# ネピア数と信頼性

平成 17 年 6 月 24 日
原　宣一

何故、信頼性にネピア数 e が関わってくるのかについて考察する。

## 1．円周率 π について、一般に認識されている概念

円周率は円周の長さを直径で序した値と定義される。円とは 1 点から等距離にある点の軌跡である。この値を π と書く。π は無理数であり、概ね 3.14 の値であるが、正確には小数点以下無限に数値が続く。現在金田教授により 1 兆 2 千億桁以上計算されている。

## 2．何故 π が無理数なのか

これは人間が直交座標や局座標で認識できる現実世界の 3 次元空間がたまたまそのような抽象的な値にしなければならないだけのことである。地球が完全な真の球であったと想定し、その上に描かれた円を直径で割った値は 3.14.・・より小さい。円の大きさによって値が異なる。例えば、この円が赤道であるとこの比（円周率）は丁度 2 になるそして、円を極限まで小さくすると、この円周率は π となる。つまり π は球面上の円周率を極限まで小さくした極限値であるというか、円周率が π になる円は平面上に描かれた円であるといえるので、平面の定義に使っても良いのである。ここで主張していることは π の値は人間の 3 次元空間理解に都合の良いように考えられた一つの抽象値なのである。

## 3．π とネピア数 e は簡単な式で結ばれている

$$e^{i\pi}+1=0 \qquad (1)$$

証明はオイラーの公式（2）で x ＝π と置いただけである。

$$\exp(ix)=\cos x+i\sin x \qquad (2)$$

ネピア数 e も無理数であるのは（1）式で π が無理数なので e が無理数でないとすると人間にとって理解できなくなるからである。e の値は 2.7 1 8 2 8.・・・であるが、収束の早い級数が知られているので π の計算より簡単である。

（1）の関係式があるので、ネピア数のような抽象値も考えないと人間の空間理解に齟齬をきたすということである。

## 4．誤差は正規分布にならざるを得ないこと

弓道では矢を直径３６ｃｍの的の中心に向けて２７m離れたところから射るが、必ずしも中心に当たらない。数多く矢を射て、統計を取ると飛んだ矢のばらつき具合が、釣鐘状になることがしばしば観察される。このことからも、矢のばらつき具合は正規分布（またはガウス分布、中央分布と呼ばれることもある）を仮定して良いとする。

多くの人が、上述の弓矢のモデルのような例から、誤差については正規分布を仮定するのだと理解しているようだ。または分布は仮定して、中心からの隔たり確率を計算するものと理解しているかもしれない。しかし、これは間違いである。

弓矢のモデルに戻って再度考える。人によっては前の方に外すことが多かったりする。日本の弓道では必ず弓を左手に持ち、首を左に向けて矢を射る。従って、的に向かって右の方を前という。前に外す癖とかの傾向があるとき、その人の平均中心が的の中心とずれているとき、これをバイアスと呼ぶこともある。弓矢の場合は矢を１本ずつ射るので反省して修正ができる。前に外したら、今度は気持ちの上で後ろ目に射ることである。このような調整をするのでマクロでみればやはり分布の中心は的の中心に合うであろう。

的の中心に向かって矢を射る射手の技量がどうあれ、ある程度、散らばることは避けられない。このとき、矢が的に当たる確率分布はどのようなものになるのであろうか。射手が制御できる範囲外でばらつくにしても、合理的な理由もなく偏るわけではないと考えると、何らかの条件が付いてくる。

まず、的に中心を原点に取った直行座標で考えてみる。すると直角方向の誤差は相互に独立であるべきだから、確率密度を $\rho$ (x, y)とすると、

$$\rho(x,y)dxdy = f(x)dx \cdot f(y)dy \qquad (3)$$

と書ける筈である。

この的と矢の当たる点の関係は極座標でも表わせるので

$$\rho(x,y)dxdy = g(r,\theta)rdrd\theta \qquad (4)$$

とも書ける筈である。的は丸くて $\theta$ に依存しない筈であるから、$g(r,\theta) = g(r)$ である。従って、

$$f(x)f(y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) \qquad (5)$$

この式はハーシェル(1850)の不変量条件式と呼ばれているものである。

さて、y=0 とおくと、この式は g(x)=f(x)f(0)に縮小する。そこで上式は次の関数方程式に成る。

$$\log\frac{f(x)}{f(0)}+\log\frac{f(y)}{f(0)}=\log\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{f(0)} \qquad (6)$$

しかし、この一般解は明らかである。つまり x の関数足す y の関数はただ $x^2+y^2$ の関数である。唯一つの可能性は $\log[f(x)/f(0)]=\alpha x^2$ ということである。もし a が負であるときにのみ我々は正規化出来る確率を持つ。そして、正規化条件（全区間積分した和が１ということ）は f(0)を決める。そこで一般解は次の形式のみあり得る。

$$f(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\varepsilon^{-\alpha x^2}\text{、}\quad \alpha>0 \qquad (7)$$

この式には一つの未決定のパラメータがある。ハーシェルの不変量条件式を満たすのは２次元確率密度のもので、円の対称ガウス分布である。

$$\rho(x,y)=\frac{\alpha}{\pi}\exp\left[-\alpha(x^2+y^2)\right] \qquad (8)$$

ジェームス・クラーク・マックスエル(1860)は、３次元版の気体の分子速度に対し、これと同じ論証によって、確率分布 $\rho(v_x,v_y,v_z)\propto\exp\left[-\alpha(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right]$ を得た。そしてこれは動力学理論と統計力学の基礎的な「マックスエルの速度分布則」として物理学者に良く知られるようになった。

誰も分子１個々々の速度を測ったことはないだろう。しかし、マクロ的に観察すると分子の運動はこの分布に従っていると考えられる証拠があるということなのである。

ハーシェルーマックスエル論証は、一般には両立しない二つの定性的条件がちょうど一つの定量的分布に対してのみ適合するものとなり、従ってそれらが唯一的に定まるものである。アインシュタイン(1905)は相対理論での彼の二つの定性的仮定からローレンツ変換則を演繹するために同じ種類の論証を用いた。

ハーシェルーマックスエルの誘導は、それが他の問題でも同じように上手く使えそうな幾何学的不変特性のみを考えることで成立している。実際には確率理論を少しも使用していないことに注目すべきである。

何故、弓矢で矢の的と当たるばらつきは正規分布になるのかを調べるために、いくら統計を取ってデータを集積しても、正規分布に近い結果が得られたと言うことは言えても常にそうであるとは言えない。次の実験では異なった分布になるかもしれないということを打ち消せないからである。

そうではなくて、矢の的に当たるばらつきは特に理由が見つからなければ、人間が理解できる座標系に従って考えると、正規分布にならなければならないのである。そして実験してみると、そのようにばらつくことが観察されることが多いということなのである。もし観察した結果が正規分布でなかったならば、それは他の理由が含まれていたに違いないのである。

以上のことから、ばらつきに関して正規分布という必然性からネピア数がばらつきに関しても深い関係のあることが運命なのである。

## ５．ばらつきと信頼性の関係

弓矢の例で的に当たる信頼性は定量的に言えば的に当たる確率で、それが的に当たる信頼度である。その逆の失敗確率は２次元正規分布の裾野の的から外れた体積がどの程度小さいかということである。これにより、信頼性とネピア数は関係が深いことがわかる。このように考えないと、人間の空間理解に齟齬を来たすのである。

## ６．（付録）フィボナッチ数列とネピア数の関係

以下はあるホーム頁で見つけたフィボナッチ数列の説明である。
http://www.forexwatcher.com/pattern/fibo.htm

**「初項 1，第2項 1として，隣り合う項の和が次の項の値となるような数列をフィボナッチ数列という。**

- **1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,……………**
- **A(n+2) = A(n) + A(n+1)**

**この数列に現れる任意の二つの数字の比がフィボナッチ比率(fibonacci ratio)である。各項の数値はフィボナッチ数と呼ばれることがある。**

**例えば，**

- **21/89=0.236**
- **55/144=0.382**
- **144/233=0.618**
- **55/34=1.618**

- 233/89=2.618
- 610/144=4.236

数列の初期段階においては顕著ではないが，一般に隣り合う項の比は常に 0.618（または その逆数の 1.618）となる。これが黄金分割比と 呼ばれる不思議な性質を持った数字で，古来より建築やデザインなどの分野で応用された例があり、宇宙で見られる現象（星雲の渦巻きなど）に黄金分割比を 使って説明できる法則が知られている。さらに、木の枝別れがフィボナッチ数列に従うという事例も発見されている。ここから、無秩序とも思える自然現象も実 は、その現象がそうあるべき姿、言い換えればバランスの取れた美しい姿に必然的になったという考え方が生まれておかしくない。これが発展して、自然現象は フィボナッチで説明できる。ならば、一見、気ままで不規則と見られる相場の値動きにもフィボナッチの法則が適用できるのではないか？　このような観点から 構築された理論がエリオット波動理論である。」

http://www.rd.mmtr.or.jp/~bunryu/fibonatti.shtml
を見ると、「(8)黄金分割からフィボナッチ数が出てくる。また、黄金分割と黄金角は同じものである。そして、フィボナッチ数の一般項から，黄金分割や等角らせんとの関係が明らかになる。」などと説明があるのでここでは省略する。

つまりネピア数は色々なところで出てくるが、3 次元の実世界を数学的に抽象した論理の世界で、ネピア数等を考えることにより矛盾のない論理的体系が整えられるということである。結局、宇宙原理に対して人間原理が考えられたが、「弱い人間原理」に通じる考え方であると思われる。

(以上)