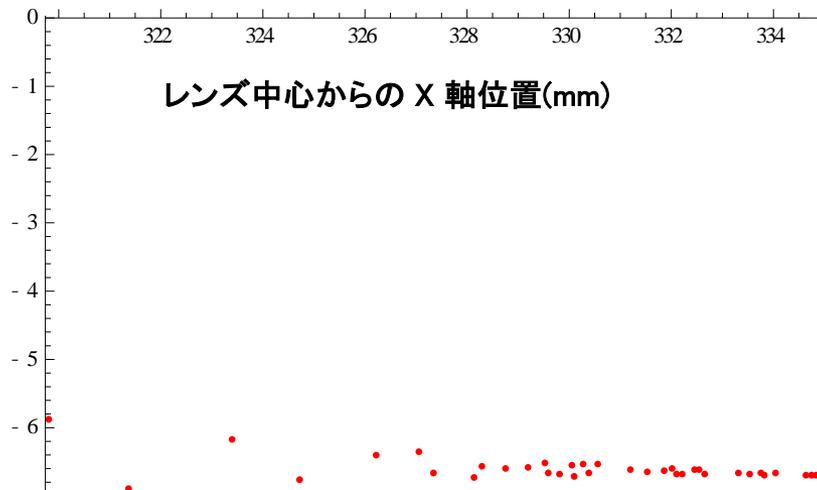


図2.3.5 光線交点の分布 ($a = 500$ mm)

レンズ中心からの X 軸位置(mm)

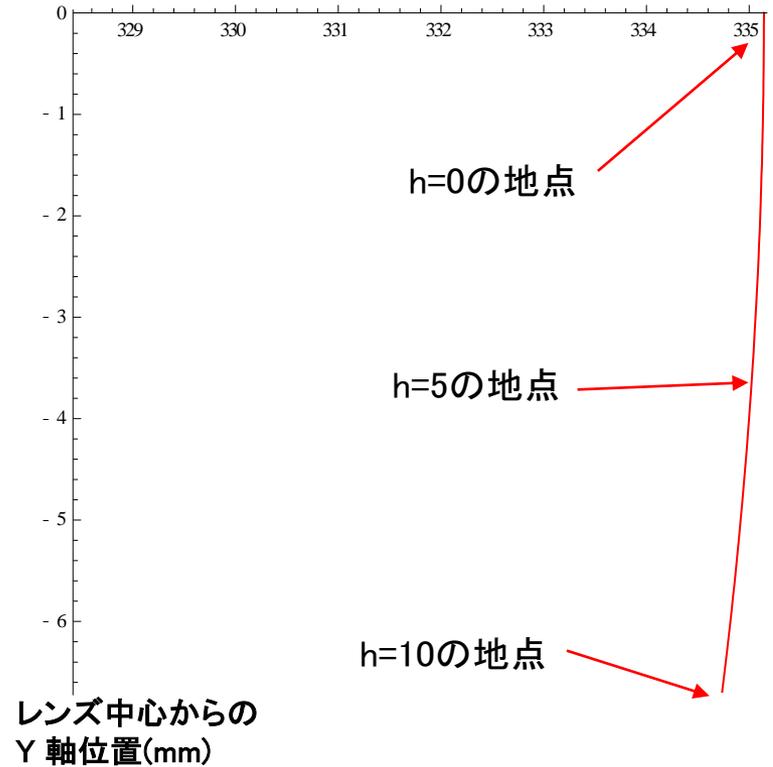


図2.3.6 対象物の像の見え方
($a = 500$ mm)

2.3.6 パラメータ ($a = 250 \text{ mm}$)の結果

- ①光跡の結果を図2.3.7に示します。対象物がレンズの焦点距離(200mm)に近い250mmに設置されていますので、光はレンズに角度を持って入って来ており、レンズ透過後に角度を持って光線が収束していることが分かります(倒立実像)。
- ②式(14)より得られる結像位置は、 $b = 1,000 \text{ mm}$ です。この点における9本で模擬した光線のY軸位置の像の大きさは $-40.7726, -40.2443, -40.035, -40.0167, -40.0629, -40.0481, -39.8477, -39.3384, -38.3975$ です。このことは、対象物よりも大きく結像(実像)されているということです。即ち像が拡大されているということです。
- ③上記①の光線の交点の分布を示したのが図2.3.8です。交点数36のX軸方向の平均値 X_{av} は958.72 mm、Y軸方向の平均値 Y_{av} は -38.38mm です。図より分かる様に、交点はかなり分散していることが分かります。
- ④光線の収束点(交点)より求めた結像位置B(交点の平均値)は、式(14)より得られる位置($b = 1,000 \text{ mm}$)よりかなり内側に入っており、X軸方向に関しては計算とのずれが見られます。但し、Y軸の変動はそれ程大きくはなっていません。
- ⑤対象物がどの様に見えるかを示したのが図2.3.9です。図より分かる様に、像は倒立で、しかも対象物より大きくなっています。また、 $a=500\text{mm}$ の場合に較べて更にそりが大きくなってきました。

2.3.6 パラメータ ($a = 250$ mm)の結果 (続き)

レンズ中心からの
Y 軸位置(mm)

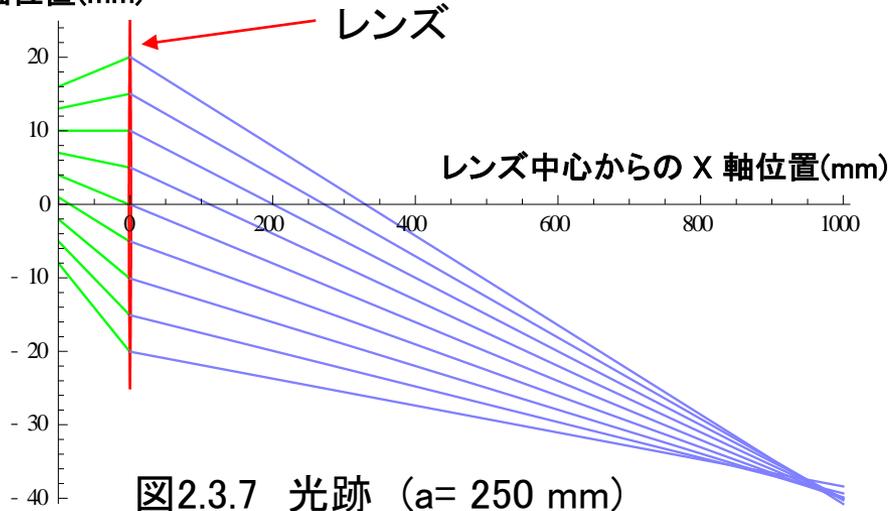


図2.3.7 光跡 ($a = 250$ mm)

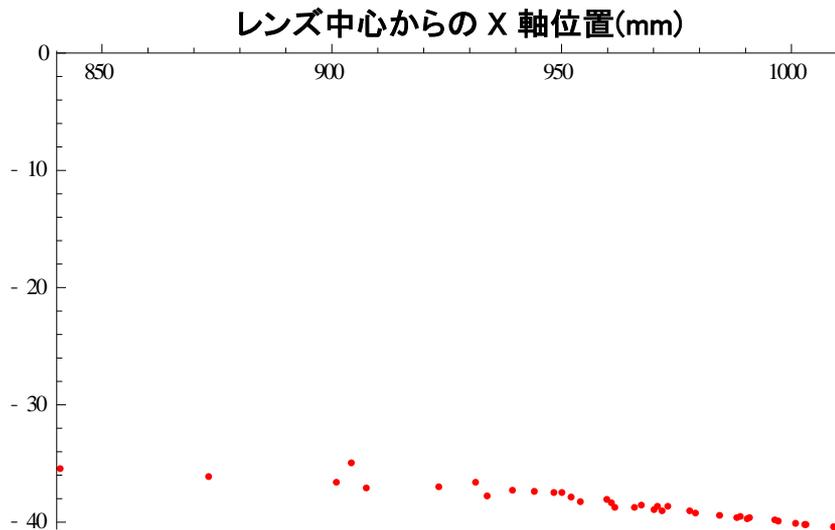


図2.3.8 光線交点の分布 ($a = 250$ mm)

レンズ中心からの X 軸位置(mm)

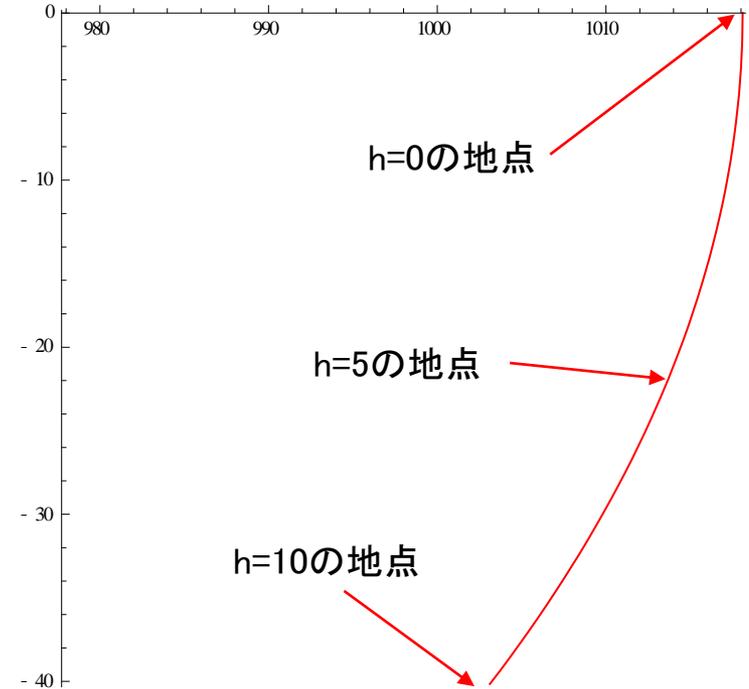


図2.3.9 対象物の像の見え方
($a = 250$ mm)

2.3.7 パラメータ ($a = 50 \text{ mm}$)の結果

- ①光跡の結果を図2.3.10に示します。対象物がレンズの焦点距離($f=200\text{mm}$)の内側にある場合です。これは我々が虫眼鏡を通して物を見る場合(虚像)に相当します。
- ②緑の線が一点に集まっている場所が、点光源の場所です。レンズに入った光は、レンズを透過する(青線)と収束することなく、発散していることが分かります。
- ③ピンクの線は、青線を点光源の方に延長したもので、式(14)より得られる像(虚像)位置は、 $b = -66.67 \text{ mm}$ となります。仮想点の分布を示したものが図2.3.11です。
- ④青色の線が発散して結像しないということは、レンズの右側に仮にフィルムを置いて、点光源の写真を撮ったとしても、フィルム上には無数の点が映り、何が映っているのか判別出来ないことを示しています。
- ⑤ピンクの線より分かる様に、虚像が一点に集中していないのは、実像の場合と同じで、Seidelの収差(後述)の影響です。
- ⑥もし虚像がレンズの左側で結像すると仮定した場合、その見える像は、図2.3.12の様になります。図より分かる様に、像は正立で、このような像を正立虚像と呼んでいます。本ケースでは、対象物より大きくなっています。

2.3.7 パラメータ ($a = 50 \text{ mm}$)の結果 (続き)

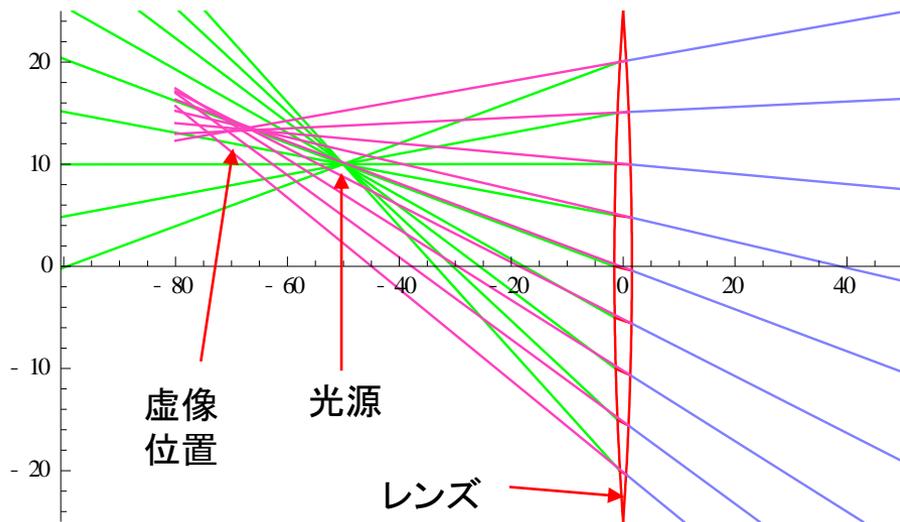


図2.3.10 光跡 ($a = 50 \text{ mm}$)

レンズ中心からの
Y 軸位置(mm)

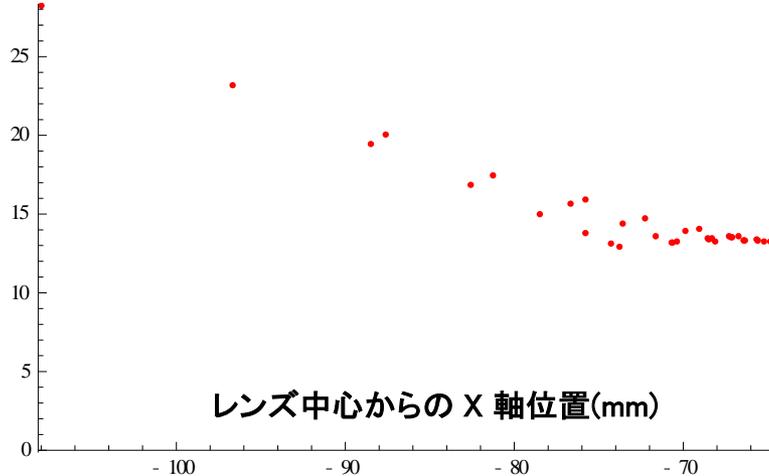


図2.3.11 光線交点の分布 ($a = 50 \text{ mm}$)

レンズ中心からの
Y 軸位置(mm)

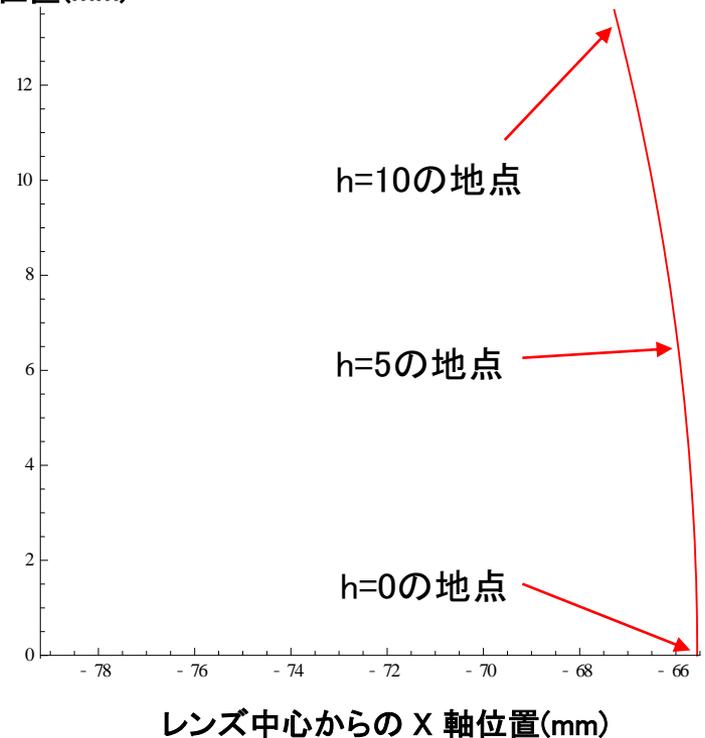


図2.3.12日 虚像の見え方
($a = 50 \text{ mm}$)

2.4 計算手法の妥当性の検討

前節までの検討では、対象物がレンズの焦点距離の位置に近づくほど、式(14)で得られる結像位置 b と、実際の光線の交点B(実像位置)がずれることが分かりました。

前述の数式を再三チェックしましたが、誤りは見つかりませんでした。このため、光線の交点Bはどのように分布しているのかの観点から、計算手法の妥当性を見ってみました。

2.4.1 解析条件 (赤色部分を除き、2.3.1の解析条件と同じ)

- (1) レンズ曲率半径 $r_1 = 200 \text{ mm}$
- (2) レンズの大きさ $Lh = 50 \text{ mm}$
- (3) レンズの屈折率 $n_1 = 1.5$
- (4) 空気の屈折率 $n_{\text{air}} = 1.0$
- (5) 対象物の高さ $h = 0 \text{ mm}$
- (6) 対象物とレンズ中心間距離 $a = 10,000 \text{ mm}$

2.4.2 解析条件から得られる定数

- (1) レンズの焦点距離 $f_1 = 200 \text{ mm}$
- (2) レンズの幅 $\text{depL} = 3.14 \text{ mm}$

2.4 計算手法の妥当性の検討（続き）

2.4.3 解析結果

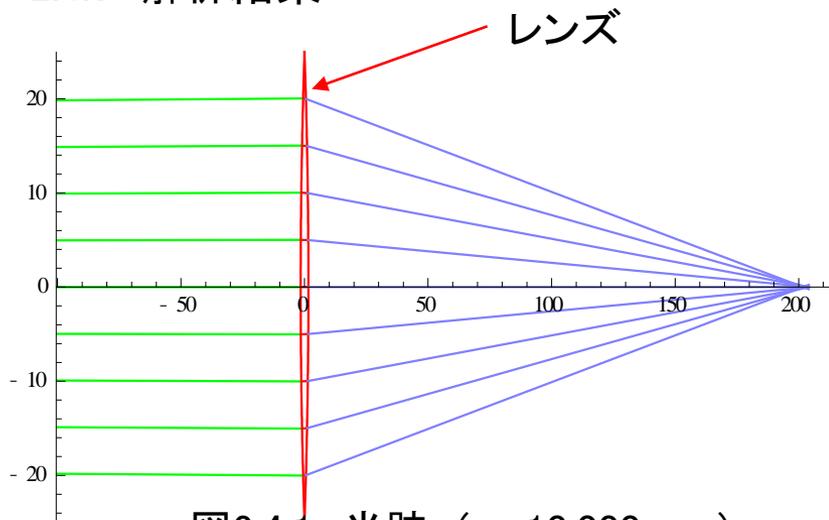


図2.4.1 光跡 ($a = 10,000$ mm)

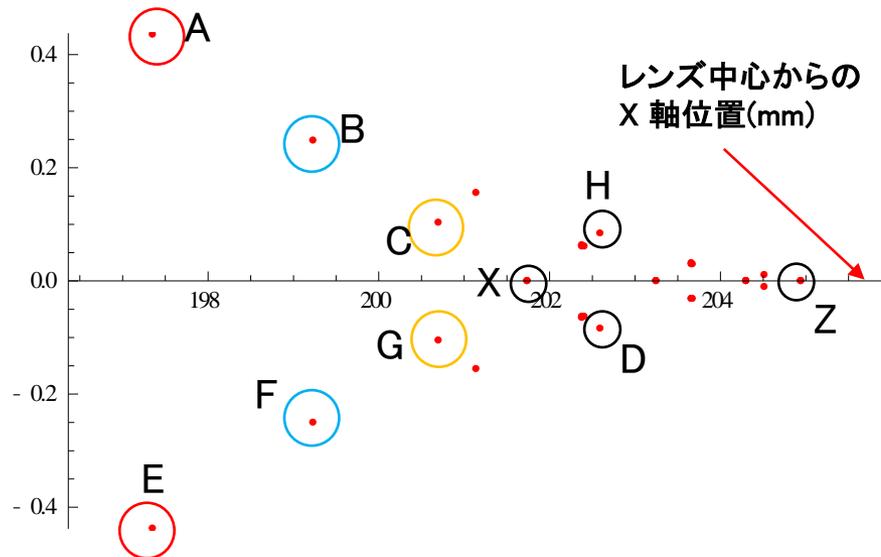


図2.4.2 光線の交点の位置

レンズ中心の光軸(主軸)上に点光源のある場合の光跡を図2.4.1 に示します。

式(14)による結像位置は、 204.08 mmです。

常識的に考えると、どのような直線経路を通っても光線の交点BはX軸上に存在すると思われませんが、実際の計算では、図2.4.2に示すように、X軸を中心として、上下対称に点が存在します。

光の番号をレンズの上部から順に1、2、 \dots 、9とします。

① Aは光(1,2)、Bは光(1,3)、Cは光(1,4)、Xは光(1,5)と光(1,9)、Dは光(1,7)の交点です。即ち、最外部光線1と他の光線の交点です。

② Eは光(9,8)、Fは光(9,7)、Gは光(9,6)、Xは光(9,5)と光(9,1)、Hは光(9,3)の交点です。即ち、最外部光線9と他の光線の交点です。

2.4.3 解析結果（続き）

- ③これ等の交点は、1本の光線に着目すると、光の直進性から当然直線上に有ります。
- ④図2.4.2より分かる様に、最外部光線による結像は、式(14)で得られる結像位置($b = 204.08$ mm)に対してX軸上のずれ及びY軸上のずれが大きくなり、ぼやけの原因となります。
- ⑤点Zは、光(4,5)、光(4,6)、光(5,6)の交点で、X軸の位置は204.936 mmでした。式(14)の結像位置($b = 204.08$ mm)に較べて、0.854mmの差が出ましたが、この差は、式(14)は薄レンズに対する近似式のためであり、本検討のレンズではSeidelの収差(後述2.7節参照)による差と考えられます。
- ⑥上記⑤に示すように、レンズの中央に入射した光を使用すれば画像のボケが少ないことが分かります。
- ⑦図2.4.2の交点36点のX軸方向の平均値は、202.499 mm、Y軸方向の平均値は、 1.46×10^{-15} mmです。

2.4.4 まとめ

計算手法は妥当で、式(14)で得られる結像位置 b と光線の収束点Bに差異が生じるのは、Seidelの収差によるものです。

2.5 レンズより大きい物体の像

レンズの理解を容易にするため、幾何光学を扱っている大学の物理学の本でも、対象物(被写体)の大きさはレンズ口径よりも小さいかあるいは同じ高さに設定されています。実際には対象物はレンズよりもかなり大きいのが一般的です。それではどの様に結像するのか、検討します。

2.5.1 解析条件 (赤色部分が2.3.5と異なる部分です)

レンズに関しては2.3.5項の解析条件と同じにし、対象物の大きさのみを変更しています。

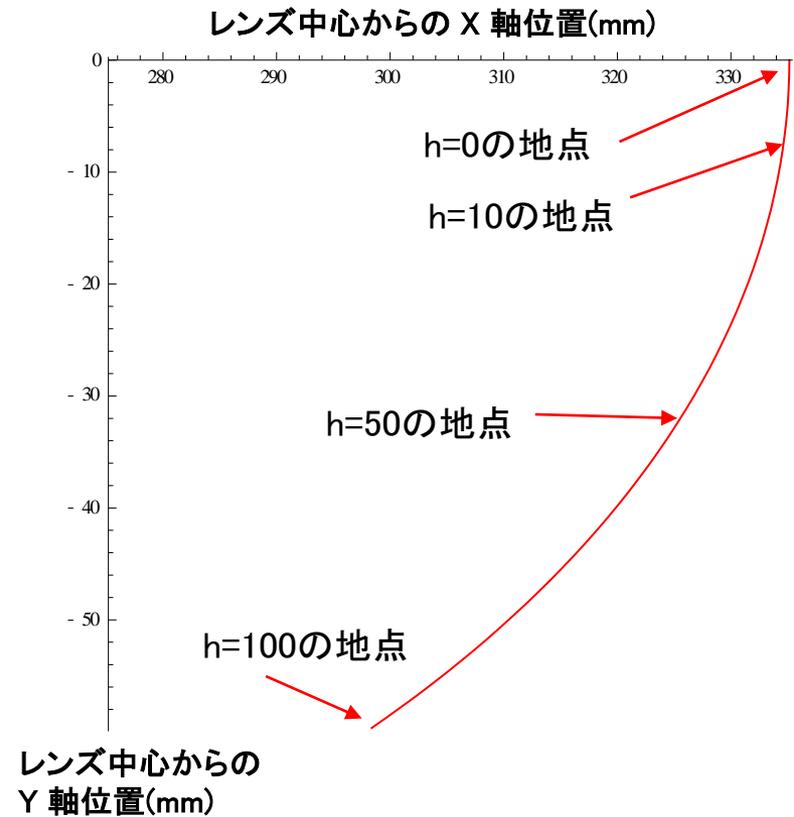
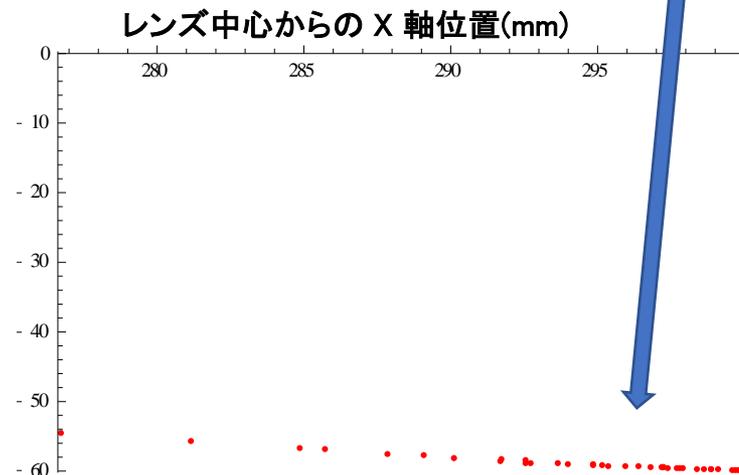
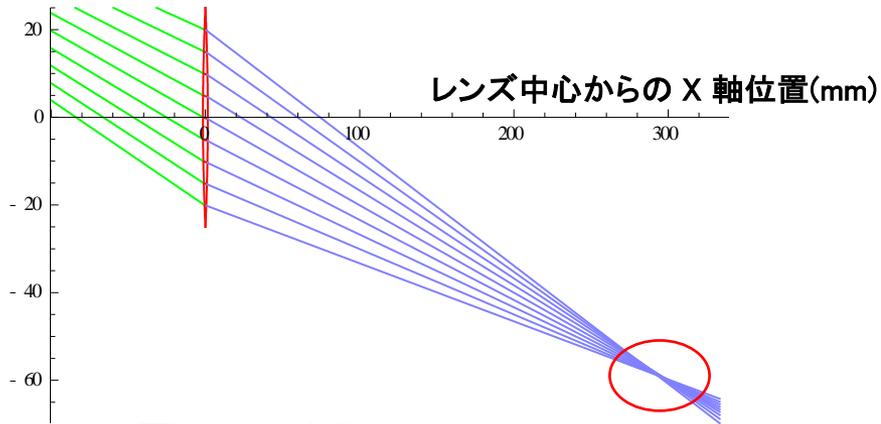
(1) レンズ曲率半径	$r_1 = 200 \text{ mm}$
(2) レンズの大きさ	$Lh = 50 \text{ mm}$
(3) レンズの屈折率	$n_1 = 1.5$
(4) 空気の屈折率	$n_{\text{air}} = 1.0$
(5) 対象物の大きさ	$h = 100 \text{ mm}$
(6) 対象物とレンズ中心間距離	$a = 500 \text{ mm}$

2.5.2 解析結果

- ①光跡を図2.5.1に示します。レンズの左前方500mm、高さ100mmの位置に点光源が有っても図の様に結像します。
- ②図2.5.1の交点(赤円部分)の分布を拡大したものを図2.5.2に示します。交点の X軸位置の平均= 294.14 mm、Y軸位置の平均= -58.80 mmです。式(14)より得られる結像位置は $b=333.33$ mmですので、光線の収束位置Bから得られるX軸位置に関しては、かなりのずれが生じます。これはSeidelの収差によるものです。
- ③対象物がどの様に見えるかを示したのが図2.5.3です。図より分かる様に、像は倒立で、図2.3.6の場合に較べて更にそりが大きくなってきました。参考に $h=10$ mm の位置を図中に示します。

2.5 レンズより大きい物体の像（続き）

2.5.2 解析結果



2.6 絞りの役目

2.4節では、光線の交点の考査を行い、最外部光線による結像は、像を歪めると報告しました。それでは、レンズの前に絞りを置いた場合を考えましょう。

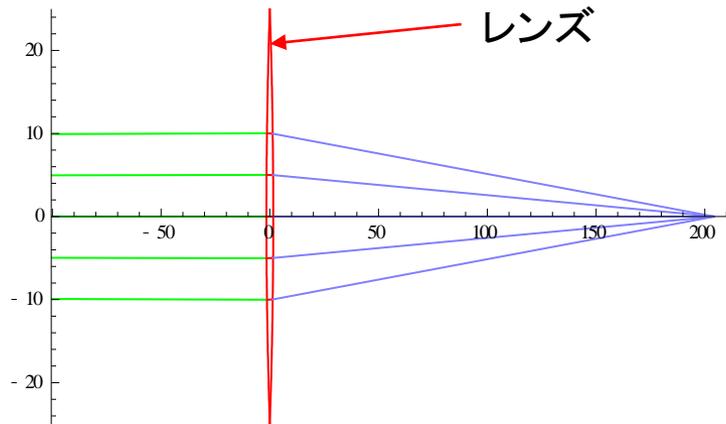


図2.6.1 絞り時の光跡 (a= 10,000 mm)

2.4節と同じ位置条件で、上下2本の光線を除いた(絞り込んだ)結果を、図2.6.1及び図2.6.2に示します。

- ①光線の形状(光跡)は変わりありません。
- ②上下2本の光線を除いた(絞り込んだ)ことにより、交点の数は10個になり、交点の位置も、式(14)で得られる結像位置に近いものとなっています。(赤色サークル)
- ③交点10点のX軸方向の平均値は、204.41 mm、Y軸方向の平均値は、 4.44×10^{-16} mmです。
- ④図2.4.2と比較して、明らかに交点が集中して来ており、像がより鮮明となっていることを示しています。
- ⑤絞りには、レンズ周辺部から入射する光を遮断する(光量を減らす)ことにより、像を鮮明にさせる効果が有ります。但し像は暗くなります。

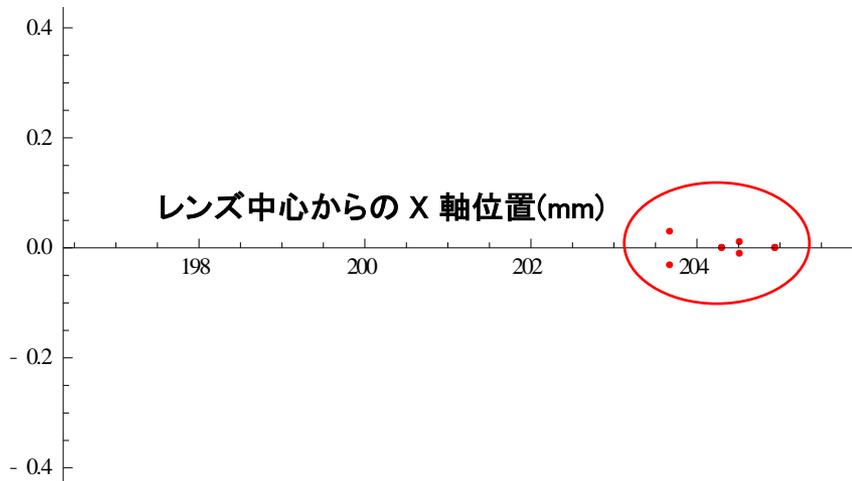


図2.6.2 光線の交点の位置

2.7 Seidelの収差

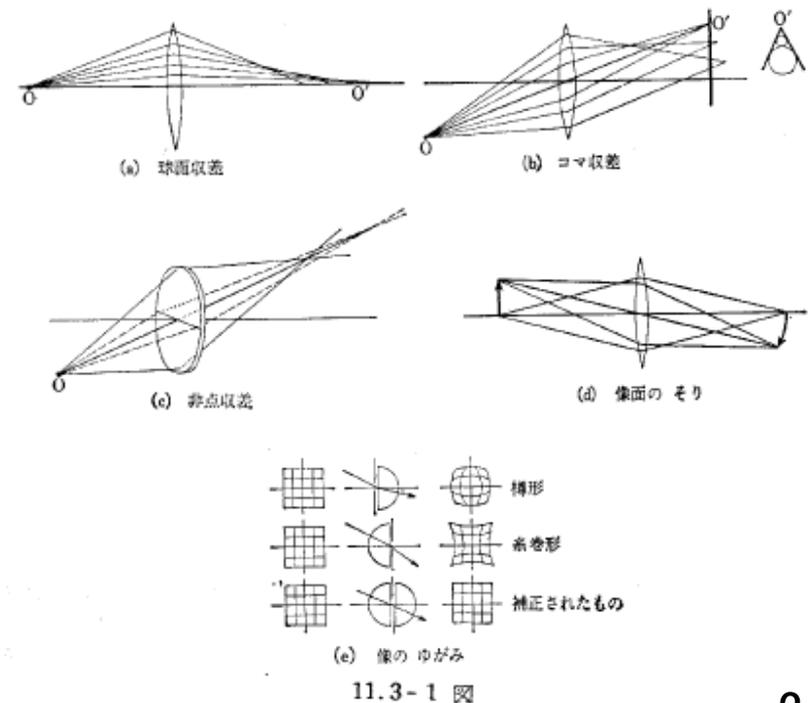
前節までの検討から、以下の知見が得られました。

- ①対象物の高さ h が大きいほど、式(14)で得られる結像位置 b と光線の収束による結像位置 B の差が大きくなります。
- ②絞り機能により光をレンズ中心に集めた場合、式(14)で得られる結像位置 b と光線の収束による結像位置 B の差は比較的小さくなります。

以上の差は、Seidel(ザイデル)の収差として知られているものです。Seidel(ザイデル)の収差とはどのようなものでしょうか。基礎物理学上巻 (金原寿郎編、裳華房、昭和42年2月5日、第10版)によれば以下です。

「光源が主軸上にあって、各球面の主軸にごく近い範囲の部分のみが使われ、したがって h 【この場合の h はレンズ上の光軸に近い場所の意味です】が小さい場合には一般により結像が得られる。しかし h が小さくないと像点 $0'$ の位置は h によって変化するのでよい結像が得られない。このような結像系は **球面収差** をもっているといわれる(11.3-1図(a))。

光源が主軸上にない場合には、たとえ h の【光軸に近い】小さい部分のみが使われでも、よい結像ができにくくなって、**コマ収差**、**非点収差**、**像面のそり**、**ゆがみ**などがしだいにいちじるしくなる。これらを最初の**球面収差**と一しょにしてSeidel (ザイデル)の5収差とよぶことが多い。



2.7 Seidelの収差（続き）

コマ収差というのは(b)図に示したように1点Oの像がO'を頭にしたすい星のように伸びる収差である。次にOとレンズの中心を結ぶ線を軸として考え(c図)、この軸を含む平面内の光線群をまとめて1群と考え、Oから出るすべての光線をこのような光線群の集合を考えることができる。ところがこれらの光線群はそれぞれ結像する位置が異なる。これが**非点収差**のおこる原因である。**像面のそり**は(d)に示したようなもので、**軸に垂直な物体の像が軸に垂直にならない**。このために、たとえば写真機などでは中央にピントを合わせると周囲がぼけることになる。像のゆがみは(e)で示される。要するに、光源の中央部分と周辺部分とでは、結像のとき倍率がちがうために長方形のものでも中央部が特に拡大されてビール樽のような形になったりあるいは中央部がかえって収縮して糸巻きの形になったりする。

以上の5収差の中、非点収差とそりはたがいに密接な関係があるが、他は独立のもので、一つをはぶくようにしたからといって他がついでに矯正されるとは保証されない。

以上を総称して球面収差ということもある。」（以上、基礎物理学上巻より図と文を引用）

上記収差の内、球面収差とそりについて、以下にて検討します。

2.7.1 球面収差について

球面収差とは、再度文を掲載しますと、「光源が主軸上にあつて、各球面の主軸にごく近い範囲の部分のみが使われ、したがって h が小さい【光軸に近い光線を使用した】場合には一般によい結像が得られる。しかし h が小さくないと像点 $0'$ の位置は h によって変化するのでよい結像が得られない。」というものです。

本資料では、2.4節にて主軸上に点光源が有る場合($h = 0\text{mm}$)の解析を行い、交点が必ずしも主軸上(X軸)に結像しないこと、また、式(14)で与えられる結像位置 b に交点が一致せず、分布していることを示しました。これが端的に分かる球面収差です。

2.7.2 像のそりについて

像のそりについては、既に本資料では、2.3節の解析結果及び2.5節にて、「軸に垂直な物体の像が軸に垂直にならない」ことを示しました。特に、図2.5.3の結果に像のそりが顕著に見られます。

像のそりの求め方については、2.6節の絞りの役目で説明しました様に、レンズの中央付近を通る光線による交点のX軸方向位置が、式(14)で得られる結像位置 b に比較的近いものであるため、2.4節で説明した光線番号4と6の2本の光線の交点を像の位置とし、対象物の下位($h=0$)から頂上 h まで縦方向を50分割し、点光源を移動して求めたものです。

3. 眼で物を見るとは

3.1 眼の解析モデル

表3.1 Gullstrand模型眼

	正 式		略 式	
	非調節	極度調節	非調節	極度調節
屈折率				
角 膜	1.376	1.376		
前 房 水	1.336	1.336	1.336	1.336
および硝子体				
水晶体皮質	1.386	1.386		
水晶体核	1.406	1.406		
全水晶体	1.4085	1.426	1.413	1.424
位 置				
角膜前面	0	0		
同 後面	0.5	0.5		
水晶体前面	3.6	3.2	水晶体光学中心	
水晶体核前面	4.146	3.8725		5.85
同 後面	6.565	6.5275		5.2
水晶体後面	7.2	7.2		
網膜中心窩	24.0	24.0	24.0	24.0
曲率半径				
角膜前面	7.7	7.7	7.8	7.8
同 後面	6.8	6.8		
水晶体前面	10	5.33	10	5.33
水晶体核前面	7.911	2.655		
同 後面	-5.76	-2.655		
水晶体後面	-6	-5.33	-6	-5.33
回旋点	13	13	13	13

(註) 長さの単位はmm, 曲面位置は角膜前面から基算

前章の検討結果より、対象物からの光線はレンズを透過化した後、曲面の像(そり)を作ることが分かりました。それでは、人間の眼はどの様に物を見ているのでしょうか。先ず、人間の眼の構造から調べてみましょう。

表3.1は、雑誌「精密機械27-11(昭36-11)」に掲載の眼球に関するデータで、Gullstrand模型眼と呼ばれているものです。これは眼に関する光学的計算をする場合、最も権威あるものとして利用されていたといわれるものです。

これによれば、角膜の前面の位置を0mmとした場合、水晶体前面の位置が3.6mm、水晶体の後面位置が7.2mm、網膜中心窩(ちゅうしんか)が24mmです。

また、水晶体の屈折率が1.38~1.43、水晶体の曲率半径として、前面が10~5.3mm、水晶体後面が -6 ~ -5.3mmで可変で有ることが分かります。

3.2 解析仮定

前節の検討結果より、眼球及び眼としてのレンズの形状を以下の様に仮定・設定します。

- ①眼球は直径24mmの球体と仮定します。(図3.1参照)
- ②水晶体(レンズ)の中心は球体の前面から5.5mmの位置に有るものとし、動かないものとし、従って結像位置 b は、 $b=18.5\text{mm}$ と固定します。
- ③水晶体の前面と後面とでは曲率半径が異なりますが、レンズとしては曲率半径は同じものとします(対称レンズ)。
- ④水晶体の屈折率は可変ですが、レンズの場合一定($n_1=1.4$)とし、曲率半径を変化させることにより、常に網膜に像が映る様に設定します。
- ⑤眼には水晶体の前に、角膜、前房水がありますが、解析ではこれらは存在せず、対象物からの光線は直接水晶体(レンズ)に入るものと仮定します。

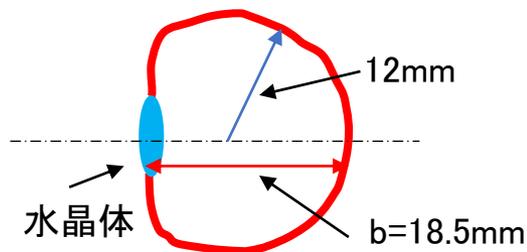


図3.1 解析上の眼のモデル図

3.3 解析条件

前節の仮定より、解析条件を表3.2に設定し、対象物とレンズの中心間の距離 a をパラメータとして、4ケースを検討しました。

表3.2 解析条件

項目	ケース1 ($a=10,000\text{mm}$)	ケース2 ($a=500\text{mm}$)	ケース3 ($a=100\text{mm}$)	ケース4 ($a=50\text{mm}$)
レンズ-網膜間距離 b (mm)	18.5			
レンズ曲率半径 $r1$ (mm) (これ等の数値は、 a 及び b を設定することにより、自動的に決定されるものです)	14.77	14.27	12.49	10.80
レンズ焦点距離 f (mm) (同上)	18.466	17.84	15.61	13.50
レンズの大きさ Lh (mm)	9			
レンズの幅 $depL$ (mm) (式(3)より求められます)	1.404	1.456	1.678	1.964
レンズの屈折率 $n1$ (mm)	1.4			
空気の屈折率 $nair$ (mm)	1.0			
対象物の大きさ h (mm)	30			

3.4 解析結果

3.4.1 光跡図

ケース1～4の $h=30\text{mm}$ の所にある点光源の光跡結果を図3.2～3.5に示します。

- ①ケース1の場合、対象物は10m先に有るため、眼には平行光線として入射しており、式(14)で示される位置に小さく結像していることが図より分かります。この場合、水晶体(レンズ)の厚さは1.404 mmと一番薄い状態です。眼の厚さを調節している毛様体筋が一番リラックスしている状態です。
- ②ケース2の場合、対象物は50cm先に有りますが、対象物の大きさは3cm であるため、3cm の所にある点光源の光線は少し斜めに入ってくるということが図より分かります。光線はまだ1点に収束している様に見えます。
- ③ケース3の場合、対象物は10cm先に有り、まさに目と鼻の先の距離です。このくらいの距離ですと、かなりの角度から光は入射して来ますし、光線は1点で収束することが困難になってきます。即ち、像がボケてきます。最外光がかなりずれていることが分かります。
- ④ケース4の場合、既に焦点を合わせることが困難なくらいの距離です。表3.2に示す様に、水晶体(レンズ)の厚さは1.9mm有り、毛様体筋が緊張して水晶体を厚くさせています。リラックスした場合(ケース1)に較べて、厚さは約1.4倍になっています。この場合は、最外光ばかりではなく、光の収束が困難となってきます。
- ⑤これ等の図で示すレンズ(水晶体)の大きさ(口径)は全て同じ9mmです。

レンズ中心からの
Y 軸位置(mm)

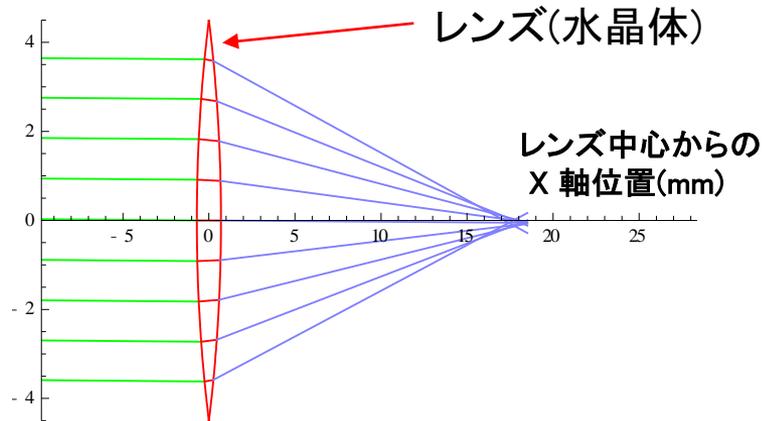


図3.2 ケース1 $h=30\text{mm}$ の光跡($a=10,000\text{mm}$)

レンズ中心からの
Y 軸位置(mm)

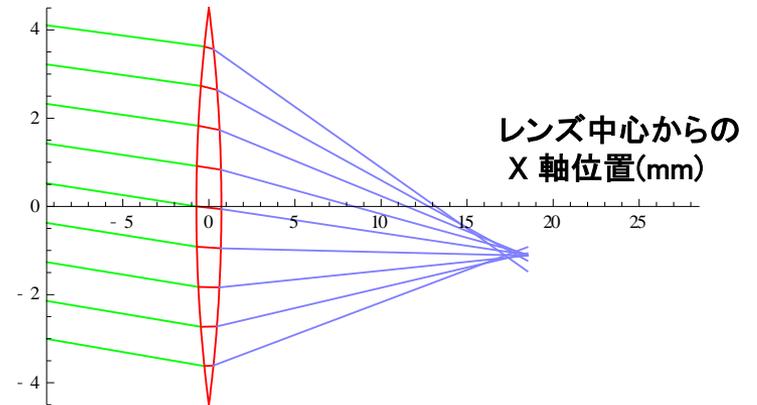


図3.3 ケース2 $h=30\text{mm}$ の光跡($a=500\text{mm}$)

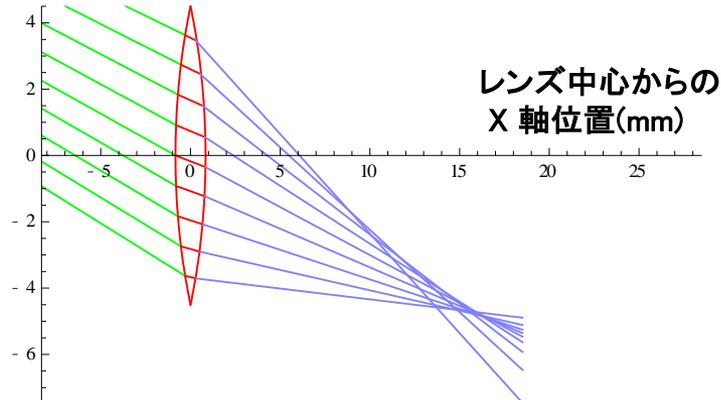


図3.4 ケース3 $h=30\text{mm}$ の光跡($a=100\text{mm}$)

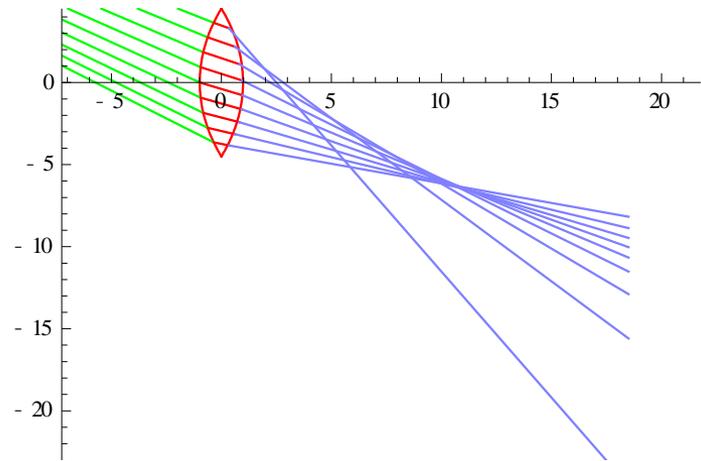


図3.5 ケース4 $h=30\text{mm}$ の光跡($a=50\text{mm}$)

3.4.2 対象物の像

ケース1～4の対象物の像の結果を図3.6～3.9に示します。

- ①ケース1の場合、対象物は10m先に有るため、対象物の大きさは3cmですが、小さく結像しています。解析での像は倒立実像で、大きさは0.056mm、図3.6ではほとんど判別出来ません。この様に網膜には倒立実像で左右逆転して映りますが、脳内では適切に処理して見えるようになっています。
- ②ケース2の場合、対象物は50cm先に有ります。この距離は小生の様な遠視の老人にとって本を読む距離として都合の良い距離です。解析での像は倒立実像で、大きさは1.117mm、図3.7で大きさ及び像のそりが判別出来ます。
- ③ケース3の場合、対象物は10cm先に有り、まさに目と鼻の先の距離です。このくらいの距離ですと、焦点を合わせることが困難になり始めます。解析での像は倒立実像で、大きさは4.749mm、図3.8では像のそりが大きくなっているのが分かります。
- ④ケース4の場合、対象物は5cm先に有り、既に焦点を合わせることが困難なくらいの距離です。解析での像は倒立実像で、大きさは6.001mm、図3.9では像のそりが大きく、脳内での処理が難しくなっているのではないかと思います。
- ⑤これ等の図で示すレンズの大きさ(口径)は全て同じ9mmです。

3.4.2 対象物の像（続き）

- ⑥前述のケースの他に、水晶体(レンズ)より5mmの位置に対象物を置いた場合どうなるかを検討しました。その結果、網膜の位置 $b = 18.5\text{mm}$ の位置に結像させるための曲率半径 r_1 は、 $r_1 = 3.149\text{mm}$ となります。これは直径が6.2mmとなり、レンズの大きさ9mmを満たすことが出来ませんでした。即ち、どんなに毛様体筋が頑張ってもレンズの大きさ9mmを満たすことは出来ません。このため、この様な状態を避けるため、眼の防御として、瞼を閉じるのだと思います。
- ⑦上記の様に、どのような光が入ろうとも、眼は必ず倒立実像を結像させる様なメカニズムになっています。

3.4.2 対象物の像

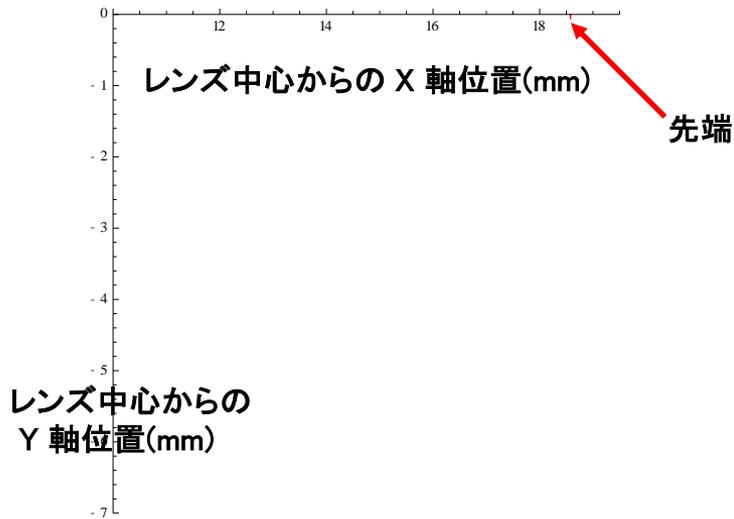


図3.6 ケース1 対象物の像($a=10,000\text{mm}$)

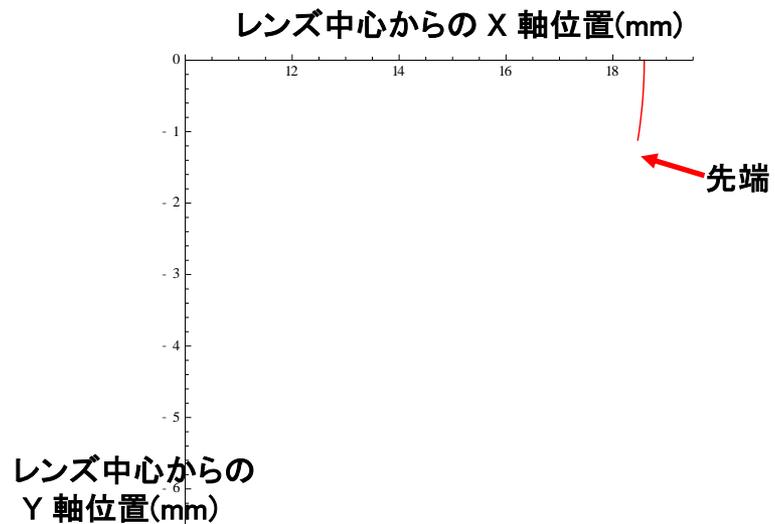


図3.7 ケース2 対象物の像($a=500\text{mm}$)

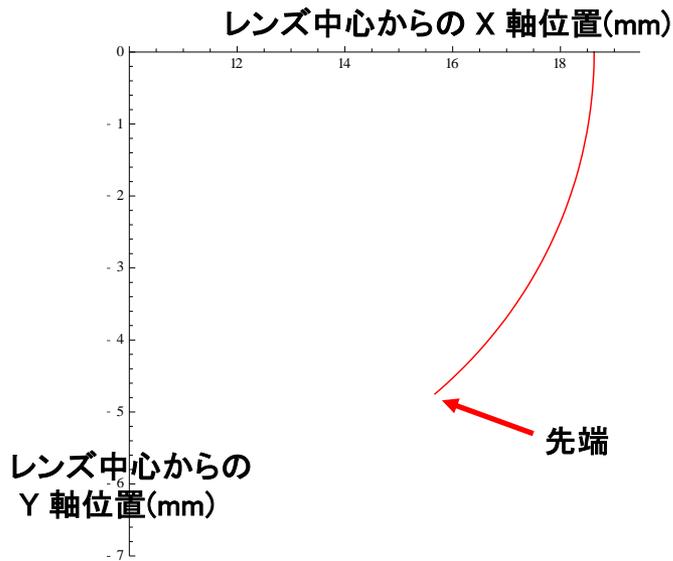


図3.8 ケース3 対象物の像($a=100\text{mm}$)

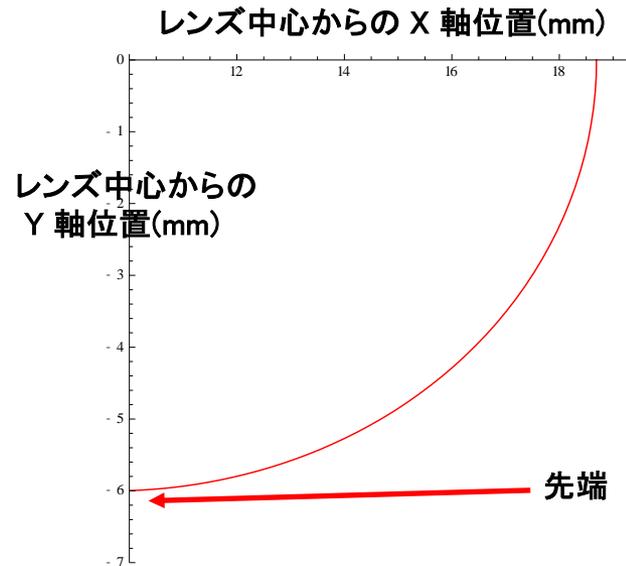


図3.9 ケース4 対象物の像($a=50\text{mm}$)

4. まとめ

今回、レンズの基礎的な理解を深めるために、数値解析を行い、以下の知見を得ました。

- ①光の光跡を追える計算プログラムを作成し、レンズの性能を解析出来る様になりました。
- ②数値解析を通して、点光源からの像が必ずしも1点に収束しないで分散することが分かり、球面収差、像のそりとはどういうものであるかの理解が得られました。
- ③眼は必ず倒立実像を作る様に機能していることが分かりました。