E.T.ジェインズの「確率理論：科学の論理」の紹介（8）

原　宣一

拡張論理として展開された確率理論はラプラスの定義による確率に一致するものであった。換言すると、ラプラスの定義による確率のみが合理的で、常識との定性的一致を満たし、首尾一貫した推論の道具であることが裏付けられた。しかし、歴史的にラプラスの確率は、かなりの長い期間で古典確率として追いやられていた。その理由は、ラプラスの定義にある「等しくありそうな」という表現に基づき多くのパラドックスが導かれるとされたからである。これらのパラドックスは大半が安易に無限を持ちこんだことにあって、現在では全て解決されている。しかし、中には解決まで時間を要したものもあった。そのうちでバートランドの逆説は最たるものであった。今回は「確率理論：科学の論理」題 12 章から、この問題の解決を紹介する。

バートランドの問題

バートランドの問題は、次のように定式化される。

一本の長い藁が一つの円の上にランダムに投げられる。それは円と交差するように落ちるということが与えられて、このように定義された弦が内接する正三角形の一片より長い確率は何であるか。バートランドが 1889 年にそれを提案してからこの問題はラプラスの「無差別の原理」が論理的不首尾一貫性を含むということを実証するために学生の世代に引き合いに出されてきた。というのは「等しく起こりそうな」状況を定義する多くの方法があるように見え、そしてそれらは異なった結果に導くからである。これらのうちの三つは、一様確率密度を(A) 弦と円の中心間の直線距離に、(B) 周上で弦の交差角に、(C) 円の内部面積にわたり弦の中心に、割り当てることである。

これらの割り当ての結果はそれぞれ、$p_A = 1/2$、$p_B = 1/3$ 、そして $p_C = 1/4$ に導く。

確率理論に関する作業において、この出来事の状態は無差別の原理が全面的に排斥されなければならないということを普遍的に示していると解釈されてきた。さらに通常は確率を割り当てるためのたった一つの有効な基礎はあるランダム実験における頻度であるという結論がある。それなら、バートランドの問題に答える唯一つの方法は実験を行うことであるとなる。

もし円が十分大きくなり、そして投げ手が十分上手ければいろいろな結果が意のままに得られたであろう事は明白である。しかし、投げ手の腕が円に比べて「不確かさの範囲」の大きさによって記述されなければならない制限において、弦長に対する分布は確実に「純然たる思考」によって得られるユニークな関数にならねばならない。

最初の原理からこの関数の計算の仕方を我々に告げることが出来ないか、或いはこれをすることの可能性を否定さえする、確率理論に向かっての視点は確率理論の有用な応用の範囲を深刻に、そして物理学者にとって耐え難い、制限をするであろう。

一つの不変性の議論がポアンカレ (1912) ともっと最近でケンダールとモラン(1963) によってこの型の問題に応用された。この取り扱いにおいて、我々はｘｙ平面上に「ランダムに」引かれた直線を考える。各々の直線は二つのパラメータを直線の方程式は $ux+vy=1$ のように規定することによって置かれる。そして人は問うことが出来る。どの確率密度 $p(u,v)dudv$ が平面のユークリッド変換（回転と平行移動）群の下の形状においてそれが不変である特性を持つか。これは直ちに解ける問題で、その答えは $p(u,v)=(u^2+v^2)^{-3/2}$ である。

バートランドの問題は、明確な回転対称の要素を持ち、全ての提案された解で認識されている。しかし、この対称は弦長に対する分布に無関係である。高度に関係有る二つの他の「対称」がある。つまり、バートランドの元の叙述でもなく我々の正確な大きさや正確な位置を規定した藁の用語における再叙述でもない。それ故、もしその問題がかりそめにも何らかの明確な解を持つべきならば、それはこれらの状況下に「公平」でなければならない。即ち、その円の大きさや位置における小さな変化によって変えられないのでなければならない。このうわべは些細に見える叙述が、我々が見るように、完全に解を決定する。

全てのこれらの不変要求を同時に四つのパラメータ変換群を定義することによって考えることは可能であろう。そしてそのとき完全な解があたかも魔法によってのように突然に現れるであろう。しかし、これらの不変性の影響を別個に解析することが、そして如何に各々が解の形式の上にそれ自身の制限を置くかを見ることが、より教示的であろう。

回転不変

その円が半径 R を持つとしよう。弦の位置はその中心の極座標(r, θ)を与えることによって決められる。我々はバートランドのよりもっと詳細な質問に答えることを求める。つまり、どんな確率密度 $f(r,\theta)dA=f(r,\theta)rdrd\theta$ を我々は円の内部面積にわたって割り当てるべきであろうか。θに関する依存性はコード長さに対する分布はただ半径方向にのみ依存するから、実際にバートランドの問題に無関係である。

$$g(r)=\int_0^{2\pi}d\theta f(r,\theta) \qquad (12.54)$$

しかし、直感は f(r, θ)がθに独立であるべきということを暗示して形式的変換群議論は回転対称を以下のように扱う。

出発点は問題の叙述が観測者は北に面しているか東に面しているか規定していないという観察である。それ故、もし明確な解があるならば、それは観測者の視線方向に依存してはならない。それ故、二人の異なった観測者X氏とY氏、がこの実験を見ていると想定しよう。彼らはその実験を異なった方向、彼らの視線が角度αをなす、から見ている。各々が彼の視線に沿って合わされた座標系を使う。X氏は彼の座標系Sに確率密度f(r, θ)を割り当てる。そしてY氏は彼の系S_αにg(r, θ)を割り当てる。明らかに、もし彼らが同じ状況を記述しているのなら、そのとき次式が真でなければならない。

$$f(r,\theta) = g(r,\theta-\alpha) \tag{12.55}$$

これは固定した分布fを新しい座標系に変換する、単純な変数変換を表すものである。つまり、この関係はその問題が回転対称を持つかどうかに関わらず成立するであろう。

しかし、今我々は、回転対称の故に、その問題はX氏に彼の座標系において、それがY氏に彼の座標系においてそうであるように、正確に同じに現れる。彼らは同じ知識の状態にあるから我々の首尾一貫性のデシダレータムは彼らが同じ確率分布を割り当てることを要求する。だからfとgは同じ関数でなければならない。

$$f(r,\theta) = g(r,\theta) \tag{12.56}$$

これらの関係は$0 \le \alpha \le 2\pi$ にあるすべてのαに対して成立する。そして唯一つの可能性は$f(r,\theta) = f(r)$ である。

この形式的議論は我々の明らかな直感の閃きに比べるときに、そしてそのような些細な問題に適用されたときに、面倒なもののように見える。しかし、ウイグナー(1931)とワイル(1946)が他の物理問題において示したように、我々の直感が我々を失敗させる些細でない場合にすぐに一般化するのはこの面倒な議論である。それは常に二つのステップから成る。つまり我々は最初に如何に二つの問題が対称に無関係に、お互いに関係しているかを示す(12.55)のような変換群を見つける。それから、我々は二つの等価な問題を定式化したということを述べている(12.56)のような一つの対称関係。それらを結びつけることは大抵の場合その分布の形にある制限を課す関数方程式に導く。

尺度不変

その問題は回転対称によって関数$f(r)$を決めることに帰せられ、次式で正規化される。

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R rdrf(r) = 1 \tag{12.57}$$

再び、我々は二つの異なった問題を考える。半径Rの円に共心で半径aR、$0 < a \le 1$の円がある。より小さい円の中でその質問に答える確率$h(r)rdrd\theta$がある。蕪が小さい円と交錯するということが与えられてその弦の中心が面積$dA = rdrd\theta$にある確率は何で

あろうか。

小さな円と交錯するどんな藁もまた大きな円の弦を定義するであろう。だから小さな円の中で $f(r)$ は $h(r)$ に比例しなければならない。この比例性はもちろん、条件付確率に対する標準公式で与えられ、この場合次の形を取る。

$$f(r) = 2\pi h(r)\int_0^{aR} rdrf(r) \quad 0 < a \le 1, \quad 0 \le r \le aR \tag{12.58}$$

この変換方程式はその問題が尺度不変を持つかどうかに拘わらず成立する。

しかし、我々は今、尺度不変を取り上げる。異なった大きさの眼球を持った二人の異なった観測者に大小の円の問題は正確に同じに現れるであろう。もし、円の大きさに独立にユニークな解があるならば、$f(r)$ と $h(r)$ の間に、一つの問題が単に他方の尺度を小さくしただけのものという事実を表している、もう一つの関係がなければならない。面積 $rdrd\theta$ と $(ar)d(ar)d\theta$ は、同じ方法で、それぞれ大小の円に関係している。だから、それらはそれぞれ分布 f(r)と h(r)によって同じ確率が割り当てられなければならない。

$$h(ar)(ar)d(ar)d\theta = f(r)rdrd\theta \tag{12.59}$$

または、

$$a^2 h(ar) = f(r) \tag{12.60}$$

これは対称方程式である。(12.58)と(12.60)を結合して、尺度変化の下での不変は確率密度が次の関数方程式を満たすことを要求するという事が判る。

$$a^2 f(ar) = 2\pi f(r)\int_0^{aR} uduf(u) \quad 0 < a \le 1, \quad 0 \le r \le R \tag{12.61}$$

a に関して微分して、a=1 とおいて結果としての微分方程式を解いて、正規化条件(12.57)を満たす、最も一般的な(12.61)を満たす解は次式であることを見つける。

$$f(r) = \frac{qr^{q-2}}{2\pi R^q} \tag{12.62}$$

ここで、q は範囲 0<q<∞において、尺度不変ではこれ以上決められない、定数である。

序文において提案された解 B が除かれてしまった。というのはそれが選択 $f(r) \approx 1/\sqrt{(R^2 - r^2)}$ に対応し、形式(12.62)のものでないからである。このことは円周上で弦の交錯が角度において一様にそして一つの円に独立に分布されていたのなら、その中に記入された小さな円に対して真でないからである。即ち、B の確率割り当てはせいぜい一つの大きさの円に対して真であり得るだけであろう。しかし、解 A と C は、それぞれ選択 q = 1 と q = 2 に対応して、尺度不変でまだ両立する。

平行移動不変

我々は今、与えられた藁Sが同じ半径Rだが相対距離bでの二つの円C、C'と交錯できるという事実の結果を調べる。円Cに関して弦の中央点は座標(r, θ)の点Pである。一方同じ藁が円C'に関して弦の中央点を座標が(r', θ')の点P'で定義する。座標変換(r, θ)→(r', θ')は次式で与えられる。

$$r' \to |r - b\cos\theta| \tag{12.63}$$

$$\theta' = \begin{cases} \theta & r > b\cos\theta \\ \theta + \pi & r < b\cos\theta \end{cases} \tag{12.64}$$

Pは領域Γに渡って変わるので、P'はΓ'にわたり、そして逆もまた同様に。このようにその藁はΓ'の上のΓに１：１写像を定義する。

さて、我々は平行移動対称に注目する。問題の叙述は円の位置について何も情報を与えなかったたから、CとC'の問題は二人の僅かにはなれた観測者OとO'に正確に同じに現れる。我々の首尾一貫性はそのとき、彼らはCとC'に同じ確率密度、これらは同じqの値での同じ形式(12.62)を持つが、を割り当てるということを要求する。
さらに、(a) それらは同じ事象の確率であり、(b) 一つの円と交錯する藁が他方とも交錯するだろう確率は、このようにこの対応をつくりあげて、やはり二つの問題で同じであるから、これら二人の観測者は、領域ΓとΓ'にもそれぞれ同じ確率を割り当てることが必要である。これら二つの要求が適合可能か見てみよう。

Cと交錯する弦がΓにおいてその中央点を持つ確率は、

$$\int_{\Gamma} r dr d\theta f(r) = \frac{q}{2\pi R^q} \int_{\Gamma} dr d\theta r^{q-1} \tag{12.65}$$

C'と交錯する弦がΓ'にその中央点を持つ確率は、

$$\frac{q}{2\pi R^q} \int_{\Gamma'} dr' d\theta' (r')^{q-1} = \frac{q}{2\pi R^q} \int_{\Gamma} dr d\theta \, |r - b\cos\theta|^{q-1} \tag{12.66}$$

ここで、我々は(12.63)と(12.64)の使用によって、ヤコビアンは１であることを注目して、変数(r, θ)に積分戻しで変換した。明らかに、(12.65)と(12.66)は任意のΓに対してもしq＝１ならばその時に限り、等しいであろう。だから我々の分布 f(r)は今ユニークに決められる。

提案された解Cはこのように平行移動不変を欠いているため除かれる。つまり、一つの円に関して仮定された特性を持った藁の雨は僅かに動かされた円に関して同じ特性を持ち得なかったであろう。

我々は不変要求が確率密度を決めるということを見つけた。

$$f(r,\theta)=\frac{1}{2\pi Rr},\quad 0\le r\le R,\quad 0\le\theta 2\pi \tag{12.67}$$

解 A に対応している。これが中心で特異性を持つことは興味深いことで、この必要性は次のように理解できる。中央点(r, θ)が小さな領域Δの中に落ちるという条件は弦の可能な方向に制限を課す。しかしΔが内部に向かうに連れてそれが円の中心を含むや否や、全ての角度が急速に許される。このように「可能性の多様体」における無限に急速な変化がある。

殆ど明らかな、さらなる解析は平行移動不変の要求は非常に厳格なのでそれは既に結果(12.67)をユニークに決めているということを示す。つまり、提案された解 B は尺度か平行移動不変の両方に不適合である。そして(12.67)を見つけるために尺度不変を考える必要は本当になかったのである。しかし、解(12.67)はとにかく、尺度不変に対して試験されなければならなかったであろう。そして、もしそれがその試験を通ることに失敗していたならば提議された問題は解を持たないと結論したであろう。即ち、初見では未決定のように見えるが、変換群の視点から、それは過剰決定としてみなされなければならなかったのである。幸運がそれをもっていたかのように、これらの要求は適合可能である。であるからその問題は一つのユニークな解を持つ。

弦長の分布は(12.67)からすぐに出てくる。中央点が(r, θ)にある弦は長さ $L=2\sqrt{(R^2-r^2)}$ を持つ。通分された弦長 $x\equiv L/2R$ の項で、我々は次の普遍分布則を得る。

$$p(x)dx=\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}},\quad 0\le x\le 1 \tag{12.68}$$

これはボレルの推測(1909)に一致している。

（８完）