E.T.ジェインズの「確率理論：科学の論理」の紹介（2）

原　宣一

前回はジェインズの「確率理論：科学の論理」の序言からこの本の概要を説明した。不確かな状況下で推測を行う必要があるとき、即ち、不完全情報の最適処理を問題とするとき、合理的で首尾一貫していることを前提条件とする。この前提条件で必然的に導かれる推測のための理論が拡張論理の確率理論である。それは関数方程式を巻き込む難解な推論なのだが、その結果として得られた確率はラプラスの定義と一致した。ジェインズ達の努力の結果は、正統派統計学者達に古典確率として追いやられたラプラスの確率に磐石の基礎を与えるものであった。

この本は２２章から構成された大部の教科書兼参考書である。今回は第１章「妥当な推論」から抜粋して、拡張論理とその論理の基礎を紹介する。

３段論法は有無を言わせぬ結論を得られるが、実際の場面ではそれが使えない場面が多い。つまり何らかのデータを得ても少し確かさが増すだけで絶対的なことは言えないことが殆どである。しかしそのような場合にもブール代数を使って拡張した論理展開が出来る。そして、これらの全ての推論のために基礎に据えたのが最小限、必要不可欠な条件で、ジェインズはデシダレータと呼んでいる。それは合理的であること、首尾一貫していること、そして常識との定性的な一致、というものだけである。

合理的とは道理や理屈にかなっているさまや物事の進め方に無駄がなく能率的であるさまをいうのであるが、ここでは確かさの程度に数値表現をするということにつながる。

首尾一貫しているとは、矛盾がなく終始することである。つまり、ある状態にいく方法が二つ以上あった場合、どの方法をとってもたどりついた状態は同じでなければならないことを意味している。ある証拠を得て説明の仕方で結論が変わらないことを要請しているのである。

「日本の常識は世界の非常識」などと揶揄されるように、常識といっても誰の常識かが問題になる。論理の展開の前提を公理と呼ばずにデシダレータと遠慮した理由でもあろう。しかし、ここで使われているのは誰もが納得する簡単な常識だけである。

演繹的推論と妥当な推論

我々は、演繹的推論を下す程十分な情報を持っていないが直ちにすべきことを決めなければならない状況に常に置かれる。妥当な結論の形成は非常に微妙な過程である。まず演繹的推論とは究極的に次の二つの強い三段論法の繰り返し適用で解析出来る。

Aが眞なら、Bも眞という状況下で、Aが眞ならばBも眞である。　(1.1)

そして、この逆が、

Aが眞なら、Bが眞という状況下で、Bが偽ならばAも偽である。　(1.2)

一方、妥当な推論（plausible reasoning）は、我々が直面する殆ど全ての場合がそうであるが、演繹的推論を許すほどその情報を持っていない場合に用いられる。我々はより弱い三段論法（epagoge）に退く。

Aが眞なら、Bが眞という状況下で、Bが眞ならばAの妥当さが増す。　(1.3)

証拠はAが眞であることを証明しないが、その結果の一つの認証が我々により多くの確信をAに与えるのである。

同じ主たる前提を用いて、もう一つ別の弱い三段論法がある。

Aが眞なら、Bも眞という状況下で、Aが偽ならばBの妥当さが減る。　(1.4)

この場合、証拠はBが偽であることを証明しないが、それが眞である可能な理由の一つが除かれたので我々はBについての確信が少なく感じるのである。

さらにまだ弱い三段論法で上手く記述されるものがある。

Aが眞なら、Bは妥当さが増すという状況下で、Bが眞ならばAも妥当さが増す。(1.5)

しかし、この議論の弱さが明らかであるにも関わらず、AとBの項で抽象的に述べられたときに、殆ど演繹的推論の力を持っていたと信じさせる何かがある。

明らかに上に記載された演繹的推論は推測の型（1.1）と（1.2）の長い鎖を通じて為され、そして結論がちょうど前提と同じくらいの確かさを持つという特性を持つ。他の種類の推測、(1.3) ー (1.5)、で結論の信頼性は、数段階進めると減衰する。しかし、それらの定量的形式で多くの場合に我々の結論が演繹的推論の確かさに近づき得る。

ロボットを想定

さて、ここで議論を招く見当違いから離れて建設的な事柄に注意を向けるために、我々は想像上の物（ロボット）を考案する。その頭脳はある明確な規則によって推論をするように我々によって設計される。これらの規則は人間の頭脳に望ましいと我々には見えるような簡単なデシダレータから演繹されるだろう。すなわち、もし合理的な人間がもしこれらのデシダレータの一つに違反していることを見つけたならば、すぐに彼の考えを直したいと考えるような人の頭脳である。

我々のロボットは命題について推論する。既に、上に示されたように様々な前提を大文字のローマ字$\{A,B,C,$など$\}$で表す。そして我々はしばらく、用いるいかなる命題も、ロボットに対して、不明確でない意味を持ち、真または偽のどちらかである単純で明確な論理型のものでなければならないということを要求しなければならない。すなわち、特にそうでないと断わらない限り、我々は2値論理、またはアリストテリア

ン論理のみを念頭におく。我々はそのような「アリストテリアン命題」の真か偽かが実現可能な調査で主張可能なものかということを要求しない。実際、このことを行うのに我々の能力不足は通常なぜ我々がロボットの助けを必要とするかという理由そのものなのである。

ブール代数

これらの着想をより形式的に述べるためにブール代数を導入する。その記号、ABは論理積（logical product)、または結合（conjunction)、$A+B$は論理和（logical sum）または離接（disjunction）と呼ぶ。

二つの命題、A 、Bが与えられ、一方が真でもし他方も真であるときにのみ、我々はそれらが同じ真値を持つと言う。これはただ単純な同義反復かもしれない。すなわち、AとBは明らかに同じことを言っている言語表現である。または、多大な数学的労力を費やした後でついにA がB であるための必要で十分な条件であると判ることかも知れない。論理の観点からはそれを問題としない。

明らかに、そのとき同じ真値の二つの命題が等しく妥当であるということが妥当な推論の最も原始的な公理で無ければならない。

複雑な命題を表すのに我々は通常の代数と同じ方法で命題が結合される順序を示すために括弧を用いる。

命題の否定はバーによってする。$\overline{A} \equiv$「Aは偽」。Aと$\overline{A}$の関係は逆の関係である。$A=$「$\overline{A}$は偽」。$\overline{AB}$は論理積$\overline{A}\ \overline{B}$ではないが、論理和の$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$になる。

ブール代数はむしろ些細で明白なある基本恒等式に特徴があり、それらは、等冪律、交換律、結合律、分配律、双対律である。

命題、$A \Rightarrow B$は含意と呼び、「AはB を意味する」と読む。これはA か B のどちらかが真ということではない。$A\ \overline{B}$が偽、あるいは同じことであるが、（$\overline{A}+B$）が真ということのみ意味している。このことは論理式$A=AB$ としてもまた書き得る。すなわち、$A \Rightarrow B$が与えられて、もしAが真ならばB は真で無ければならないし、或いは、もし、Bが偽ならばA も偽でなければならないのである。これは、まさに強い三段論法(1.1)と(1.2)で述べられているところのものなのである。

他方、もしAが偽であるならば$A \Rightarrow B$ はBについて何も言っていないのである。そして、もしBが真ならば、$A \Rightarrow B$はAについて何も言っていないのである。しかし、これらは我々の弱い三段論法(1.3)、(1.4)が何かを言っているのとまさに同じである。それから、これらに基づく妥当な推論の理論は論理の「弱められた」形ではないのである。それは通常の演繹的論理に少しも現れていない新しい内容を伴った論理の拡張なのである。

通常の言語において人は「AはB を意味する」がB は論理的にAから導かれると取るだろう。しかし、形式的論理においては「AはB を意味する」はただ命題AとABは同じ真値を持つということのみ意味するのである。$A \Rightarrow B$が偽となる のはAが真でB が偽であるときにのみ限られるし、他の全ての場合において$A \Rightarrow B$は真である。

適切な演算の組合せ

ロボットの設計に必要とされる演繹的論理のある姿を注目する。四つの演算、二つの命題A、Bから始まり、それによって他の命題が定義される「結合」、すなわち、論理積または接合AB、論理和または離接$A+B$、意味することである$A \Rightarrow B$、そして、否定である$\overline{A}$ を我々は定義している。これらの演算をあらゆる可能な方法で繰り返し結合することによって、新しい命題をいくつでも生成することができる。

次の三つの操作で全ての論理関数を生成するのに十分である。あるいは、それらは適切な集合を形成する。

{結合、和、否定} 即ち、 $\{AND, OR, NOT\}$ (1.22)

単一の論理演算で一つの適切な集合を構築することができる。そのような演算が一つだけでなく二つもあって NAND と NOR である。

$$A \uparrow B \equiv \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} \tag{1.24}$$

$$A \downarrow B \equiv \overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B} \tag{1.26}$$

既にコンピュータと論理回路の設計にこの利点が使われている。

さて次に議論する条件から論理の拡張に入る。我々はこれらをどれも「真」と主張せずに、ただ望ましい目標に表れるところのものを述べるだけなので、「公理」よりもむしろ「デシダレータ (desiderata)」と呼ぶ。これらの目標が矛盾無く達成できるものかどうか、そしてそれらが何らかの唯一論理の拡張を決めるかどうかは第 2 章で与えられる数学的解析の問題である。

基本的なデシダレータ

推論するおのおのの命題に、我々がロボットに与えた証拠に基づいて、ロボットはある妥当さの程度を割り当てなければならない。そして、ロボットが新しい証拠を受け取ったときには何時でも、その新しい証拠を考慮に入れるためロボットはこれらの割り当てを改定しなければならない。これらの妥当さの割り当てがその頭脳の回路に蓄えられ改定されるために、我々の技師が如何なるものに詳細を設計したいと考えようとも、それらはある明確な物理的量、電圧やパルス持続時間や 2 進コード化された数

やその他に関係付けられなければならない。このことは妥当さの程度と実数の間に何らかの関係がなければならないことを意味する。

（I） 妥当さの程度は実数によって表される (1.28)

デシダレータム(I)は、ロボットの頭脳がある明確な物理的手順からの実行によって作動させられなければならないという要求によって、我々に実際に余儀なくさせるものである。しかし、それはまた理論的にも要求されるものである。デシダレータム(I)と機能的に等価である特性無くしては、どんなものでも首尾一貫した理論の可能性はない。

より大きな妥当さはより大きな数に対応しなければならない。無限小だけより大きな妥当性は無限小だけ大きな数にのみ対応すべきである。

ロボットがある命題Aに割り当てる妥当さは一般に、我々がある他の命題Bが真であるということをロボットに話すかどうかに依存する。これを次のシンボルで表す。

$$A|B \tag{1.29}$$

「Bが真であるということが与えられた条件付のA が真である妥当さ」または単に「Bが与えられたA」と読んで良い。

$$A+B|CD \tag{1.31}$$

は、CとD が両方とも真であると与えられて少なくとも命題AとBの一つが真である妥当さを表す。

我々は大きな数によって大きな妥当さを表すことを決めた。だから、

$$(A|B)>(C|B) \tag{1.32}$$

は、Bが与えられてAがCより妥当であるということを言っている。この記号法で、妥当さのための記号が括弧なしのA｜Bの形式であったが、しばしば表現の明確さのために括弧を加える。このように、(1.32) は

$$A|B>C|B \tag{1.33}$$

と同じことを言っているが、その意味がよりはっきりする。

BとC が相互に矛盾するときに$A|BC$ を定義したりしない。このような記号が現れたときには何時でも、BとCは両立する命題であると理解する。

もし古い情報CがC' に更新されたならばAの妥当さは次のように増加させられる。

$$(A|C') > (A|C) \tag{1.34}$$

しかし、Aが与えられてのB の妥当さは変わらない。

$$(B|C') = (B|AC) \tag{1.35}$$

もちろん、これはAとBの両方とも真という妥当さにおいて決して減少のない増加を示すことが出来る。

$$(AB|C') \geq (AB|C) \tag{1.36}$$

そして、A が偽という妥当さは減少しなければならない。

$$(\overline{A}|C') < (\overline{A}|C) \tag{1.37}$$

この定性的要求は単純に「感覚の方向」を与える。: つまり、ロボットが推論を行う方向で、どの程度妥当さが変化するかについては何も言っていない。ただし、我々の連続の仮定が、常識との定性的一致のための条件でもあるが、もし$A|C$がただ無限小だけ変化するならば、$AB|C$と$\overline{A}|C$に無限小の変化のみをもたらすことが出来るということを要求する。現時点、我々はそれらを単に次のように要約する。

（Ⅱ）　常識との定性的一致　(1.38)

最後に、ロボットに正直な人々が常に達成することなく努力するところのもう一つ別の望ましい特性を与える。つまり、ロボットは常に首尾一貫して推論するのである。

(Ⅲa) もし一つの結論が一つ以上の方法で推測できるならば、あらゆる可能な方法は同じ結果に至らなければならない。 (1.39a)

(Ⅲb) ロボットは常に質問に関係を持つ全ての証拠を考慮にいれなければならない。それは情報のいくつかを勝手に無視はしない。何が残っているかにのみ基づいて結論を出す。換言すると、ロボットは完全に非観念的である。 (1.39b)

(Ⅲc) ロボットは常に等価な妥当性割り当てによって等価な知識の状態を表す。即ち、もし二つの問題でロボットの知識の状態が同じであれば（おそらく、命題の呼び名を除いて）、ロボットは両方に同じ妥当さを割り当てなければならない。 (1.39c)

デシダレータ(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲa)は我々のロボット頭脳内部の働きに関する基本的な「構造」要求である。一方、(Ⅲb)、(Ⅲc) はいかにロボットの行動が外部世界に関係すべきかを示す「インタフェース」条件である。

上記の条件は我々のロボットがそれによって推論しなければならないユニークな規則を決めるものであることが判る。

（２完）