

ホログラフィー原理仮説と弦理論

夏梅 誠

1. はじめに

「ホログラフィー原理」は、超弦理論の分野で盛んに議論されている考えである。通常のホログラムは、2次元面に3次元の映像が記録されているが、ホログラフィー原理は

ホログラフィー原理： d 次元の量子重力理論は、1次元低い $(d-1)$ 次元の自由度の理論であらわされる

と主張する。この考えはトホーフトやサスカインドによって提唱されたが¹⁾、いまだ決着のついていない量子重力理論を定式化する上でカギになるかもしれないと考えられている。本稿では、ホログラフィー原理へと至った歴史的な道のりをたどり、その原理の実現例として AdS/CFT 双対性と呼ばれる考えを紹介する。

2. ホログラフィー原理の手がかり 1: ブラックホール・エントロピー

ホログラフィー原理の第一の手がかりは、ブラックホールから得られた。通常のシュワルツシルド・ブラックホールの場合、地平面の半径は^{*1)}

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

*1) 以下では、 $c = \hbar = k_B = 1$ の単位系をおもに使うが、この節ではすべてあらわに書く。

で与えられる。地平面の半径はブラックホールの質量 M に比例するので、物質がブラックホールに落ちこむと地平面の面積 $A = 4\pi r_0^2 = 16\pi G^2 M^2 / c^4$ は増大する。また、古典論的にはブラックホールからはなにも出てこない。したがって、地平面面積は減ることのない量であり、これは熱力学のエントロピーを思い起こさせる。したがって、

$$S_{\text{BH}} \propto A? \quad (2)$$

という関係が推測される。じつは第2法則に限らず、ブラックホールの性質は熱力学の法則と同じ形でまとめることができる(第0~第3法則)。たとえば、

$$dM = \frac{1}{2M} dM^2 \propto \frac{1}{M} dA \quad (3)$$

となるので、 M^{-1} が温度とみなせれば、式(3)は熱力学の第1法則 $dE = TdS$ にほかならない。実際、1974年ホーキングは物質場の量子効果によって、ブラックホールが黒体放射を起こし、その温度は

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM k_B} \quad (4)$$

で与えられることを示した。この温度を使うと、式(3)と同じ議論で S_{BH} の比例係数が求まる:

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4G\hbar} k_B c^3 = \frac{A}{4l_{\text{pl}}^2} k_B \quad (5)$$

$l_{\text{pl}} := \sqrt{G\hbar/c^3}$ はプランク長さと呼ばれる長さの

単位で、重力の量子効果が大きく効きはじめる長さと考えられている*2)。

微視的には、エントロピーは系の自由度を数える尺度である。ブラックホール・エントロピー S_{BH} は何の自由度に相当するのだろうか？ ブラックホールが重力場によって作られることを考慮すると、ブラックホール・エントロピーは重力の自由度を数えていると想像される。しかし、エントロピーは本質的に量子力学的な量であり、エントロピーを正当化するには量子力学が必要である。したがって、ブラックホール・エントロピーを「説明」するには、量子重力が必要ではなく、実際式 (5) に l_{pl} があらわれることから、このことがわかる。

また、ブラックホール・エントロピーの大きな特徴は、それが地平面の「面積」に比例する点である。これに対して統計力学的なエントロピーは、系の「体積」に比例しなければいけない。この違いが、ホログラフィー原理のそもそもの発端である。つまり、量子重力理論は、通常の統計力学系と比べ 1 次元低い次元の自由度をもつことを示唆する。

3. ホログラフィー原理の手がかり 2：強い相互作用と弦理論

ホロフラフィック原理の第二の手がかりは、一見まったく関係のなさそうに思われる分野から来た。ブラックホール熱力学の問題とほぼ同じ頃に発展していた「強い相互作用」の分野である。

陽子や中性子は、クォークと言う、より基本的な粒子からできている。しかし、クォークは通常は陽子や中性子のなかに閉じこめられており、ばらばらに取り出すことはできない。このクォーク同士を結びつけている力が、強い相互作用である。強い相互作用の理論は、量子色力学 (QCD) によって記述される。しかし、強い相互作用は文字通り強い力であり、摂動論の使える領域は限られてお

*2) 現実の 4 次元時空では、 $l_{\text{pl}} \sim 10^{-35}$ メートル 程度である。

り、いまだに QCD を非摂動論的に解くのは困難である。

このため近似手法として提案されたのが、トホーフトのラージ N_c ゲージ理論という考えである*2)。そして、この考えが弦理論と関係し、ホログラフィー原理にもつながる。

QCD によると、強い相互作用の担い手はグルーオンである。グルーオンは、 $SU(3)$ ゲージ対称性をもつゲージ場であり、 $(A_\mu)^a_b$ という具合に添字 (a, b) についての 3×3 行列であらわされる。これを「カラー」の自由度といい、量子色力学の「色」はここから来ている。

ラージ N_c ゲージ理論では、 $SU(3)$ ゲージ理論のかわりに、たとえば仮想的な $U(N_c)$ ゲージ理論を考える。この場合、ゲージ場 $(A_\mu)^a_b$ は $N_c \times N_c$ 行列であらわされる。この理論には、QCD 同様結合定数 g_{YM} があるのだが、とくに $\lambda := g_{\text{YM}}^2 N_c$ を大きな値に固定しつつ、 $g_{\text{YM}} \rightarrow 0, N_c \rightarrow \infty$ という極限をとる操作を「ラージ N_c 極限」と言う。以下みるように、これはノントリビアルな極限である。つまり、この極限で理論は自由場には帰着しない。じつは、有効結合定数が λ であらわされるからである。したがって、 λ が大きいときは、むしろ強結合極限である。

ゲージ場のラグランジアンは、形式的に

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \{ \partial A \partial A + A^2 \partial A + A^4 \} \quad (6)$$

と書ける。このようなラグランジアンから、場の理論を使って振幅を求めるためのファインマン・ルールが導けるが、ルールだけをまとめると以下のようになる：

- ゲージ場を矢印付きの二重線で書く (“double-line notation”)。各線が行列の「足」をあらわし、全体として矢印の向きが保たれるようにダイアグラムを書く。
- 二重線に λ/N_c の因子を付与する。
- 相互作用をあらわす「頂点」*3)には、 N_c/λ の

*3) 図 1 ではグレーの丸であらわした。なお、以下ではダイアグラムの λ と N_c の因子にだけに注意し、「外線」をもたない「真空ダイアグラム」だけを考える。

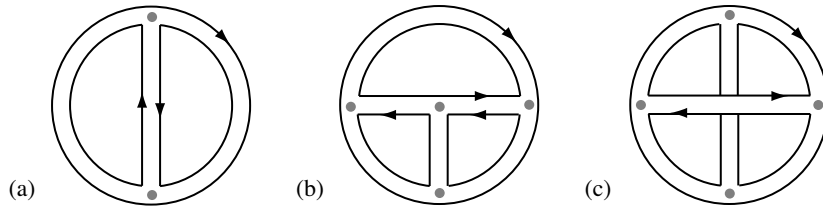


図 1 真空ダイアグラムの例 . (a), (b) はプラナーなダイアグラムで , (c) は非プラナーなダイアグラム .

因子 .

- 「ループ」には N_c の因子 (N_c の自由度があるため) .

このため , 頂点の数を V , 二重線の数を E , ループの数を F とすると ,

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^V \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^E N_c^F \sim \lambda^{E-V} N_c^{V-E+F} \quad (7)$$

となる . たとえば , 図 1a のダイアグラムは $(V, E, F) = (2, 3, 3)$ なので

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^3 N_c^3 = \lambda N_c^2 . \quad (8)$$

図 1b のダイアグラムは $(V, E, F) = (4, 6, 4)$ なので

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 N_c^4 = \lambda^2 N_c^2 . \quad (9)$$

したがって , これらのダイアグラムは形式的に

$$(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) N_c^2 = f_0(\lambda) N_c^2 \quad (10)$$

という形にまとまる .

しかし , ダイアグラムはいつも式 (10) の形をとるわけではない . たとえば , 図 1c のダイアグラムは $(V, E, F) = (4, 6, 2)$ なので

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 N_c^2 = \lambda^2 \quad (11)$$

となる . 図 1a, b のようなダイアグラムをプラナー (planar) といい , 図 1c のようなダイアグラムを非プラナー (non-planar) という . プラナー (非プラナー) とは , 平面上に書ける (書けない) という意味である . 非プラナーのダイアグラムも含めると , ダイアグラムは

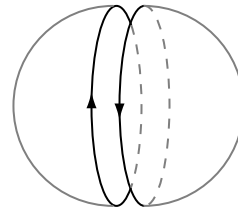


図 2 ダイアグラムと 2 次元面の関係 .

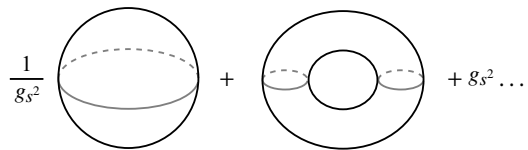


図 3 弦理論のダイアグラムも , 摂動論的にはリーマン面の足しあげとしてあらわされる . 球は古典重力 , トーラスは重力の 1 ループに相当する .

$$f_0(\lambda) N_c^2 + f_1(\lambda) N_c^0 + f_2(\lambda) \frac{1}{N_c^2} + \dots \quad (12)$$

という形にまとまる . ラージ N_c 極限では , 式 (12) の第 1 項 , プラナー・ダイアグラムが支配的になる .

ダイアグラムが平面上 (あるいは球面上) に書けるかどうかで , ラージ N_c 極限で支配的になるかどうかが決まるというのは , ダイアグラムとトポロジーの関係を示唆する . 実際 , 図 1c はトーラス上には書くことができる*4) .

一般には次のように考える . 今 , 二重線を辺として , ループを面で埋めると , 2 次元面ができる (図 2) . つまり , 2 次元面を (頂点で交わる) 辺で分割した図形ができる . こう考えた場合 , 二重線の数 E , ループの数 F は , それぞれ 2 次元面の

*4) これを絵に描くのは , 筆者の画力に余るし , 見にくい絵になるだけである . 読者自らが絵を描いてみるか , 実際にハンドルをもつ物体上にダイアグラムを描いてみるのがいい .

辺の数、面の数という意味をもつ。しかし、2次元面としてみた場合、式(7)にあらわれる N_c のべきはオイラー標数 χ であり、トポロジカル不変量である：

$$\chi = V - E + F. \quad (13)$$

たとえば、球は $\chi = 2$ 、トーラスは $\chi = 0$ である。ハンドル数(ジーナス)を g とすると、 $\chi = 2 - 2g$ と書くこともできる。

したがって、ダイアグラムが2次元面のトポロジーの足しあげとしてあらわされることになる。じつは弦理論の摂動展開も、2次元面のトポロジーの足しあげとしてあらわされる(図3)。

本稿では弦理論について詳しく説明することはできないが、弦理論の基本的な物体は粒子ではなく、ストリングである。粒子が時間とともに時空中で世界線を掃くように、ストリングは時空中で2次元面、世界面を掃く。このため、弦理論では摂動展開は2次元面の足しあげとしてあらわされる。図3中の g_s はストリングの相互作用の強さをあらわす結合定数である。また、ストリングには、端のあるストリング(開弦)と端のないストリング(閉弦)がありうるが、このうち閉弦は重力をあらわすことが知られている。したがって、閉じた2次元面の足しあげは、重力の摂動展開に相当する。

以上のことから示唆されるのは「ラージ N_c ゲージ理論は弦理論であらわされ、特にラージ N_c 極限では(弦理論が記述する)古典重力であらわされる」という結論である。これは驚くべき結論である。もともとの理論はゲージ理論であり、重力を含まないのに、特別な場合には重力理論であらわされると主張しているからである。

なお、オイラー標数 χ の2次元面に対し、ストリングの結合定数は $1/g_s^\chi$ の形であらわれる。これは N_c のべきの形と同じである。また、 g_s^2 は重力の相互作用の強さでもあるので、ニュートン定数 G と $G \propto g_s^2$ の関係にある。したがって、これらのパラメーターには

$$g_s^2 \propto G \propto \frac{1}{N_c^2} \quad (14)$$

という関係がつく。

ところが、弦理論を矛盾なく量子化するには、高次元時空が要求されることが知られている。ローレンツ対称性 $SO(1, d-1)$ を仮定すると、ボゾンだけを含んだ弦理論の場合は $d = 26$ 、フェルミオンも含んだ弦理論の場合は $d = 10$ が要求される。4次元時空だけの弦理論は無矛盾ではない。つまり、

- ゲージ理論によると、ラージ N_c ゲージ理論は弦理論であらわされると主張するが、
- 一方、弦理論はそもそも4次元の理論として成立しない。

この2つのステートメントは相いれないように聞こえる。

この2つのステートメントが実際には矛盾していないことに気づくには、弦理論は重力も含めた理論であることを認識する必要がある。すなわち、弦理論は平坦な時空だけではなく、曲がった時空を解としてもつはずである。そのような曲がった時空を考えることでゲージ理論をあらわすことができるかもしれない。そして、この曲がった時空自体は高次元時空でも構わない。この時空が $SO(1, d-1)$ 対称性ではなく、 $SO(1, 3)$ 対称性しかもたなければ、平坦な4次元の理論として解釈できるからである。この目的のためには、時空の次元として最低限5次元が必要であり、5次元目の方向が曲がっていることになる。

したがって、ここまでにわかったことをまとめると、

ラージ N_c ゲージ理論は、4次元時空のローレンツ対称性 $SO(1, 3)$ をもつ5次元の曲がった時空であらわされる。

4次元のゲージ理論が5次元の曲がった時空としてあらわされるということは、逆に言えば5次元の曲がった時空が1次元低い理論であらわされるということである。こうして、やはりホログラフィー原理を示唆する手がかりが出てきた。

4. ホログラフィー原理実現の一例: AdS/CFT 双対性

ラーズ N_c ゲージ理論と曲がった時空の関係については、前節の最後に述べたことまではわかっていたが、それ以上の具体化は困難だった。すなわち、弦理論があらわすゲージ理論が何なのかははっきりしなかった。つまり、それは QCD に近い理論なのか、それとももっと違う振るまいをする理論なのか、はっきりしない。また、ゲージ理論があらわす曲がった時空についてもはっきりしなかった。 $SO(1, 3)$ 対称性を持つ曲がった時空といっても、それだけでは時空を絞りこむことができない。

しかし 1997 年「AdS/CFT 双対性」という考えにより、これらの問題が一挙に解決し、具体的なゲージ理論と曲がった時空が同定された³⁾。まず、弦理論があらわすゲージ理論は^{*5)}

$$\mathcal{N} = 4 \text{ 超対称ゲージ理論}$$

つぎに、弦理論が住む曲がった時空は

$$5 \text{ 次元反ド・ジッター時空と } S^5 \text{ の直積}$$

反ド・ジッター時空 (anti-deSitter space)^{*6)} は、負の宇宙定数をもつアインシュタイン方程式の解で、一様な負の曲率をもつ時空である。この時空は以下の計量で与えられる:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2}.$$

L は AdS 長さと呼ばれる長さのスケールで、宇宙定数から決まる。この形から明らかなように、この計量は $x^\mu = (t, x, y, z)$ に対する $SO(1, 3)$ 対称性を持つ。これが 4 次元時空のローレンツ対称性に相当し、したがって x^μ がゲージ理論の 4 次元部分をあらわす。

この AdS/CFT 双対性で、ブラックホール・エントロピーの問題に戻ってみよう。AdS₅ 時空にも

*5) $\mathcal{N} = 4$ はこのゲージ理論が持つ超対称性の数をあらわす。 $SU(N_c)$ ゲージ対称性の N_c ではないことに注意。

*6) 以下、AdS₅ と略。なお、紙面の都合から、AdS₅ 時空と $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論のくわしい説明も、この 2 つが対応する根拠も本稿では省略することにする。

ブラックホールが存在する。その場合、ブラックホールの地平面は (x, y, z) 方向に伸びている。したがって、5 次元ブラックホール・エントロピーは (x, y, z) 方向の「面積」に比例する。一方、4 次元のゲージ理論は通常の統計力学系であり、そのエントロピーはやはり (x, y, z) 方向の「体積」に比例する。このように、ブラックホールが 5 次元時空にいるからこそ、ブラックホール・エントロピーが 4 次元の統計力学的なエントロピーとして自然に解釈できるのである。

具体的には、弱結合で $\mathcal{N} = 4$ 理論のエントロピー S_{free} は計算でき、ブラックホール・エントロピーと

$$S_{\text{BH}} = \frac{3}{4} S_{\text{free}} \quad (15)$$

という関係になっている。 $3/4$ というファクターはブラックホールの計算、すなわち AdS/CFT での計算がラーズ N_c 極限であり、弱結合ではないことに起因していると考えられる。すなわち AdS/CFT によると、 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論のエントロピーは、強結合で弱結合の $3/4$ になることも予言している。

5. 残された問題と歴史的な寄り道

以上のように、AdS/CFT はホログラフィー原理を実現しており、またゲージ理論と弦理論の関係が解決した。しかし、問題のすべてが解決したわけではない。

第一に、ゲージ理論と曲がった時空の立場から残った問題は、QCD に近い理論に対応する曲がった時空は何かである。AdS/CFT が関係づけるゲージ理論は、 $\mathcal{N} = 4$ 理論やその「親戚」であり、じつは QCD とは大きく性質が異なっている。とは言うものの、 $\mathcal{N} = 4$ 理論と QCD は場合によっては似た振るまいをすることが明らかになっており^{*7)}、クォーク・グルーオン・プラズマの性質を理論的に解明するために、近年盛んに用いられている^{5, 6)}。

*7) 例えば、格子数値計算によると、 $SU(3)$ ゲージ理論のプラズマのエントロピーも、式 (15) に近い振るまいをする。

第二に、ホログラフィー原理の立場から残された大きな問題は、いかなる量子重力理論も AdS/CFT のようにホログラフィー的にあらわされるかという点である。AdS/CFT では、ブラックホールと言っても、AdS 時空という特殊な時空を使っている。シュワルツシルド・ブラックホールのような漸近的平坦なブラックホールに対してもホログラフィーによる記述が可能なのか、可能であればホログラフィーは何か、それは我々の知っている通常の統計力学系なのか、などが問題である。

最後に、このような解説ではやや異例かもしれないが、本特集の趣旨から、あえて歴史的なコメントをしておきたい。3 節での結論は、1990 年代初めにはおそらく多くの人々のあいだで共有されていたと思われる。さらに歴史をひもとくと、このような考えは、少なくとも 1981 年のポリャコフの論文にまで遡ることができる⁷⁾。にもかかわらず、なぜ AdS/CFT が提唱されるのに 1997 年まで待たなければいけなかったのだろうか？

まず理由としてあげられるのは、3 節で述べた手がかりだけでは、実際に一組の曲がった時空とゲージ理論を選び出すのは難しい点である。また、今回触れなかったが、AdS/CFT を議論するためにはならない「D ブレーン」と呼ばれるテクニックも当時は存在していなかったし、ポリャコフの論文のときは超弦理論すらまだ存在していなかったくらいである。これらが 1 つ大きな理由だったのは間違いない。事実、D ブレーンが注目を集めたのは 1995 年だったが、わずか 2 年後に AdS/CFT は提唱された。

しかし、1990 年代初めごろの私自身の心境を思い出してみると、当時はこの対応を十分真剣には捉えていなかったと言わざるをえない。弦理論が近似的にゲージ理論を記述する点については疑う余地はない。しかし、弦理論と 4 次元のラージ N_c ゲージ理論が厳密に対応するという意識が多くの人々にあったとは思えない。そういった雰囲気のおかげで、ポリャコフはこの問題を(よい意味で)執念深く考え続けた一人だったのだろう。AdS/CFT には「GKP-ウィッテン関係式」として知られる重

要な式がある⁴⁾。「GKP」は共著論文を書いた 3 人の頭文字なのだが、「P」がポリャコフである。ポリャコフの名が、このように AdS/CFT に刻まれたのは、誠に適切なことだと思う。

私たちの誤りはわれわれの理論をあまりに真剣に受け取ることではなくて、われわれの理論を充分真剣に受け取らないことである。

ワインバーグ⁸⁾

本稿執筆にあたり、原稿を読んでいただいた岡村隆氏(関西学院大学)、太田昌宏氏(総合研究大学院大学)に感謝します。

参考文献

- 1) G. 't Hooft, gr-qc/9310026; L. Susskind, J. Math. Phys. **36** (1995) 6377. [hep-th/9409089].
- 2) G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **72** (1974) 461.
- 3) J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200].
- 4) E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253 [arXiv:hep-th/9802150]; S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428** (1998) 105 [arXiv:hep-th/9802109].
- 5) 夏梅誠, 数理科学 2006 年 7 月号; 数理科学 2008 年 2 月号; 日本物理学会誌 2007 年 9 月号.
- 6) 夏梅誠, 別冊数理科学(近刊).
- 7) A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **103** (1981) 207.
- 8) スティーヴン・ワインバーグ『宇宙創成はじめの三分間』(ダイヤモンド社, 1977 年).

(なつうめ・まこと, 高エネルギー加速器研究機構)