# E.T.ジェインズの「確率理論：科学の論理」の紹介（1）

原　宣一

## 「確率理論：科学の論理」の概要

E.T.ジェインズの「確率理論：科学の論理」が、彼の死後6年の2004年4月にケンブリッジ・ユニバーシテイ・プレスから発刊された。編集者、G.ラリー・ブレットホースト、はまえがきに次のように書いている。

「E.T.ジェインズは1998年4月30日に亡くなりました。彼の死の前に確率理論に関する彼の本を完成し出版するように頼まれました。私はある期間このために格闘しました。何故なら私の心中はジェインズがこの本を完成させたかったことは疑いようの無いことですから。不幸にも、後半の大部分の章で、ジェインズが応用を意図していた第2巻は抜けているか未完成であるばかりか、前の方の章でも幾つかは抜けている節がありました。私がこれらの後の章を書き、そして抜けている節を埋めることは出来たかも知れません。しかし、もし私がそうしたならば、この仕事はもはやジェインズのものでなくジェインズーブレットホーストの共著となりどの部分がどちらの著者によるものか判らなくなるでしょう。最終的に、私は抜けている章は抜けているままにすることに決心しました。この仕事はジェインズのものにすることです。(以下、省略)」

ジェインズ自身による1996年7月付けの序文を以下に要約する。

この本の内容は大学上級以上のレベルであり、物理学、化学、生物学、地質学、医学、経済学、社会学、工学、オペレーションズ・リサーチ、等のような何らかの専門分野と共に、応用数学を学んだ、読者に向けて書かれている。これらの読者はそれぞれの分野で推測（inference）を必要としている人たちである。

推測は本来演繹的に推測したいものであるが、実際の場合は不十分な情報からの帰納的な理由付けしかできないことが多い。問題は不完全情報の最適処理に他ならない。ここで書かれたことは従来の慣習的な確率理論と異なっているが、将来において慣習的なの確率理論となることは間違いない。

この理論の発想の根源はハロルド・ジェフリー、R．T．コックス、C．E．シャノン、およびG．ポーリャにある。原稿の主体は1956年にスタンフォード大学で5回に及ぶ一連の講義ノートで、ジョージ・ポーリャの「数学および妥当な（plausible）推論」を詳述したものである。彼は我々の直感的な「常識」を研究し、これを基本的に定性的なデシダレータ（desiderata：切実な要求）の集合とした。数学者は、厳格な証明の発見に当然先立つものとして初期の段階を誘導するためにこれを用いていた。もし妥当さの程度が実数によって表現されるならば、推測を導くための定量的規則群がユニークに定められることが証

明された。しかし、最終結果はベルヌーイやラプラスによって既に与えられた確率理論の標準則そのものであった。

その重要で新しい姿は、これらの規則が「チャンス」や「ランダム変数」を言及することなく、今や一般論理の唯一有効な原理として見られるということである。従って、それらの応用範囲は20世紀初頭に展開された慣習的な確率理論において想像されてきたよりずっと大きい。一つの結果として、「確率理論」と「統計的推測」の想像上の相違は消えてしまう。そして、論理的な唯一性と簡単さだけでなく、応用面でより大きな技術力と柔軟性を達成する。

過去においてラプラスの仕事が排斥された理由は、曖昧さの無い問題定義をしなかった失敗から生じるものか、又は見かけは些細な関連情報の説得性を評価したための、ただの誤用であったことが判った。

この本がそれらの集大成として教科書としても参考文書としても役立つべきものと希望する。

確率理論のほぼ半分を占めていると考えるもの、つまり不完全な情報の論理的な解析による確率割り当ての原理は、少しもコルモゴロフ体系には出てこない。コルモゴロフの公理のおのおのが全ての実際上の目的に対し、ポーリャーコックスの合理性と首尾一貫性に基づくデシダレータから導き出せるものであることが判る。

無限集合パラドックスは今日広がりつつあって、確率理論の寿命をおびやかす流行病になっている。しかし、我々の体系においては、このようなパラドックスは自動的に避けられる。何故なら、これらの体系における規則は有限集合で上手く定義され、良く振る舞う有限集合の極限値としての無限集合のみを許すからである。

「頻度派」対「ベイジアン」推測法の論争があった。ここで筆者は率直なところベイジアン側に味方するものの一人である。ベイズの方法の優位性が百もの異分野で今や十分に実証されている。しかし、ベイジアンも頻度者の取り組みも普遍的に適用可能ではない。だから、現時点より一般的な研究に物事のより広い見方を取るのである。それが拡張論理としての確率理論である。

その「新しい」感覚は確率理論の数学的規則が単に「ランダム変数」の頻度を計算するための規則ではないという認識に等しい。それらはあらゆる種類の推測（即ち、妥当な推論）を導く唯一の首尾一貫した規則でもある。

標本分布のみ用いる伝統的な「頻度者」の方法は、実際問題では殆どあり得ない条件（事前情報に無関係だが独立な「ランダム実験」の繰り返し）を前提とする。この取り組みは現行の科学の要請に全く不適切である。

加えて、頻度派の方法は局外母数（nuisance parameter）を取り除く技術的な手段がない。十分な、または補助的な統計量が存在しない時にそのデータに

あるすべての情報を使うことさえ出来ない、つまり、事前情報を計算に入れることもできない。必要な理論的原理を欠いているので、確率理論からよりも直感に基づいた「一つの統計を選ぶ」ことを強いられ、そして確率理論の規則には含められていない、任意のアドホックな（ad hoc）工夫（不偏推定子、信頼区間、パワー関数、末端領域の重要性検定、等）を発明させられるのである。しかし、コックスの定理が保証するように、そのような工夫は常に非首尾一貫性を生み、適用され過ぎてばかげた結果を生む。

ベイズの方法によって頻度者の用語で議論され得るものよりはるかに複雑な問題を解くことができる。我々の主な目的のひとつは、いかにこの能力の全てが拡張論理として解釈された確率理論の単純な積と和の規則に既に含められているかを示すことである。

この目的のために、最大エントロピーの原理が現時点で最も明確な理論的正当性を持っていて、ベイズのツールと同じぐらい強力で用途の広い解析ツールで、計算的にも最も高度に開発されている。これを適用するためにひとつの標本空間を定義しなければならないが、いかなるモデルも標本分布も必要としない。実際には、エントロピー最大化は、我々のデータからひとつのモデルを創りだす。そしてそれは多くの異なった基準によって最適であることが証明されるものである。

ベイジアンと最大エントロピー法は他の面で異なっている。両方法とも情報を組み込んだ最適の推測をもたらすが、我々はベイズ流解析のためにひとつのモデルを選定するのでベイズの方法は推測的である。

他方、最大エントロピー法は標本空間と利用可能なデータにおける証拠を越える仮説は何も呼び出さないので、非推測的手法である。このようにそれは想像上においてのみ存在するパラメータの値よりも、むしろただ観察できる事実（未来の関数か過去の観察）のみを予言する。我々が殆ど生データ以上の知識を持っていないときに最大エントロピー法が適切な（最も安全な）道具であるということは、まさにその理由のためである。それはデータによって保証されていない結論を引き出してしまうことに対しての防御になっている。

現時点では、最大エントロピー法が我々の必要とするただひとつの道具になっている、重要で高度な応用が多くある。G.L.ブレットホースト著の「ベイジアン・スペクトル解析とパラメータ推定」[スプリンガー統計の講義ノート＃48、(1988)] とオックスホード大学科学出版シリーズで出版された2冊の本 [「行動における最大エントロピー」ed B. バックと V.A.マッコウレイ(1991)、と「データ解析：ベイジアン個別指導」D.S.シビア著] は本質的に我々と同一の見地で書かれ、数値解で解かれた現実問題の宝庫である。また、1981年以来様々な年間MAXENTワークショップの講演集は非常に多くの有用な応用と見なされる。

拡張論理としての確率理論は人間の知的活動の多くの面を再生産する。その式はより複雑な現象、意見の発散、をも再生する。人は公衆課題の公開討議は一般的な共通理解をもたらす傾向があろうと予期するであろう。反対に、ある論争課題が数年間も厳しく議論されてきたときには社会が極端に対抗する二つの部隊に２極化することを繰り返し観察する。そうなると殆ど中庸の見解を保持する人を見つけることが不可能である。論理としての確率理論は同じ情報を与えられた二人の人が如何にそれによって反対の方向の意見を持ち得るか、またこれを避けるために何がなされなければならないかを示す。

そのような点で、確率理論は疑いもなく直感的な判断をするときに、我々の心が無意識にも作用する仕組みについて、何かを話しかけている。人によってはこれらの秘密の暴露を不愉快なものに感じるかも知れないし、また別の人は心理学、社会学あるいは法学の研究に有用な道具であると見るだろう。

与えられたデータ集合から引き出すべき結論に関して、事前情報は大きな影響がある。現行の、多く議論された環境ハザードや食品添加物の毒性のような課題は、もし現在のデータだけを見て、その現象に対する我々の事前情報を無視するならば、合理的に判断出来ないことである。このことは非常に、危険の過大見積もりになることも、過小見積もりになることもあり得る。

一つの共通的な誤りは、放射線の影響やある物質の毒性を判断するときに、閾値無しに線形反応モデルを仮定することである。恐らく、あるとしても非常にゆっくりとしか取り除かれない、重金属イオン（水銀、鉛）のような蓄積する毒に対しては、閾値効果は無いだろう。しかし、事実上すべての有機物質（サッカリンやチクロのような）は有限代謝率の存在が、有限の閾値服用率が存在しなければならないことを意味する。そして、この閾値以下ではその物質は急速に分解されるか取り除かれて病害の影響を持たない。もしこのことが本当でなかったならば、全てのものを我々は食べてきたのだから、人類は決して現在まで生き延びて来られなかっただろう。

それ故、この分野の推測の目標は反応曲線の傾斜のみでなく、もっと重要なことに、閾値に対する証拠があるかどうかを決めることなのである。そして、もし閾値があるならば、その大きさ（「最大安全服用量」）を推定することである。例えば、砂糖代用品は服用することは実際に遭遇するより千倍以上多い量で危険ですと告げることはその物質を用いることに反対する議論ではない。そして、確率理論は、確認することが許されたときには何時でも（即ち、私たちが閾値の可能性を許すほど柔軟なモデルを用いる時には何時でも）、このことを確認するものである。

我々が千倍服用をすることは無いので千倍服用効果は無関係である。砂糖代替品の場合に重要な質問は次のようになる。砂糖代替品の毒性に対する閾値は

どれだけか、また、砂糖に対しては、通常使用と比較してどれだけか。もし、砂糖代替品の閾値が高いならば、合理的な結論はその代替品は食料成分として砂糖よりもむしろ実際には安全であることになる。閾値の可能性さえも許さないモデルを使って、データを解析することは何らかの量のデータから偽りの結論を導き出しかねない方法で、課題を予断することである。

我々はまさにこのような偽りの結論が、今や大きな経済浪費のみならず、公衆の健康に不必要な危険を産み出しているので、このことを序章で強調している。想像上の危険に対して費やされる努力が、実際の危険に対して使われないということを意味する。科学者が作用機構（代謝率、化学反応のような）について持っている事前情報を正しく表すモデルを使用することが将来そのような愚行を避け得るのである。

我々の主たる主張が論理と明確さにおく理由がもう二つある。第一に、その中に入り込む前提より強い議論はないということである。数学的厳密さに最大の強調をおく人たちは、現実世界の確かな感覚を欠き、彼らの議論を非現実な前提に縛り彼らの今日的意味を壊してしまう。

第二に、我々は無限集合の理論を抱き込んだ数学において厳密さの本当に信頼できる標準は無いということを認識しなければならない。我々が今日持っている現実の厳密さのみが、有限整数の有限集合に関する基本算術演算にある。計算と近似の芸術は基本原理のそれより一つの異なったレベルにある。

極めて重要なことに、この方針はしばしば計算を二つの方法で簡単にする。：（A）標本分布の「統計量」を決定する問題が取り除かれる。（B）計算の始めに局外母数を取り除くことができて、捜索アルゴリズムの次元を減らせる。このことは最小二乗、あるいは最尤アルゴリズムで必要とされる計算において次元の大きさを減らすことを意味する。ブレットホーストによるベイズ流コンピュータプログラム（1988）はこれらの利点を感動的に実証している。

拡張論理としての確率理論の用い方を習った科学者は、無関係なアドホックな工夫の収集物を習っただけの人に対し、強さと多様性で大きな利点を持っている。我々の問題の複雑さが増すに連れてこの相対的利点も増す。それ故に、将来定量的科学の全てに関わる研究者は、実際上の必要性の問題として、ここに詳述された方法で確率理論を用いることを余儀なくされるであろう。

（以上、序言から）

次回から数回にわたりその内容から幾つかの要点を紹介する。なお、ジェインズの残した原稿自体はインターネットで公開されており、次の URL でダウンロードできる。

http://omega.math.albany.edu:8008/JaynesBook.html

（1完）