

ブラックホールの謎と 超弦理論

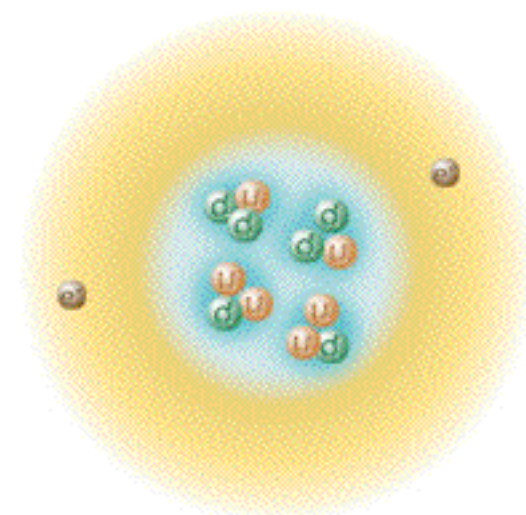
夏梅 誠



はじめに

標準模型の基本的な要素

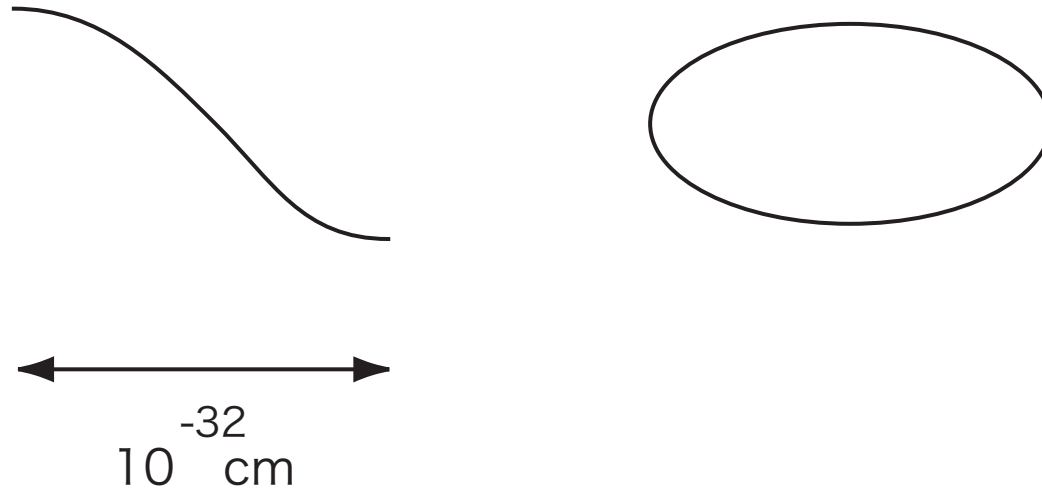
- 物質：クォーク 6 種類、
レプトン 6 種類、
ヒッグス粒子



- 相互作用：重力、電磁気力、弱い力、強い力

→ 超弦理論によって統一的に説明される

ストリング



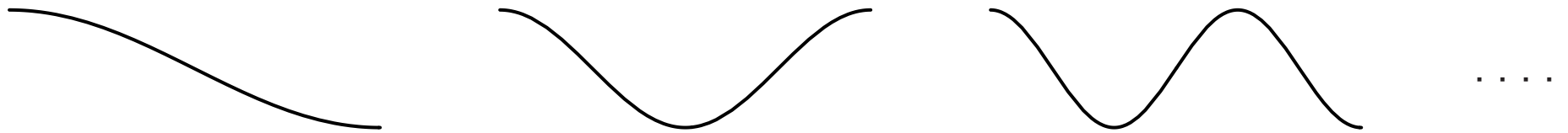
cf. 実験で「見る」ことができる長さ = 10^{-15} cm



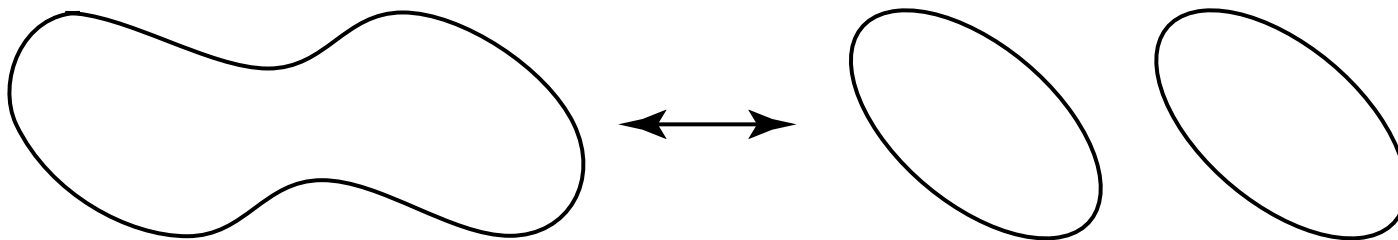
ストリング：巨視的には素粒子

ストリングと素粒子の関係

さまざまな素粒子 → ストリングのさまざまな振動



素粒子の相互作用 → ストリングの合体など



素粒子論は原理的に完成したのか？

超弦理論：重力も含めた統一理論の最有力候補

素粒子論は原理的には完成したのか？

超弦理論：弱い重力はよく理解されている。平坦な時空




曲がった時空では？

実際、曲がった時空の問題は量子重力の理論的な基礎を揺るがす可能性がある。



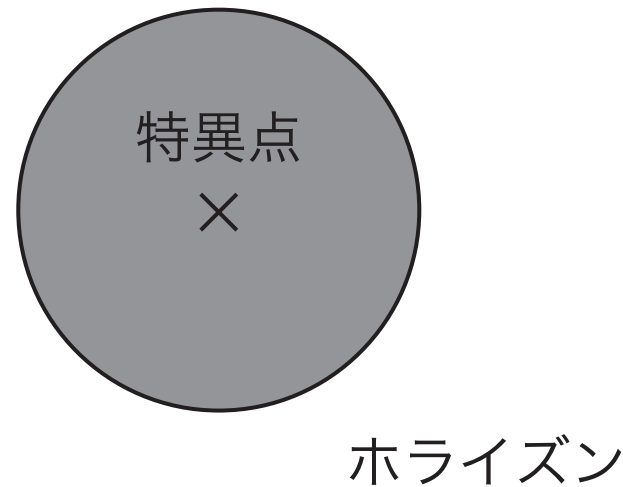
ブラックホール
量子力学の破れ

この講義の主な目的

-  ブラックホールとブラックホールがもたらす問題の解説
-  超弦理論の解説
-  ブラックホールの問題に超弦理論がどこまで迫ったか

ブラックホール

典型的なブラックホール



- ホライズン：脱出不可能な領域
- 特異点：無限大の重力

⇒ それぞれがブラックホールの未解決問題を生み出す

ホライズンと脱出速度

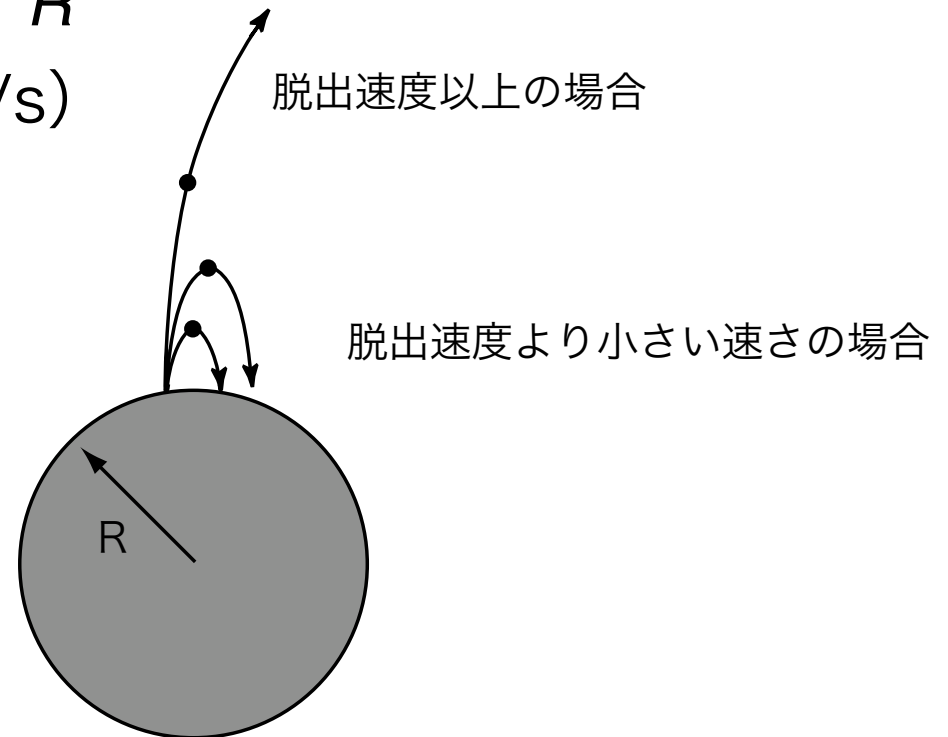
重力から逃れるためには

$$\frac{1}{2}mv^2 > \frac{GmM}{R}$$
$$\therefore v^2 > \frac{2GM}{R}$$





v: 脱出速度 (地球の場合v~11km/s)

脱出速度

「星」の半径が小さいほど大きい



いろいろな物体の脱出速度

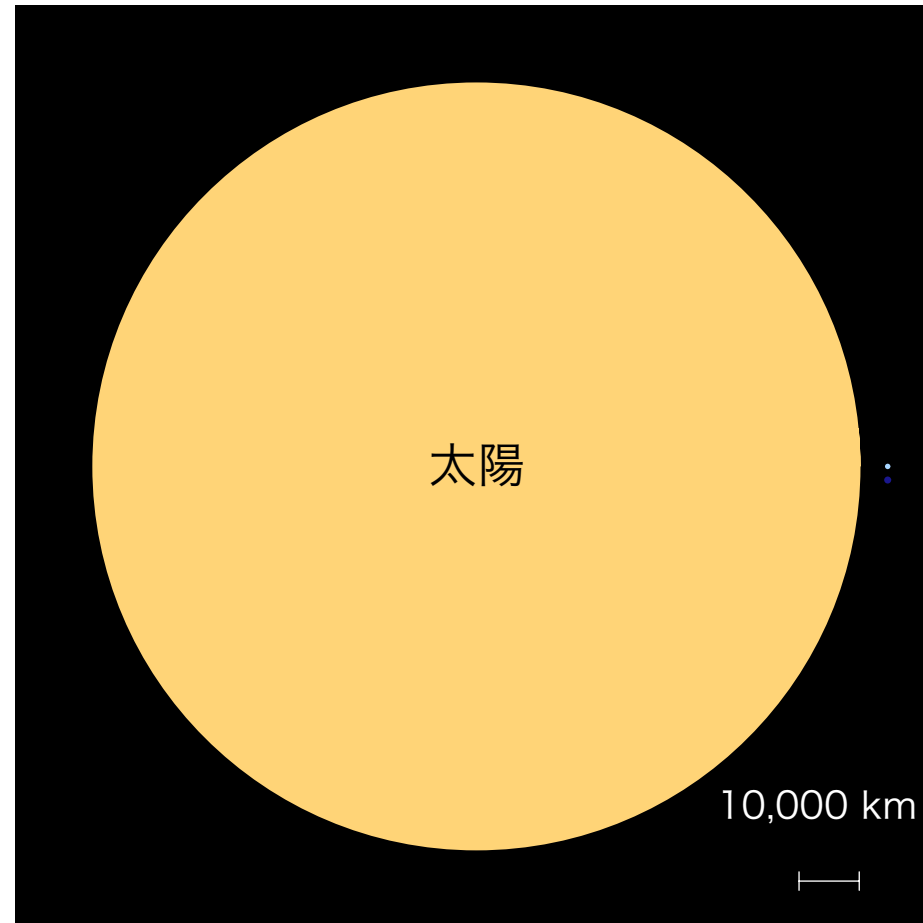
-  太陽
-  白色矮星
-  中性子星
-  ブラックホール

半径：大



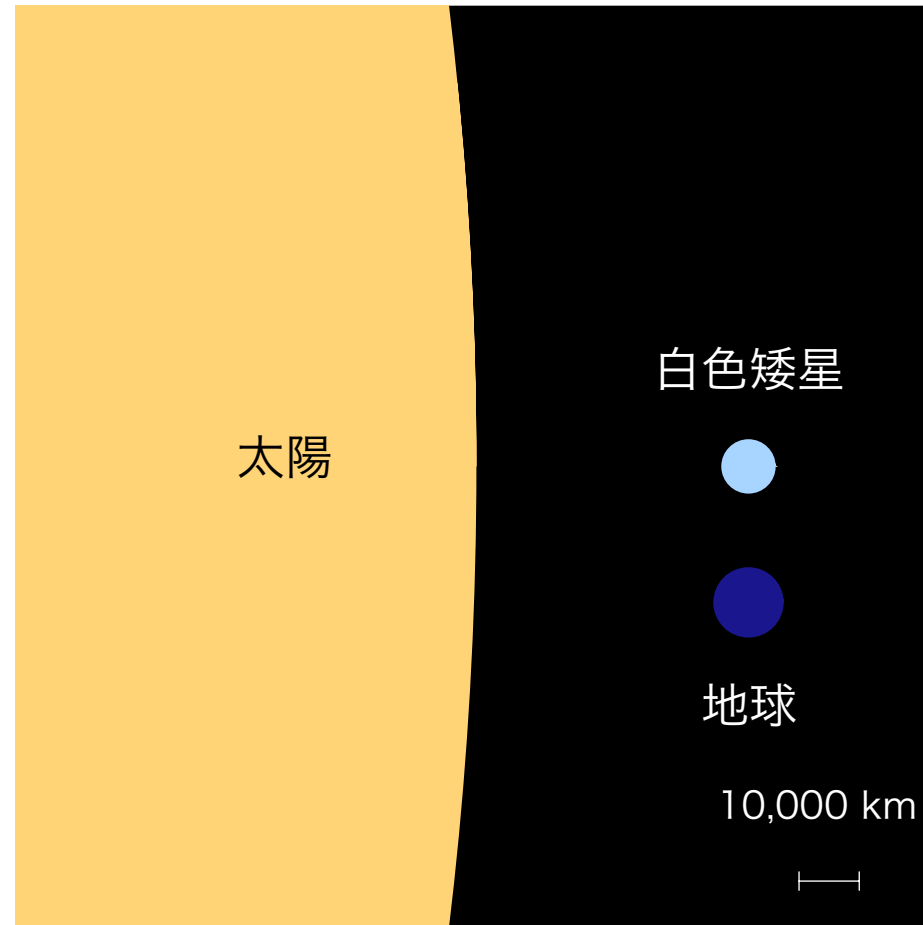
半径：小

コンパクト物体と脱出速度



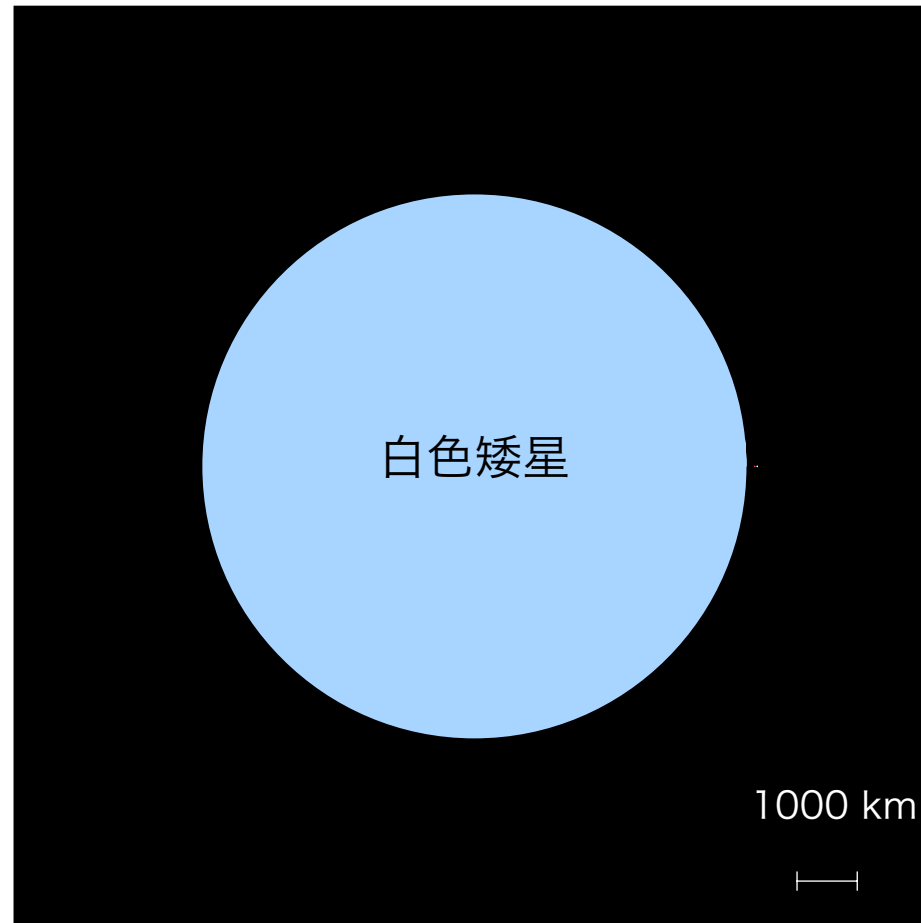
太陽：脱出速度 618 km/s

コンパクト物体と脱出速度 ($\times 10$)



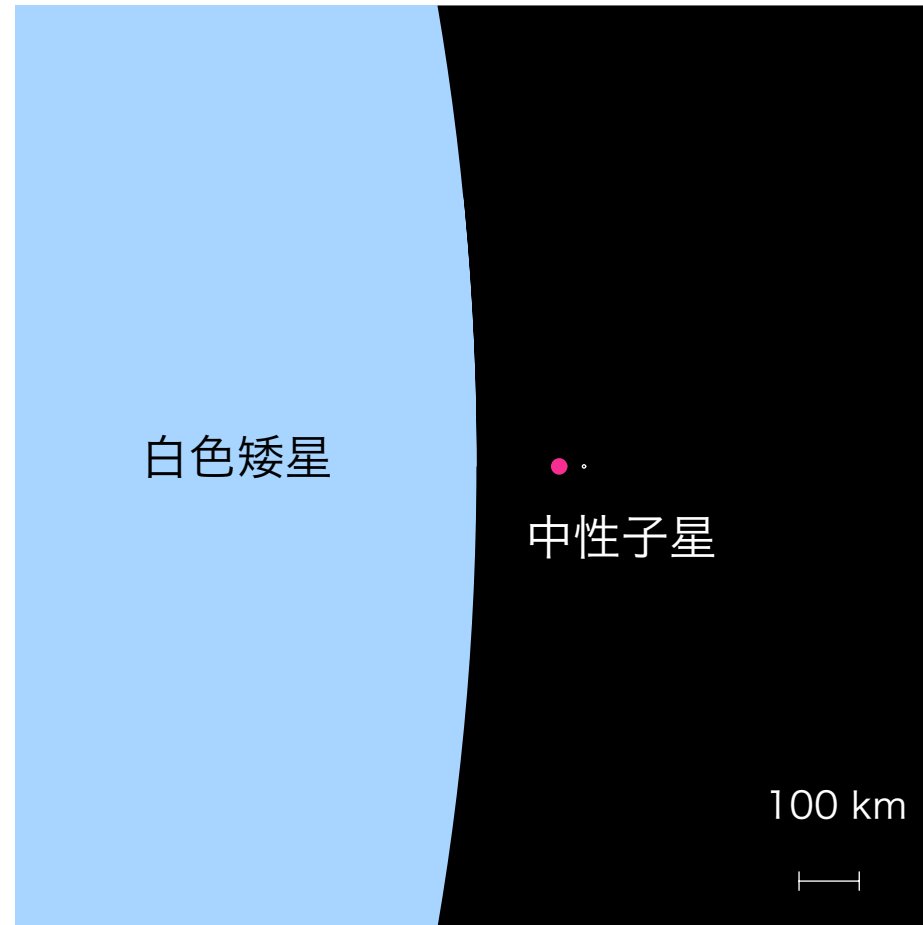
注：コンパクト物体は
全て太陽質量とする

コンパクト物体と脱出速度 ($\times 100$)



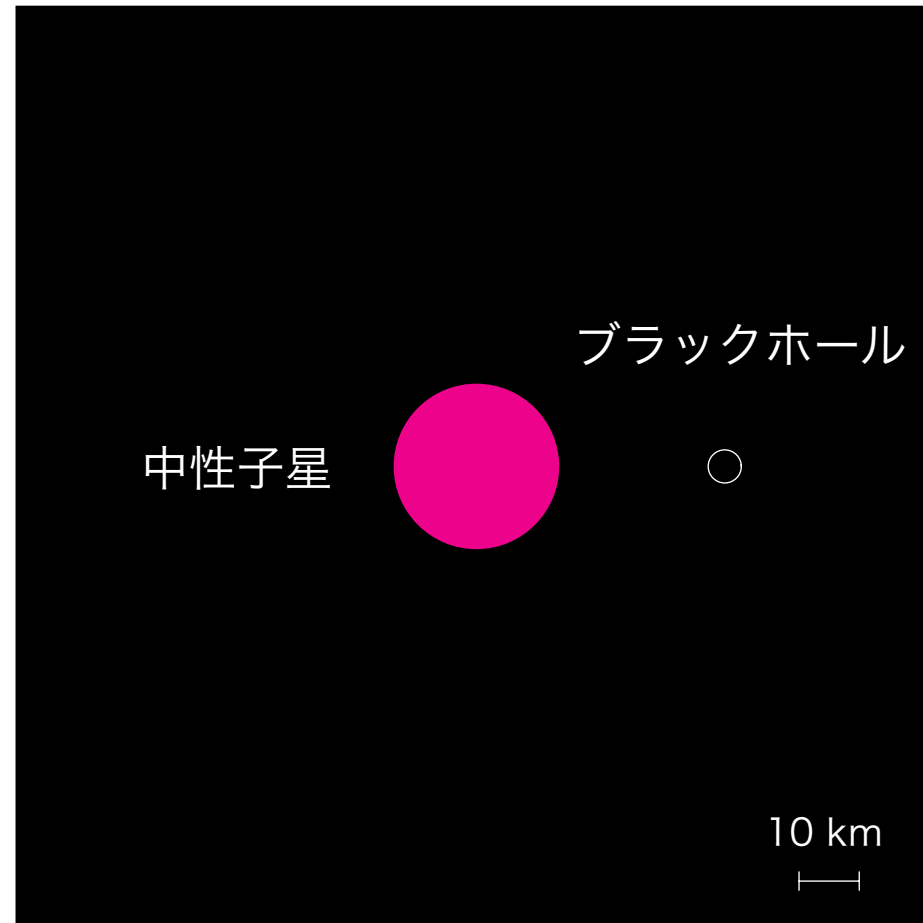
白色矮星：脱出速度 $7300 \text{ km/s} \sim$ 光速の2%

コンパクト物体と脱出速度 ($\times 1000$)



中性子星：脱出速度 13万 km/s \sim 光速の40%

コンパクト物体と脱出速度 ($\times 10000$)



ブラックホール：脱出速度 30万 km/s = 光速

ホライズン

ホライズン：重力が強くなり、脱出速度が光速になる領域
光さえも外には逃れられない

$$\text{脱出速度 } v^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$R = \frac{2GM}{c^2} \text{ で光速になる}$$

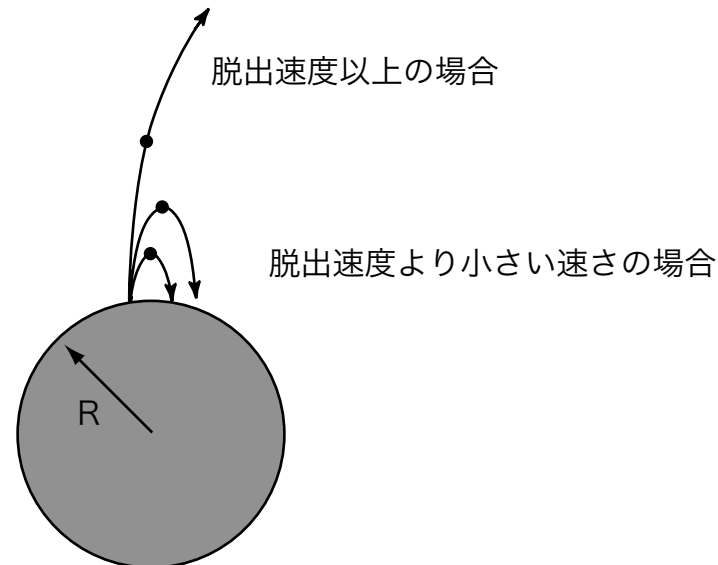
1 太陽質量 = 2×10^{33} g の場合：

$$R_{\text{horizon}} = \frac{2GM}{c^2} \sim 3\text{km}$$

シュワルツシルト半径

注

- 特殊相対論によれば、光速は絶対速度
- ニュートン力学では重力が光にどう作用するのか決められない
- ニュートンの議論では光は無遠点に到達できないだけ。
実際のブラックホールでは光はホライズンから脱出不可

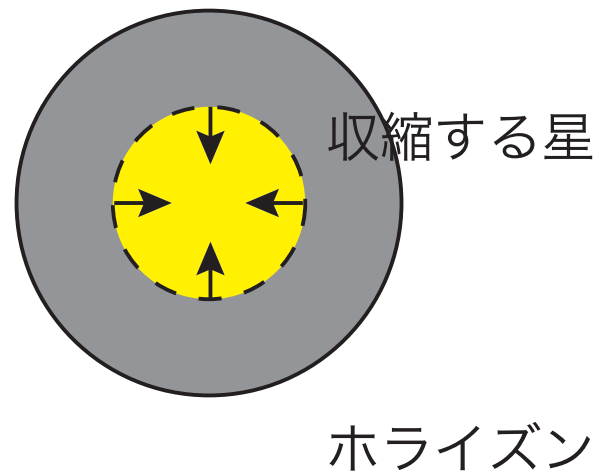


特異点

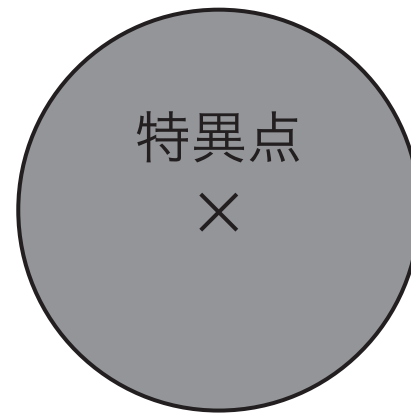
星がホライズンまで縮んだとする

重力が強すぎて、いかなる手段を持ってしても収縮を止めることはできない。→ **重力崩壊**

ブラックホール中心で星は一点に縮み、重力は無限大になる



ブラックホールの謎



ホライズン



ホライズン

ブラックホール・エントロピー



インフォメーション・パラドックス



特異点 → 特異点問題



講義予定

1. ブラックホールと量子論
2. ブラックホールの謎
3. 超弦理論の基礎
4. 超弦理論でのブラックホール
5. 特異点問題

1. ブラックホールと量子論

ホーキング放射

物質を量子化する。

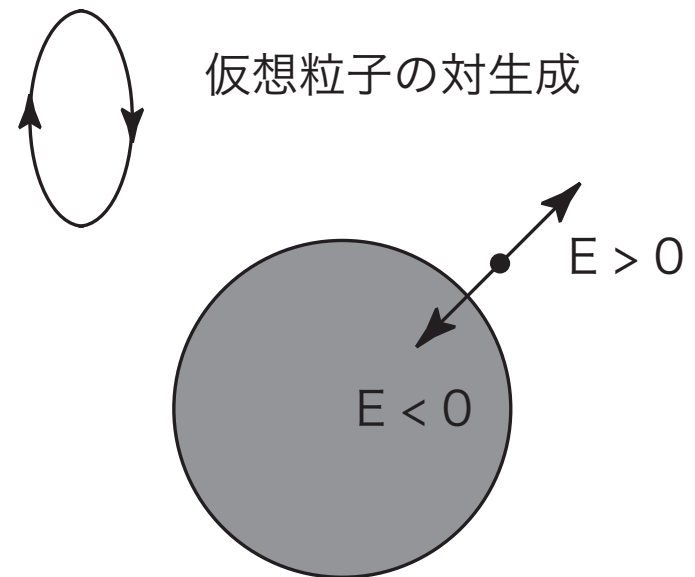
ブラックホールは物質の量子効果により

$$k_B T_H = \frac{\hbar c}{4\pi R}$$

の温度の熱放射をおこなう

→ ホーキング放射

ホライズンをまたがって
仮想粒子の対生成



ホーキング放射の簡単な導出

ブラックホールのどこから放射が起こるかはアプリアリには決まらない

不確定性原理より

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar \rightarrow p \sim \frac{\hbar}{R}$$
$$\rightarrow E \sim pc = \frac{\hbar c}{R}$$

熱放射の光子の平均エネルギー $\sim k_B T_H$

$$\therefore k_B T_H = \frac{\hbar c}{R}$$

ホーキング放射 ↔ 不確定性原理

→ マクロな物体に対してきわめて低い温度

$$T_H \sim 6 \times 10^{-8} \text{ K (太陽質量の場合)}$$

通常の大サイズのブラックホールの場合、この放射は観測不可能

ブラックホールの蒸発

ブラックホールはホーキング放射によりエネルギーを失う
→ 蒸発

ステファンの法則：
$$\frac{dE}{dt} \sim -AT^4$$

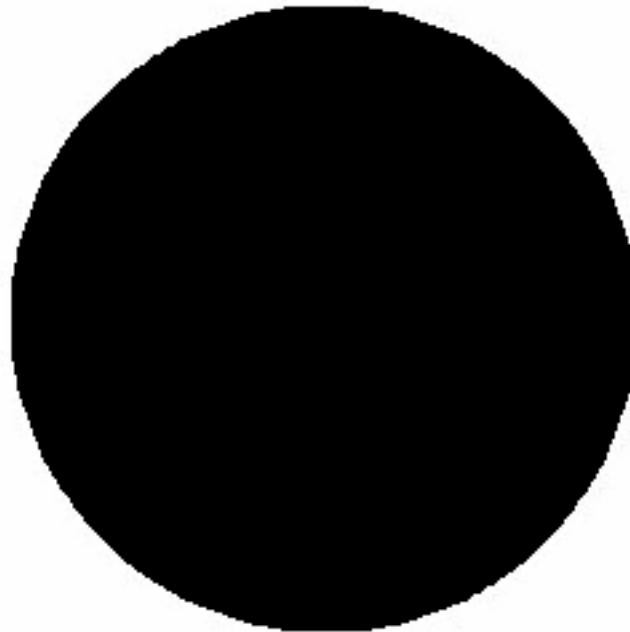
ブラックホールの寿命：
$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{M^2}$$

$$\tau_{BH} \sim 10^{74} \left(\frac{M}{M_{Sun}} \right)^3 \text{ s}$$

cf. 宇宙年齢 ~ 100 億年 $\sim 10^{17}$ s

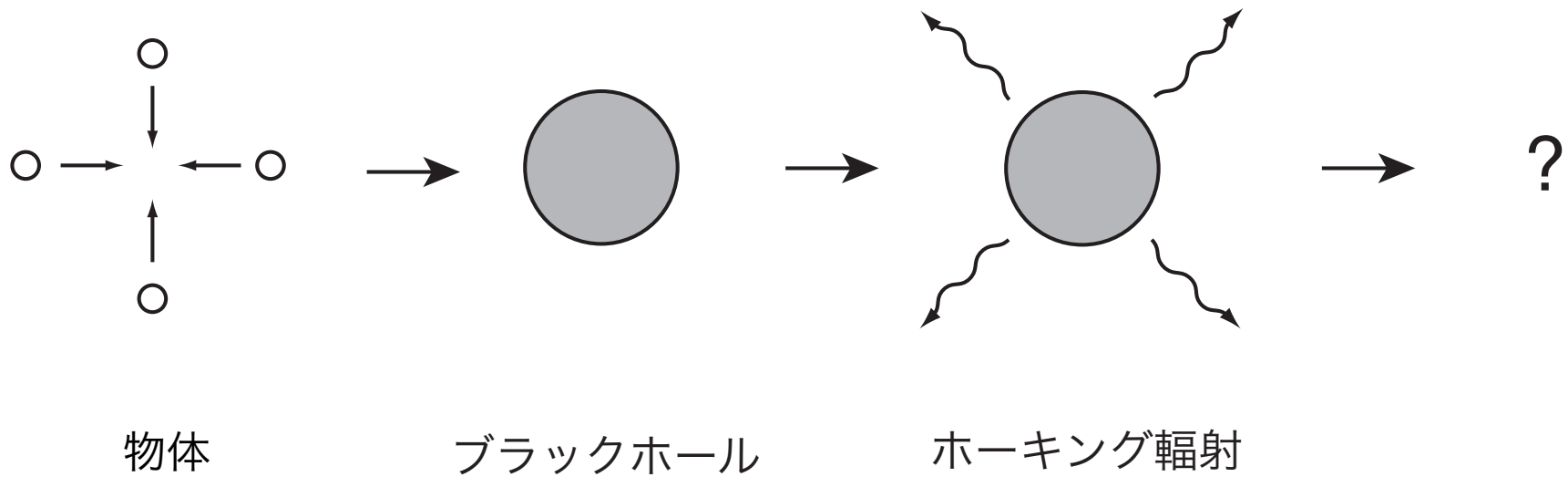
ブラックホールの蒸発の様子

1 太陽質量



0
 6.15822×10^{-8} Kelvin

ブラックホールのlife history



2. ブラックホールの謎

ブラックホールの謎 1

ブラックホール：熱放射

何らかの意味でブラックホールは熱平衡にある？

ブラックホール： $R = 2GM$ にホライズン

物体がブラックホールに落下 → ホライズンの面積は増加 $dA > 0$

cf. 熱力学の第二法則： $dS > 0$



ホライズン面積 ↔ エントロピー

ブラックホール・エントロピー：

$$S \sim (\text{ホライズン面積}) / (\text{プランク長さ})^2$$

$$\text{プランク長さ} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}$$

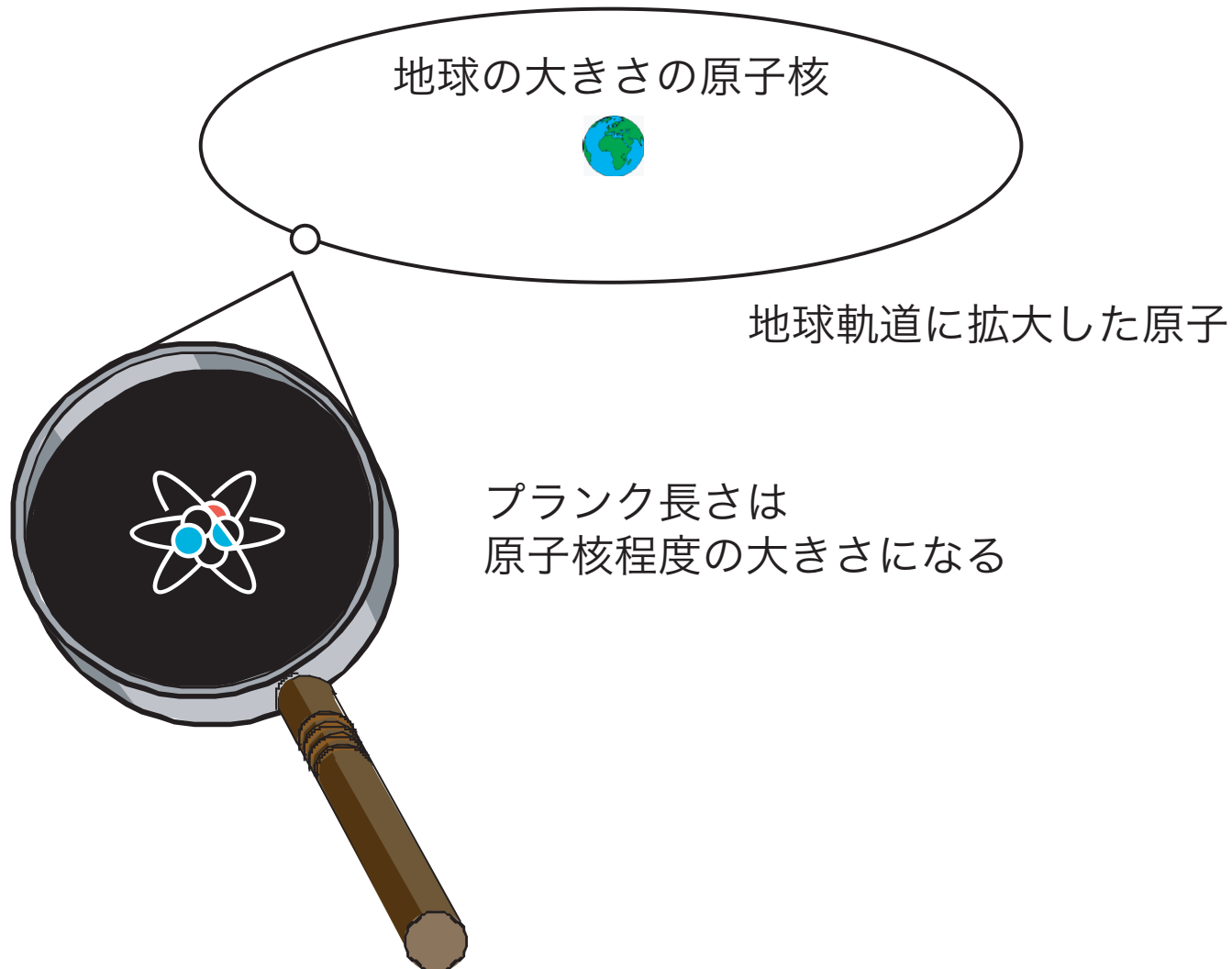
マクロな物体に対してきわめて大きい値

$$S \sim 10^{77} \left(\frac{M}{M_{Sun}} \right)^2 k_B$$

cf. 太陽のエントロピー： 10^{57}

プランクスケールはミクロな物体にとっても ミクロなスケール

原子を 10^{21} 倍拡大してみる



エントロピー

熱・統計力学：巨視的な状態が少数のパラメーターのみで決まる

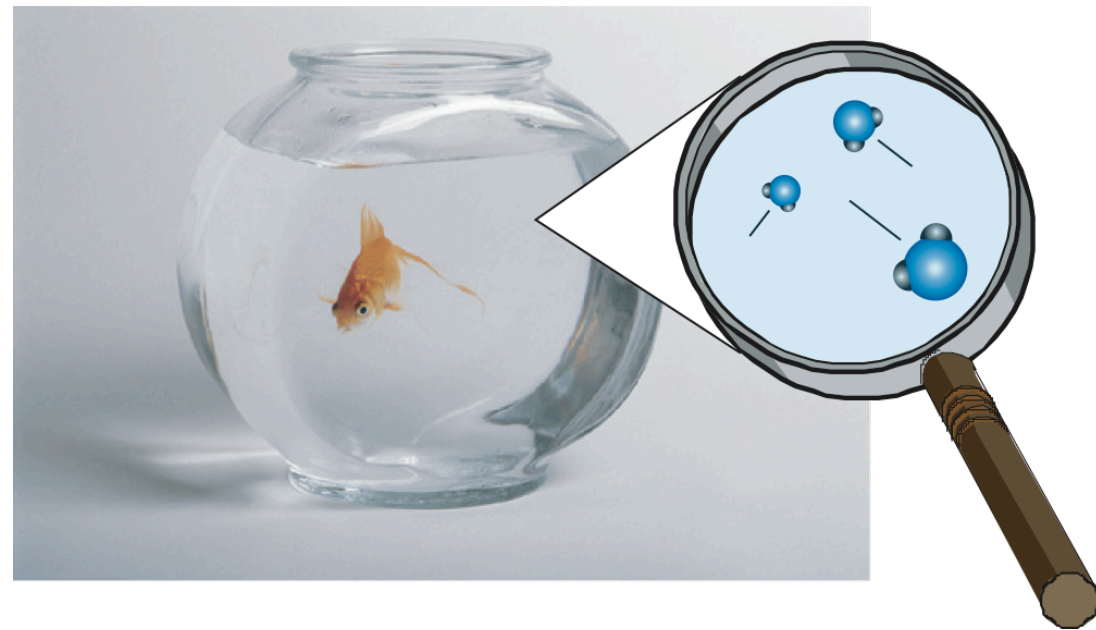
しかしある温度のコップの水

微視的には多数の分子からなる。微視的な状態は巨視的な状態量だけでは決まらない。

少しずつ違っていても良い

1つの巨視的な状態に対して
微視的な状態は多数ありうる

→ エントロピー



統計力学によると

$$S = k_B \ln (\text{系の取りうる状態数})$$

したがってブラックホールの「状態数」は

$$(\text{状態数}) = e^{S/k_B} \sim e^{10^{77}}$$



と期待される。

ブラックホール・エントロピーの謎

ブラックホール・エントロピーの意味は？何らかの意味で

同じようなブラックホールを作る微視的状態の可能な数

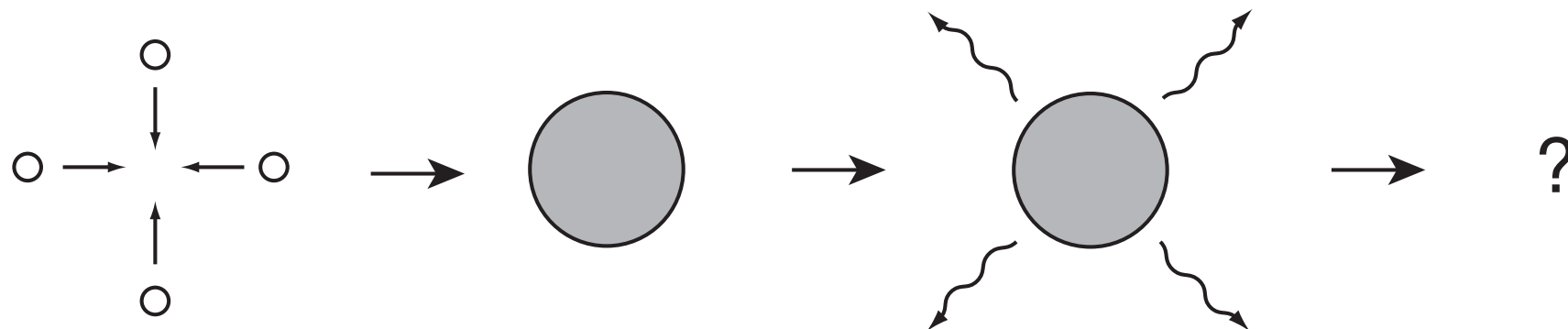
しかし

-  ふつうの統計力学は重力のもとでは成り立たない
-  微視的な状態を知るにはブラックホールの量子化が必要

→ 時空そのものの量子化

ブラックホール・エントロピーが発見されて25年間謎につつまれている。

ブラックホールの謎 2



物体：「情報」

ブラックホール

ホーキング輻射

物体の「情報」はどこに消えた？
→ インフォメーション・パラドックス

ホーキング放射 → 熱放射

ブラックホールを作り出した物質の性質によらない
温度（質量）のみで決まる

↔ ホーキング放射：ランダムな量子ゆらぎ

ホライズンから何かが出ているわけではない

ブラックホールを作る物質が違う → 最終的には同じ放射のみが残る

しかし

始状態が違ってても終状態が同じ → 量子力学と矛盾！

確率が保存しない（ユニタリー性を破る）

簡単な例：

$$U|1\rangle = |f\rangle$$

$$U|2\rangle = |f\rangle$$

ここで U : 時間発展のオペレーター

$$\| |1\rangle \|^2 = \| |2\rangle \|^2 = \| |f\rangle \|^2 = 1 \quad \rightarrow \text{確率の保存}$$

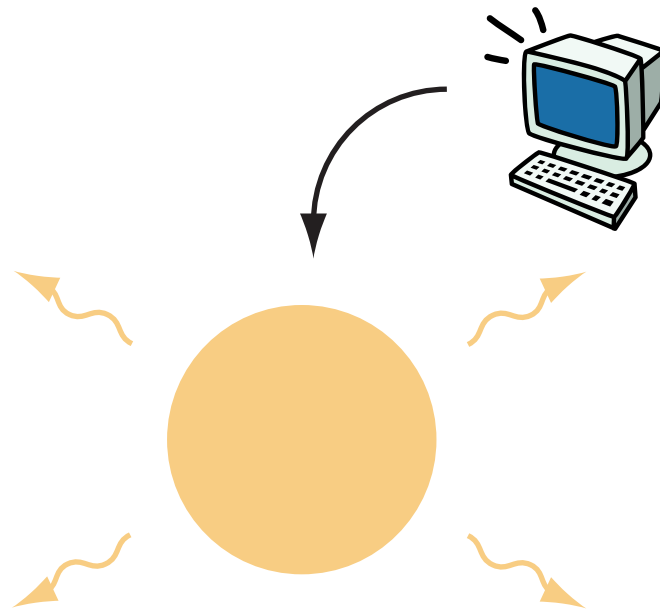
量子力学の重ね合わせの原理より

$$\frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}$$

という状態も存在するはず。しかし

$$U\left(\frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \rightarrow \text{確率が保存しない}$$

太陽とどう違うのか？



太陽も熱放射を起こす。
太陽は量子力学に矛盾しないのか？

太陽からの放射は厳密には熱放射ではない。

アンサンブル平均を取って始めて黒体放射。原理的には熱放射からのズレの知識でコンピューターの情報に再構成可能

ブラックホールはそうではない。

1. 厳密に熱放射
2. コンピューターはホライズンを横切る。情報がブラックホールから出ているとすると、因果律や局所性を破ることになる

どの仮定が間違っているのか？

終状態が同じと仮定 → ユニタリー性の破れ

違うシナリオはあり得るのか？

多くの修正が考えられているが、どのような修正も

 ユニタリー性の破れ → エネルギー保存則の破れ

 予言可能性の破れ

 局所性・因果律の破れ

 時空の安定性の破れ

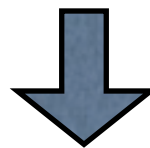
...

基礎的な概念に大きな変更を強いる

超弦理論はこれらの問題に どうアプローチするのか？

- 超弦理論でのブラックホールはどういうものか？
- 超弦理論はブラックホールを量子論的にちゃんと扱えるのか？

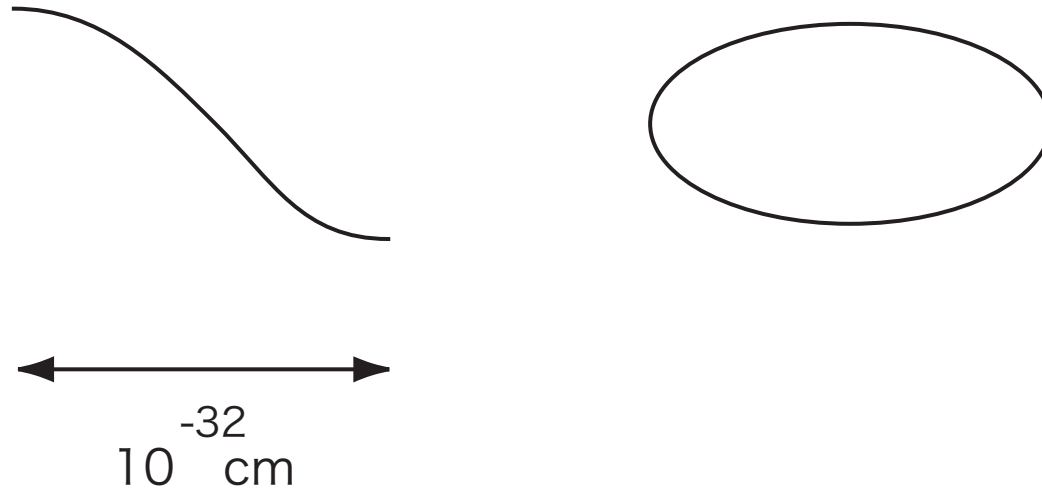
もしそうならば、ブラックホールがあっても量子論は破れていないことになる



インフォメーション・パラドックスの問題はない

2. 超弦理論の基礎

ストリング

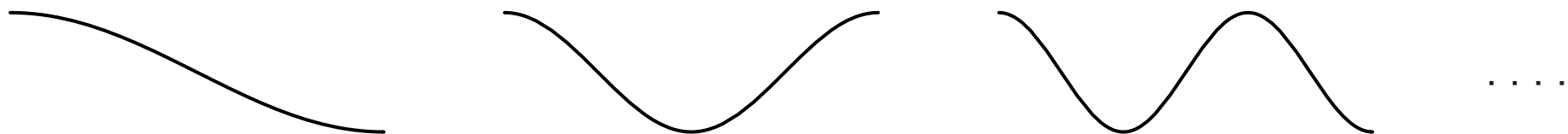


cf. 実験で「見る」ことができる長さ = 10^{-15} cm

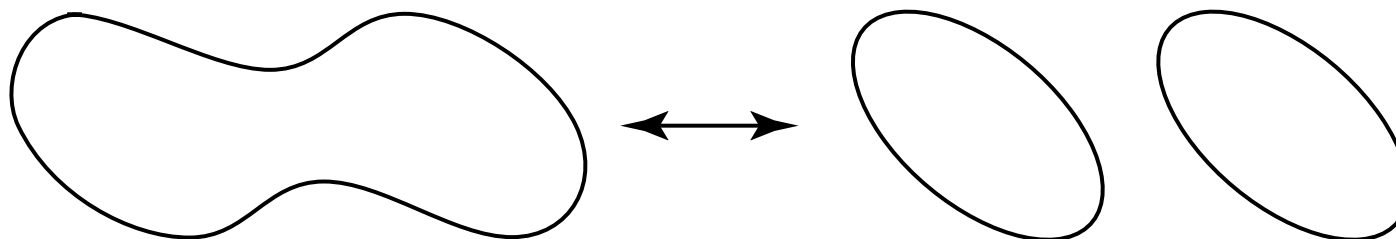


ストリング：巨視的には素粒子

さまざまな素粒子 → さまざまな振動



素粒子の相互作用 → スtringの合体など



日常的なストリングとの違い

量子論的

ストリングの典型的なサイズ：コンプトン波長程度 $\frac{\hbar}{Mc}$

相対論的

莫大な張力

日常的なストリングとの比較

	バイオリン	ストリング
長さ	32.5 cm	10^{-32} cm
1m あたりの質量	0.7 g	10^{28} g
周波数	440 Hz	10^{42} Hz
振動の速さ	290 m/s	3×10^8 m/s
張力	57 N	10^{42} N
振動のエネルギー	10^{-3} J	10^8 J

バイオリンはA440に対する数値（「ラ」の音）

ストリングの特徴 1 : 相対論的

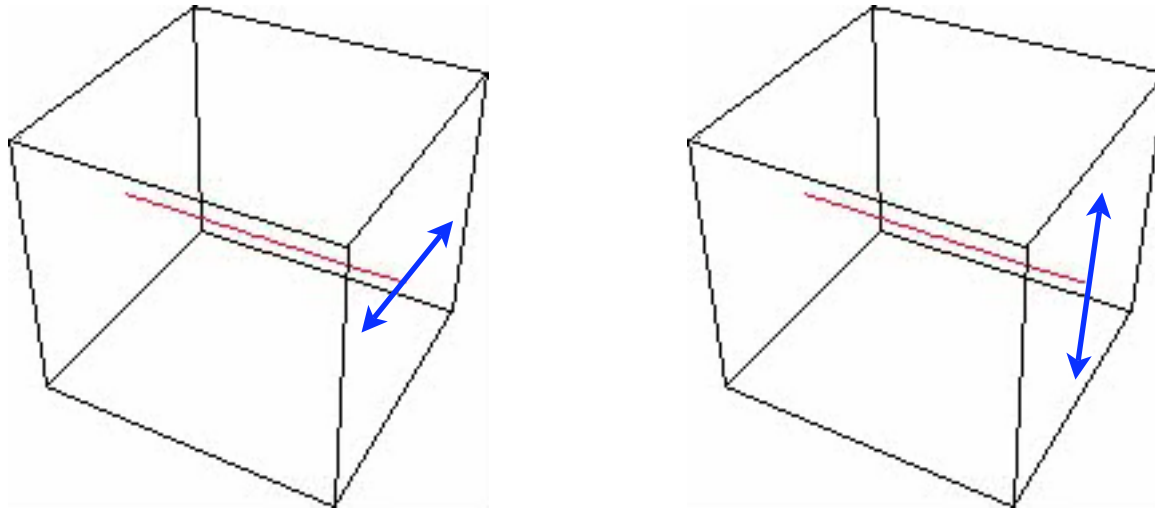
莫大な張力 → 大きな振動エネルギー ($\sim 10^8$ J)
→ ストリングの質量

振動するストリング：振動エネルギー分の質量を持つ素粒子
違う振動 → 異なる質量の素粒子
ストリングの振動の仕方：無限 → 無限個の素粒子

質量：典型的には 10^{-6} g ($\sim 10^{18}$ GeV)

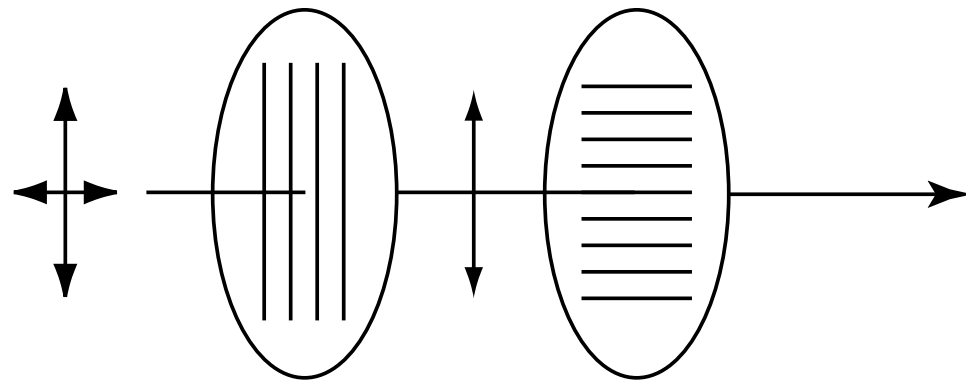
通常の素粒子はストリングのもっとも低い振動
重い状態の存在も重要

ストリングの状態 (レベル1)



偏光フィルター

光子に相当 (自由度2)



ストリングの状態

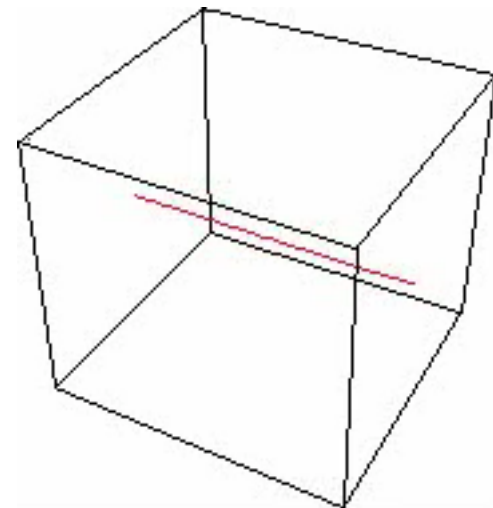
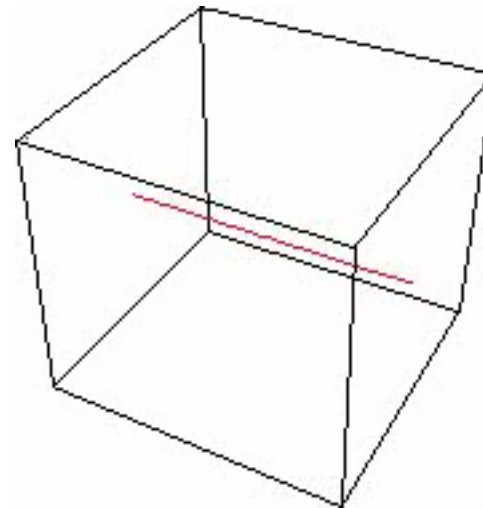
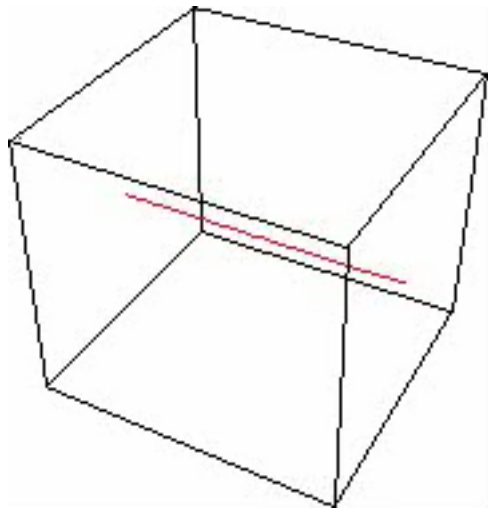
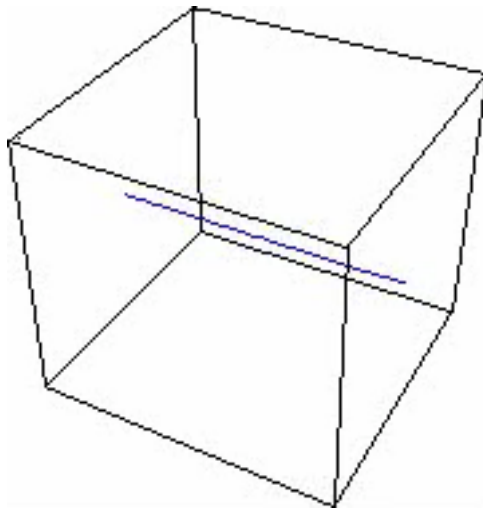
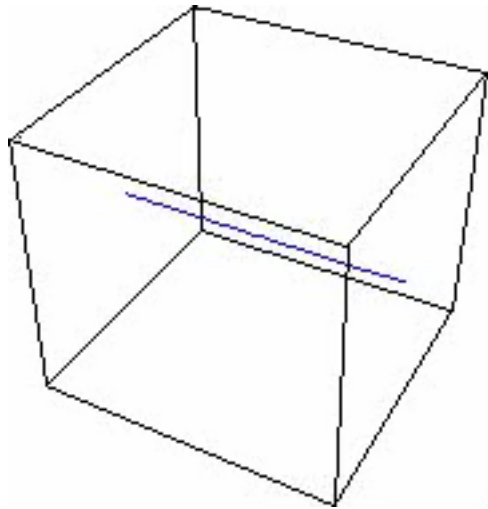
ストリングの質量を大きくするには

- ① 振動の節を増やす
- ② 振幅を大きくする

量子論：振幅はとびとびの値を取る

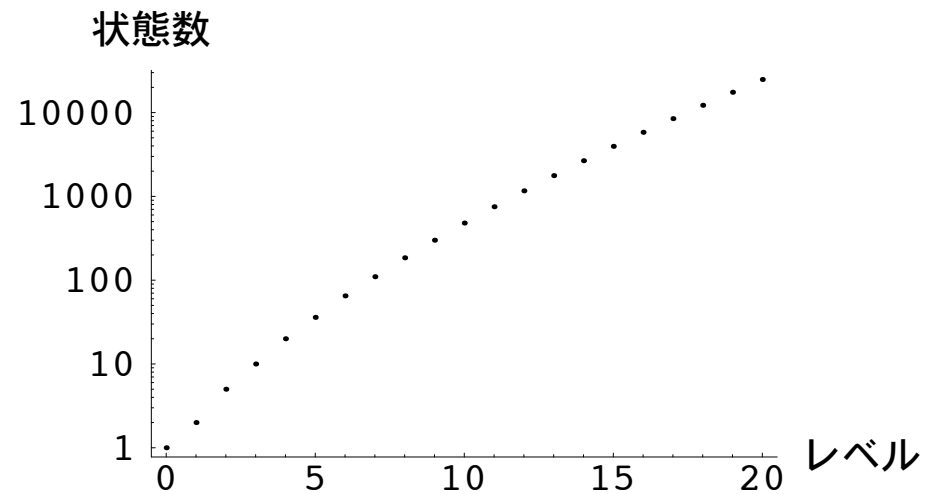
→ ストリングの質量もとびとびの値：「レベル」

ストリングの状態 (レベル2)



質量が大きければ大きいほど状態数が多い

端のあるストリングの場合（4次元）



指数関数的に増加

質量が大きいときは近似的に

$$d \sim e^{l_s M}$$

l_s : スtringの広がり

状態数の莫大な増加



ブラックホールを考える上で決定的な役割

3. 超弦理論での ブラックホール

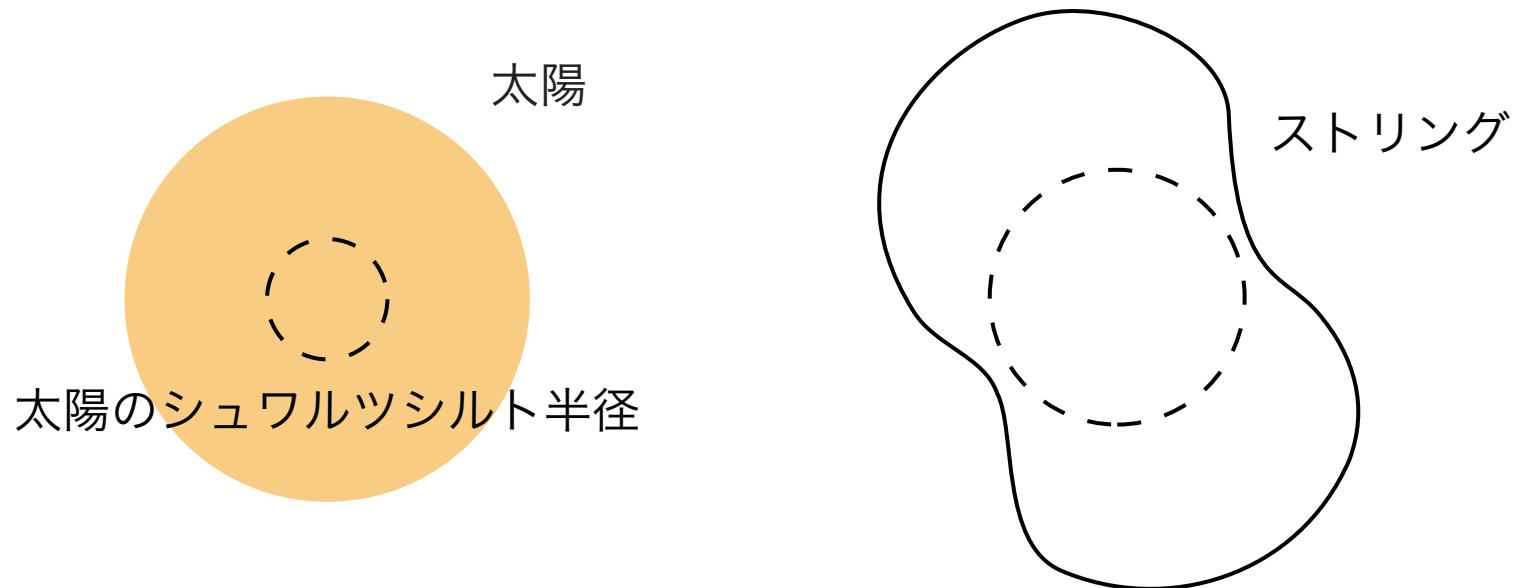
超弦理論でブラックホールを作る

太陽：ブラックホールではない

$$(\text{シュワルツシルト半径}) < (\text{太陽半径})$$

同様に、ストリング：ブラックホールではない

$$(\text{シュワルツシルト半径}) < (\text{ストリング})$$



思考実験を考える

(シュワルツシルト半径) < (ストリング)

重力を強くする ニュートン定数Gを大きくする

シュワルツシルト半径 = $2GM$: 大きくなり、ある時点で

(シュワルツシルト半径) > (ストリング)

ストリングはブラックホールになる

ストリング自身がブラックホールの候補

一つの質量を持つストリングの状態は複数存在
このような状態 → すべてブラックホール

同じ質量のブラックホール → ミクロなスケールではストリング
のさまざまな状態

$$? \\ (\text{BH エントロピー}) = (\text{ストリングの状態数の対数})$$

(BH エントロピー) [?] = (ストリングの状態数の対数)

ストリングの状態数： $S_{string} \sim l_s M$

ブラックホール・エントロピー： $S_{BH} \sim \frac{A}{G} \sim GM^2$

一致しない。特にべきが違う

そもそもこの2つは比較できない

(シュワルツシルト半径) \gg (ストリングのサイズ)

→ 重力相互作用：大

→ 近似が破れる

ストリングの状態数は重力が弱いところで数えたもの

(シュワルツシルト半径) \ll (ストリングのサイズ)

→ ブラックホールとしては表せない

ブラックホールとストリングを比較できるのは

(シュワルツシルト半径) \sim (ストリングのサイズ)

の時のみ

この時 $GM \sim l_s$ より

$$S_{string} \sim l_s M \sim GM \times M = GM^2$$

両者は一致！

一見するとなぜ合わなかったのか？

$$S_{string} \sim l_s M$$

$$S_{BH} \sim \frac{A}{G} \sim GM^2$$

S_{string} の M と S_{BH} の M が同じだと仮定していた。

→ この仮定が誤り

一見するとなぜ合わなかったのか？

ニュートン定数 → 大

重力の影響が強くなる。時空は平坦な時空から曲がり始める

重力場のエネルギー：負

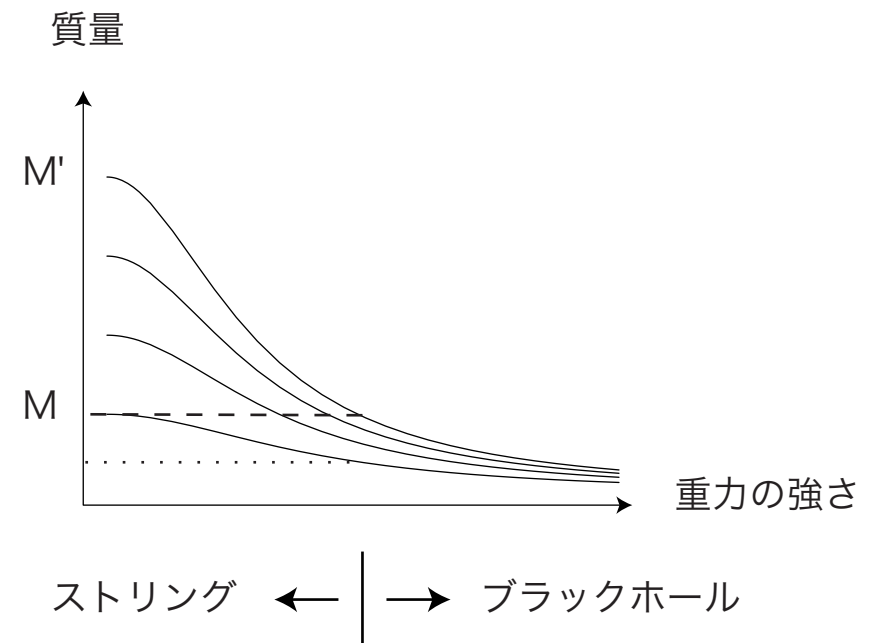
→ 各状態の質量を小さくする

質量Mの状態からスタート

→ 質量Mのブラックホールにならない。

M'の状態からスタート

しなければいけない。



ブラックホール・エントロピーの厳密な導出

より高度なテクニック

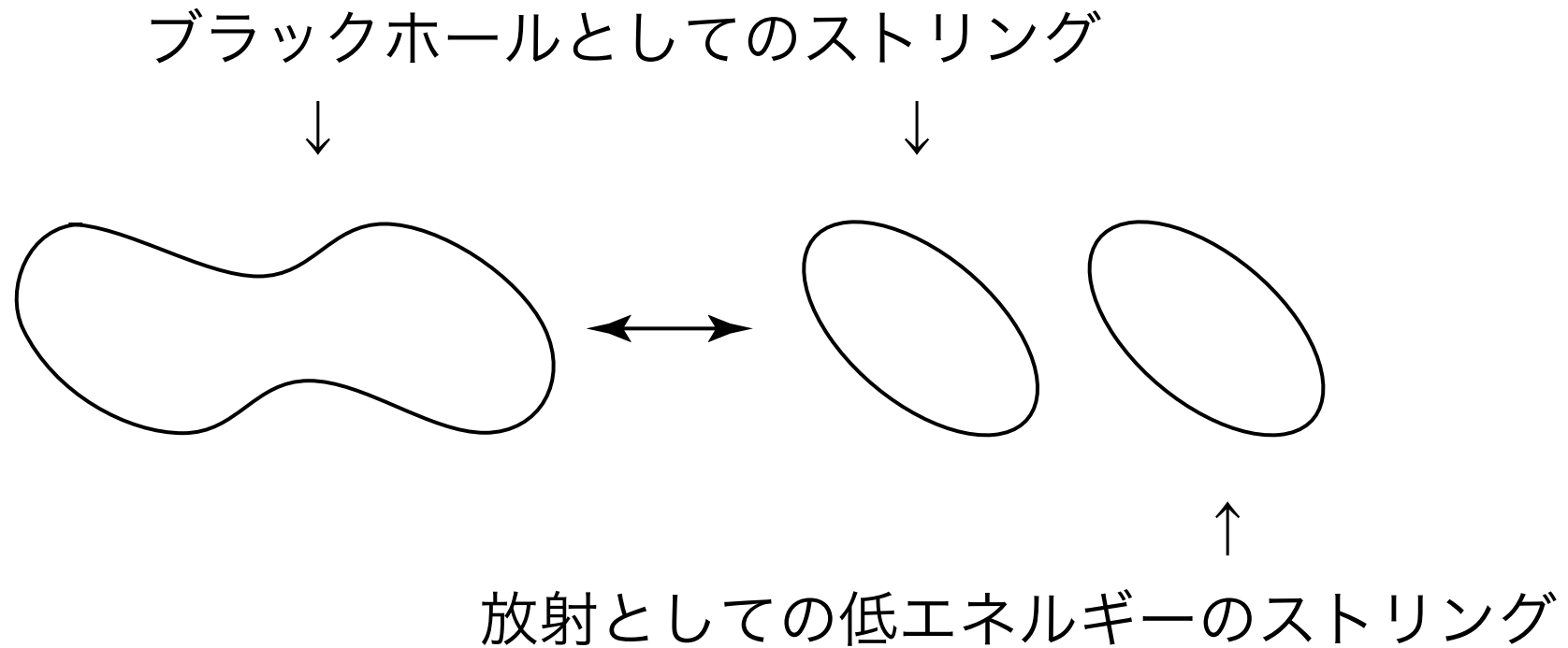
 超対称性

 Dブレーン

を使い、定数まで含めてブラックホール・エントロピーを厳密に導くことができる

ホーキング放射

超弦理論でのホーキング放射



インフォメーション・パラドックス

超弦理論でのホーキング放射：通常の量子力学プロセス

統計的な平均を取って始めて熱放射になる



この意味でホーキング放射も太陽の放射と変わらない。インフォメーション・パラドックスの問題はないはず

5. 特異点問題

特異点：ブラックホール内部で重力は無限に強くなる
宇宙初期にも特異点

超弦理論：特異点問題についても一定の進展
特異点問題を回避する様々な方法

何が特異点を作っているのか？

特異点：重力崩壊の結末 物体で作られている？
そうはみなせない

電磁気学の場合

クーロン・ポテンシャル $1/r$ はなぜ問題がないのか？

→ クーロン・ポテンシャルは点電荷が作っていると見なせる

クーロン・ポテンシャルはポアソンの方程式を満たす（デルタ関数をソースとする）

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -Q \delta(\vec{x})$$

実際には電子が点電荷と見なせるわけではない
最終的には、電子を量子化すれば良い

超弦理論での特異点

超弦理論での特異点：ストリングによって作られると解釈が可能
静電気学の問題に帰着

$$\vec{\nabla}^2 H(\vec{x}) = -\tau_p \delta(\vec{x})$$

このような解釈は通常のブラックホールに対しては不可能

ある種の特異点は意味をなす

最終的にはクーロン力同様、量子効果等で特異点が解消されるのであろう

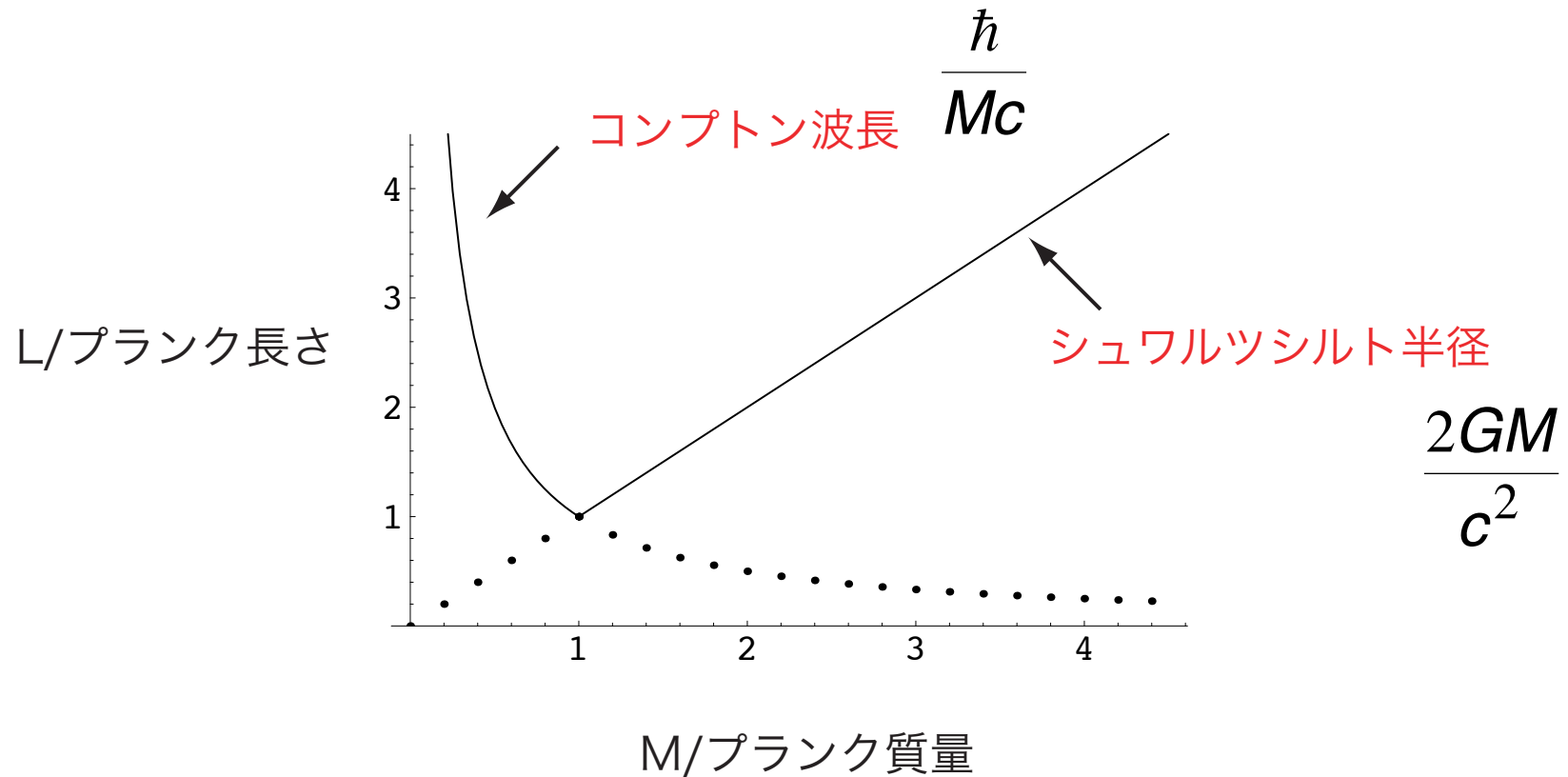
特異点問題の解決方法？

何らかの意味で
プランク・スケール以下の長さに意味はない

プランク・スケール以下の長さを
探ろうとする試みは成功しない

同じような兆候が至るところで見られる

一例

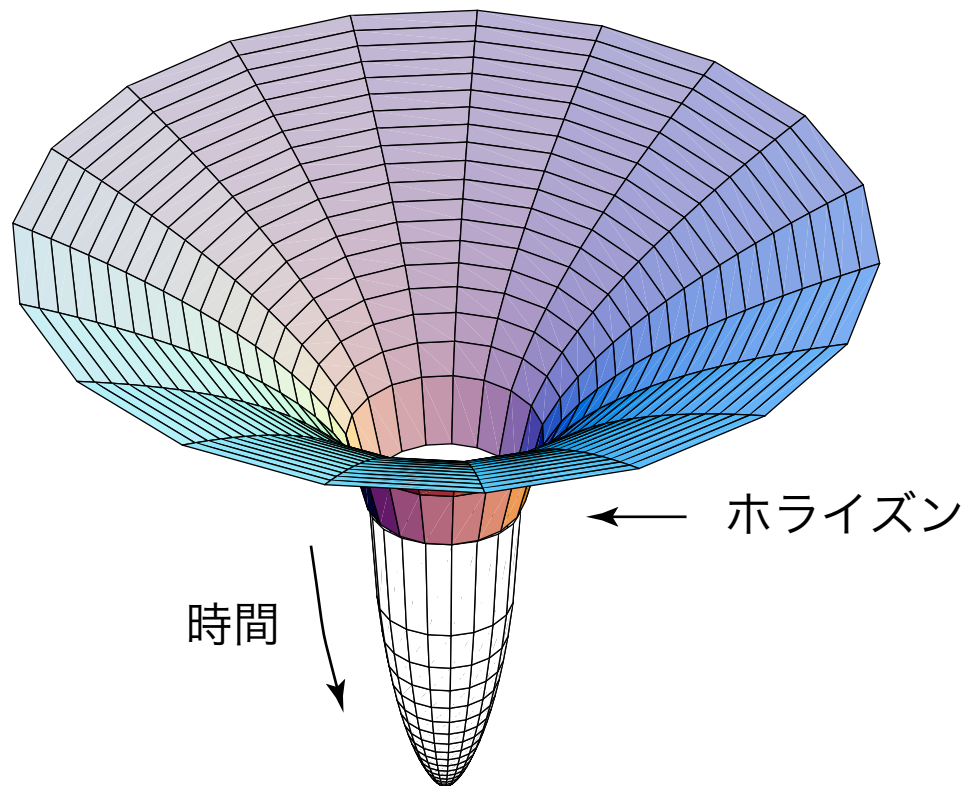


プランク長さより短距離を探ろうとすると、
かえってブラックホールができてしまう

ブラックホール特異点の場合

ブラックホール特異点はこのようなものと大きく違う

ホライズン内部では空間 \leftrightarrow 時間



ブラックホール特異点とビッグバン

ブラックホールの「中心」は時間の終わり

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2$$

$$\rightarrow -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad r \rightarrow \infty \text{ で}$$

$$\rightarrow +\left(\frac{2M}{r} - 1\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\frac{2M}{r} - 1} + r^2 d\Omega^2 \quad r < 2M \text{ で}$$

ブラックホール特異点はビッグバン特異点そのもの

ビッグバン特異点を理解する必要がある

まとめ

- インフォメーション・パラドックス → 量子論が破綻する可能性
- 特異点問題 → 一般相対論が破綻

超弦理論でもまだ未解決の部分が多い。特に現実的なブラックホールは議論できない。

超弦理論で信頼できる解析が可能な時空ではこれらの問題はない。

通常の量子力学で不十分である兆候はない。