E.T.ジェインズの「確率理論：科学の論理」の紹介（3）

原　宣一

前回はジェインズの「確率理論：科学の論理」の第１章から、帰納的な推論を行うために不可欠な最小限の条件、つまり、ジェインズがデシダレータと呼ぶ次の三つの条件を説明した。

Ⅰ．　実数による妥当さの程度表現

Ⅱ．　常識と定性的一致

Ⅲ．　首尾一貫性

第２章ではデシダレータの下にブール代数による数学の論理展開によって、不確かな状況下で演繹的な推論を行うことは結局のところラプラスの確率定義に従うことになることを示している。今回は、第２章から積の規則が誘導される道筋の部分を説明する。

積の規則

これから論理積 AB の妥当さが、A とＢの妥当さに個別に関係している首尾一貫した規則を求める。特に、C が真であるときの AB の妥当さ、AB|C を見つける。

その AB が真であるということを決める手順は A とＢについての基本的な決定に個別に分割できる。ロボットは、

(1) Ｂが真であると決める　(B|C)

(2) Ｂは真であることを受け入れ、A が真であると決める　(A|BC)

或いは、

(1') A が真であると決める　(A|C)

(2') A は真であることを受け入れ、B が真であると決める　(B|AC)

AB が真の命題であるためにＢが真であるということが必要である。このように妥当さ B|C が巻き込まれるべきである。加えて、もしＢが真であるならば、A が真であるべきことがさらに必要である。そうして、妥当さ A|BC もまた必要である。しかし、もしＢが偽であるならば、そのとき、もちろん AB は、A|$\overline{B}$C によって表されるように、人がＡについて知っているかどうかに独立に偽である。もし、最初にＢについて推論するならば、Ａの妥当さは、もしＢが真であってその時にのみ関係する。もし、ロボットが B|C と A|BC を持つならば、それは A|C を必要としない。同様に、A|B とＢ|Ａは必要ない。

もちろん、論理積は可換であるから、AB=BA で、我々は上述の説明で A と B を取り替えても同じことが言える。即ち、A|C と B|AC はAB|C＝BA|C を決めるのに等しく役だつ。どちらの手続きからでもAB|C のためにロボットは同じ値を得なければならないということが、首尾一貫性条件の一つで、デシダレ

ータム（IIIa）である。

（AB|C）はB|CとA|BCのある関数となるであろう。

$$(AB|C)=F[(B|C),(A|BC)] \tag{2.1}$$

許される形式として、

$$(AB|C)=F[(A|C),(B|C)] \tag{2.2}$$

が考えられるが、この形式がデシダレータムIIの我々の定性的条件と何も関係がない。命題AはCが与えられて非常に妥当であったかも知れないし、BはCが与えられて非常に妥当であったかも知れない。しかし、ABはそれでもまだ極めて妥当なことも全く妥当でないこともあり得るのである。

例えば、あなたが会う次の人は青い目を持っていることも全く妥当なことだし、かつこの人の髪が黒いということも全く妥当である。そして両者が真であることは合理的に妥当である。他方、左の目が青いということは全く妥当なことで、右の目が茶色であるとうことも全く妥当なのであるが、両者が真であるということは極端に妥当でないのである。このような影響を考慮に入れる術が無いだろう。

しかし、他の可能性がある。すべての可能性を試みる方法が次のように構成できる。これは一種の「総当たり証明」で、実数を導入し、

$$u=(AB|C)、\quad v=(A|C)、\quad w=(B|AC)、\quad x=(B|C)、\quad y=(A|BC) \tag{2.3}$$

もし、uをv、w、x、yの二つ以上の関数として表すことが出来るならば、11の可能性がある。それらの各々を書き出し、茶色と青の目のように、各々を様々な極端な条件にさらす解析を実行して、トリバス（1969）は二つの可能性を除いて全てがある極端なケースで常識の定性的違反を示すことが出来ることを示している。残った二つはu=F(x,y)とu=F(w,v)である。

今や、第1章で議論された定性的要求を適用する。Aは変化しないがBがより妥当になるというような事前情報に何らかの変化が与えられC→C'、

$$B|C' > B|C、 \tag{2.4}$$

$$A|BC' = A|BC、 \tag{2.5}$$

常識はABの妥当さが減るのでなく、より妥当になることのみを要求する。

$$AB|C' \geqq AB|C \tag{2.6}$$

等号は、A|BCが不可能に対応する時にのみに限られる。このように、事前情報C"が次のように与えられると、

$$B|C'' = B|C \tag{2.7}$$

$$A|BC'' > A|BC \tag{2.8}$$

我々は、

$$AB|C'' \geqq ABC \tag{2.9}$$

を要求する。ここで、等号はCが与えられて、Bが不可能なときにのみ成立す

る。さらに、関数 F(x,y)ははｘとｙ二つの連続単調増加関数でなければならない。

次に、首尾一貫性であるデシダレータムⅢ(a)を課す。我々が三つの命題が同時に真である、妥当さ（ABC|D）を見つけることを試みる。ブール代数の結合則から、ＡＢＣ＝(AB)C＝A(BC)で、これを二つの異なった方法で行える。もし、規則が首尾一貫したものであるべきならば、演算を実行する順序に関わりなく同じ結果を得なければならない。最初に BC は一つの命題とみなし、(2.1)を適用する。

$$(ABC|D) = F[(BC|D),(A|BCD)] \tag{2.11}$$

そして、妥当さ（BC|D）において、我々は再び(2.1)を適用すると、

$$(ABC|D) = F\{F[(C|D),(B|CD)], (A|BCD)\} \tag{2.12a}$$

$$(ABC|D) = F[(C|D),(AB|CD)] = F\{(C|D),F[(B|CD),(A|BCD)]\} \tag{2.12b}$$

もし、この規則が推論の首尾一貫した方法を表すならば、二つの表現(2.12a)、(2.12b)は常に同じでなければならない。それ故、この場合に我々のロボットが首尾一貫して推論する必要条件は関数方程式の形を取る。

$$F[F(x,y),z]=F[x,F(y,z)] \tag{2.13}$$

(2.13)式が些細な解、F(x,y)=一定、を持つことは明らかである。しかし、それは我々の単調性要求(2.10)に違反する。

$$u \equiv F(x,y)、\qquad v \equiv F(y,z) \tag{2.14}$$

まだ(x,y,z)を独立変数としてみなして、解くべき関数方程式は、

$$F(x,v)=F(u,z) \tag{2.15}$$

ｘとｙに関して微分して、(2.10)の記号法において、次式を得る。

$$F_1(x,v) = F_1(u,z)\ F_1(x,y)$$

$$F_2(x,v)\ F_1(y,z) = F_1(u,z)\ F_2(x,y) \tag{2.16}$$

これらの式から$F_1(u,z)$を除けば次を得る。

$$G(x,v)\ F_1(y,z) = G(x,y) \tag{2.17}$$

ここで、記号法 $G(x,y) \equiv F_2(x,y)/F_1(x,y)$を用いている。明らかに、(2.17)式の左辺はｚに独立でなければならない。さて、(2.17)は同様に次のように書ける。

$$G(x,v)\ F_2(y,z) = G(x,y)G(y,z) \tag{2.18}$$

そして、(2.17)、(2.18)式の左辺をそれぞれU、Ｖで表し、$\partial V/\partial y = \partial U/\partial z$を認証する。このように、G(x,y)G(y,z)はｙに独立でなければならない。この特性を備えた最も一般的な G(x,y)の形式は、

$$G(x,y) = r\frac{H(x)}{H(y)} \tag{2.19}$$

ここで、ｒは一定で、関数 H(x)は任意である。現在のケースで、Ｆの単調性からＧ＞０、だから、我々はｒ＞０を要求し、H(x)は興味の範囲で符合を変えない。

(2.19)を用いて、(2.17)と(2.18)は次のようになる。

$$F_1(y,z)=\frac{H(v)}{H(y)} \tag{2.20}$$

$$F_2(y,z)=r\frac{H(v)}{H(z)} \tag{2.21}$$

そして、関係 dv=dF(y,z)= F_1dy+F_2dz は次の形を取る。

$$\frac{dv}{H(v)}=\frac{dy}{H(y)}+r\frac{dz}{H(z)} \tag{2.22}$$

或いは、積分して、

$$w[F(y,z)]=w(v)=w(y)w^r(z) \tag{2.23}$$

ここで、

$$w(x)\equiv\exp[\int^x\frac{dx}{H(x)}] \tag{2.24}$$

積分の下限値がないのはｗの任意のかけ算要素を重要視しているからである。しかし、(2.15)の w(・)関数を取り、(2.23) を適用して、我々は $w(x)\ w^r(v)=w(u)\ w^r(z)$を得る。(2.23)を再び適用して、関数方程式は次式になる。

$$w(x)w^r(y)[w(z)]^{r^2}=w(x)w^r(y)w^r(z) \tag{2.25}$$

ここで、もしｒ＝１ならばその時のみ些細でない解を持つ。そして、最終結果は二つの形式のどちらかで表される。

$$w[F(x,y)]=w(x),w(y) \tag{2.26}$$

$$F(x,y)=w^{-1}[w(x)w(y)] \tag{2.27}$$

論理積の結合律と交換律はこのように、求める関係が次の関数式を取らなければならないことを要求している。

$$w(AB|C)=w(A|BC)\ w(B|C)=w(B|AC)\ w(A|C) \tag{2.28}$$

これがこれから積規則と呼ぶものである。その建設(2.24)によって w(x)は H(x)の符合によって増加するか減少するかの正の連続単調関数でなければならない。この段階で、他のものは任意である。

結果(2.28)はデシダレータムⅢ(a)の意味で首尾一貫性のための必要条件から導かれた。逆に、(2.28)は結合命題がいくつでもこの首尾一貫性を確実にするのに十分であることは明白である。

常識との定性的一致の要求は関数 w(x)上でさらなる条件を課する。例えば、最初の与えられた(2.28)の形式において、Ｃが与えられて、Ａが確かであると想

像しよう。そのとき、Cの知識によって生み出された「論理環境」において、もし他方が真であるときのみ真であるという意味において、命題 AB とBは同じである。第1章で議論した最も基本的なすべての「公理」によって、同じ真値を持つすべての命題は等しい妥当さを持たねばならない。

$$AB|C=B|C \tag{2.29}$$

そして、我々は次式も持つであろう。

$$A|BC=A|C \tag{2.30}$$

何故なら、もしCが与えられ A が既に確かなら、Cと矛盾しない他の情報Bを与えられて、それはまだ確かである。この場合、(2.28)は次式になる。

$$w(B|C)=w(A|C)w(B|C) \tag{2.31}$$

そして、このことはBが如何に妥当であろうとなかろうとロボットに対して維持されねばならない。だから、我々の関数 w(x)は次の特性を持たねばならない。確かであることは、次式で表わせる。

$$w(A|C)=1 \tag{2.32}$$

さて、Cが与えられて、A が不可能であるとする。その時、命題 AB はCが与えられてやはり不可能である。

$$AB|C=A|C \tag{2.33}$$

そして、もしCが与えられて A が既に不可能（即ち、Cは $\overline{A}$ を意味する）ならば、そのときCと矛盾しないいかなる他の情報Bを与えられても、Aはまだ不可能であろう。

$$A|BC=A|C \tag{2.34}$$

この場合(2.28)式は

$$w(A|C)=w(A|C)w(B|C) \tag{2.35}$$

になる。そして、再び、Bの妥当さがどんなものであろうともこの式が維持されねばならない。この条件を満足できるのはたった二つの可能な値しかない。それは0か＋∞である。－∞の選択はそのとき連続性により w(B|C)は負値であり得なければならないが、(2.35)式はそのとき矛盾を示すので、除外される。

要するに、常識との定性的一致は w(x)が正の連続単調関数であることを要求する。それは増加かも減少かもしれない。もしそれが増加ならば、それは不可能の0から確かである1までの範囲を取る。もし、それが減少ならば不可能の∞から確かである1まで下がる範囲を取らなければならない。このように我々の条件はこれらの極値の間でどう変わるかについては何も言っていない。

しかし、これら二つの表現の可能性は内容で違っている。上述の基準で受け入れられ、∞によって不可能を表す如何なる関数 w(x)が与えられて、我々は同様に受け入れ可能で、0によって不可能を表せるところの、新しい関数 $w_2(x)\equiv 1/w_1(x)$を定義することが出来る。それ故、一つに慣例として我々は今や選択0

$\leqq w(x) \leqq 1$ を採用するならば、一般性の喪失は無いだろう。即ち、内容に関する限り、我々のデシダレータに首尾一貫した全ての可能性はこの形式に含まれる。

（3完）