

ブラックホールとクォーク・グルーオン・プラズマ

夏梅 誠

2005年5月、フロリダで開かれたアメリカ物理学会の会議で、ブルックヘブン国立研究所でおこなわれていた実験結果が報告されました。この研究所には、相対論的重イオン衝突型加速器 RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) と呼ばれる加速器があり、金原子核のような重イオンを高エネルギーで衝突させる実験をしています。陽子や中性子は、クォークやグルーオンといったより基本的な粒子からできています。しかし、通常は陽子のなかなどに閉じこめられており、ばらばらに取り出すことはできません。しかし、高温・高密度ではクォークは自由になり、一種のプラズマになると期待されています(クォーク・グルーオン・プラズマ)。RHICは、このプラズマを実現するための実験です¹⁾。

この報告では、興味深いことに超弦理論についてふれられました:「超弦理論と RHIC 実験の間の予期せぬ関係には心が躍った」大きな実験の報告で、超弦理論が言及されたのはおそらくはじめてではないでしょうか。そこで、ここではクォーク・グルーオン・プラズマと超弦理論の関係について書いてみたいと思います。

なお、ここでこの話を紹介したいのは、ほかにもわけがあります。1つは、この話題が素粒子論のみならず、素粒子実験や原子核物理学、物性物理学など幅広い分野の方々に興味を持っていただけるかもしれないという点です。そして、もう1つは、超弦理論の近年の発展「AdS/CFT 対応」

を学ぶうえで、この話題は教育的だと思っているからです。

1. 超弦理論の初歩

超弦理論での基本的な物体は、伸び縮みするきわめて小さい長さのストリングです(図1)。このストリングはきわめて小さく、 10^{-34} メートル程度と考えられています。これに対して、現在実験で「見る」ことができる長さはせいぜい 10^{-17} メートル程度にすぎません。このため巨視的にはストリングは素粒子とみなせます。

しかし、どんなに小さくても、ストリングと粒子には決定的な違いがあります。それは「ストリングは振動できる」という点です。そしてこの点こそが、超弦理論の利点です。素粒子論ではさまざまな素粒子が登場します。超弦理論では、これらの素粒子はすべてストリングという一つの物体で統一的に理解されます。ストリングはいろいろな形で振動できますが、さまざまな素粒子はストリングのさまざまな振動として解釈します。

具体的にストリングの振動の様子を見てみましょう。まず開弦の振動を考えてみます。図2は、開弦の一番単純な振動をえがいたものです(4次元時空の場合)。ストリングは振動していますが、振動する方向には2つあります。超弦理論ではこれは光子(ゲージ理論)をあらわします。光も2つの振動状態からできているからです。これは偏光

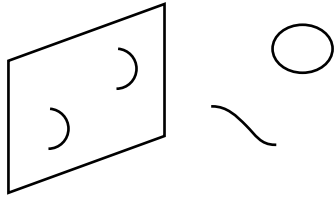


図 1 超弦理論のおもな登場人物. 端のあるストリング (開弦) とループ状のストリング (閉弦). 開弦は, D プレーンと呼ばれる物体上に端点をもつこともできる.

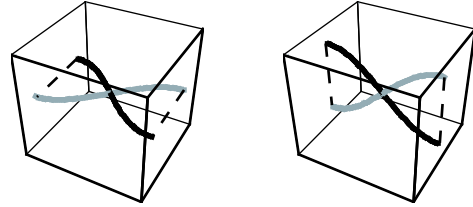


図 2 開弦のもっとも単純な振動. 太線の開弦が半周期後にグレーの線の形を取る. 「箱」は単に 3 次元での振動を見やすくするために描いたものである.

フィルターを使えばわかります (図 3). (偏光していない) 光を一枚の偏光フィルターに通しても, 光は完全には遮断されません. しかし, 向きが 90° 違うフィルターを 2 枚使えば光は完全にブロックされます. 2 つのフィルターでそれぞれの振動状態がブロックされるからです.

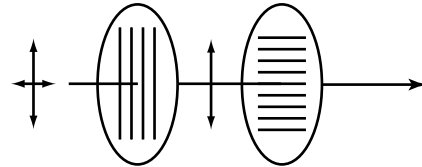


図 3 光に 2 つの状態があることは, 偏光フィルターを 2 枚使って確かめることができる.

では, 閉弦はどんな粒子をあらわしているのでしょうか? 進行波の進む方向には, 時計回りと反時計回りの 2 通りがあります (図 4). 端がある場合, 端でこの 2 つは混じりあってしまいます. しかし, 閉弦では端がないので, この 2 つは独立です. このため, たとえば時計回りの波を上下方向に振動させて, 反時計回りの波はそれとは違う方向に振動させることができます. つまり, 閉弦は, 同時に 2 つの方向に振動できます.

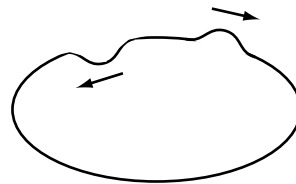


図 4 閉弦では, 2 つの独立な進行波がある. これはグラビトンのもつスピン 2 の性質と一致する.

これは, ちょうど重力波の性質と一致します. 重力波の「偏光」については, ややなじみが薄いかもしれませんが, 重力波も同時に 2 つの方向に振動しており, この性質をスピン 2 といいます. (正しくは, グラビトンと, 未発見のスカラー粒子, デイラトンとアクシオンをあらわします. 光の場合, 振動の可能性は 2 通りでした. 今の場合, それぞれの進行波が 2 通りの方向に振動できます. したがって, 合計すると 4 通りの振動があります. グラビトンの自由度は 2 つなので, 2 つのスカラー粒子とあわせ, 粒子の描像でも合計して 4 つの自由度があることとなります.)

弦なので, やはりゲージ理論をあらわします. ただ, ストリングは D プレーンから遠くには行けないので, このゲージ理論は D プレーン上にあることとなります.

D プレーンは, 何枚か重なりあうこともあります. すると, 開弦は D プレーン上に端点をもちますが, 端点を別々の D プレーン上に置くことができます. このあらたな自由度は, この場合のゲージ理論が電磁場のような $U(1)$ ゲージ理論ではなく, $SU(N)$ ゲージ理論をあらわすことを意味します (図 5).

さて, 超弦理論には D プレーンと呼ばれる物体が存在します. これは, 端点が固定されているような開弦です. 端点が固定されていてもこれは開

2. D プレーンとブラックホールの関係

一般相対論によると, いかなるエネルギーも時

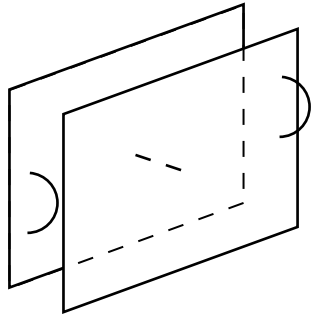


図5 Dブレーンが N 枚あると, $SU(N)$ ゲージ理論になる.

空を曲げる効果があります. Dブレーンがあると, 時空はどうなるのでしょうか? 重力はニュートン・ポテンシャル

$$\phi_{\text{ニュートン}} \sim \frac{GM}{r} \quad (1)$$

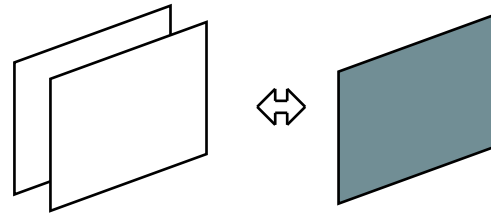
であらわされるので, 重力の強さを GM で測ることができます. ニュートン定数 G とDブレーンの質量 M は, 超弦理論ではそれぞれ

$$G \sim g_s^2 \quad (2)$$

$$M \sim N/g_s \quad (3)$$

となります (g_s はストリング同士の相互作用の強さをあらわす結合定数, N はブレーンの枚数). したがって, $GM \sim g_s N$ となります. このことから, 結合定数が $g_s N \ll 1$ を満たすほど十分小さいとき, 重力の効果は無視できます. Dブレーンは, 無限に重いにもかかわらず, 時空を曲げることはないという結論になります. したがって, このときDブレーンはただのゲージ理論を使ってあらわすことができます.

一方, $g_s N \gg 1$ のときは, Dブレーンは時空を大きく曲げはじめ, しまいにはブラックホールになってしまいます. だから, このときはDブレーンをブラックホールによってあらわすことができます. もっとも, ここでできるブラックホールは, ふつうのシュワルツシルド・ブラックホールではありません. Dブレーンは無限に広がっているので, この場合のブラックホールも無限に広がったものです.



$$g_s N \ll 1$$

$$g_s N \gg 1$$

図6 ゲージ理論は強結合で (無限に広がった) ブラックホールとして記述される.

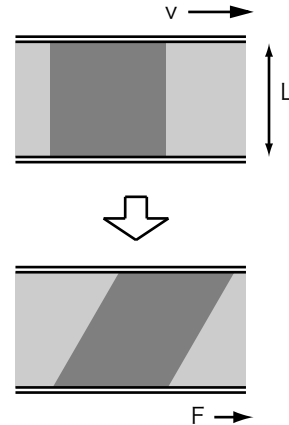


図8 上の板を動かすと, 粘性によって流体全体が引きずられる. このため下の板にも力がかかる.

つまり, 相互作用の大きさによって, ゲージ理論とブラックホールを対応づけることができます (図6). ここでの議論をより正確にしたものは, 「AdS/CFT 対応」として知られています²⁾.

3. ゲージ理論プラズマの流体力学的記述

ブラックホールにモノを落とすと考えてみましょう. すると, しばらくの間, ブラックホールの形は不規則になりますが, 最終的にはもとの対称的なブラックホールに戻ります.

このブラックホールのふるまいは, 流体と似ています (図7). たとえば, 池にボールを落とすとき波が立ちますが, やがて止んでもとの静かな水面に戻ります. 流体の場合, これは粘性による散逸です.

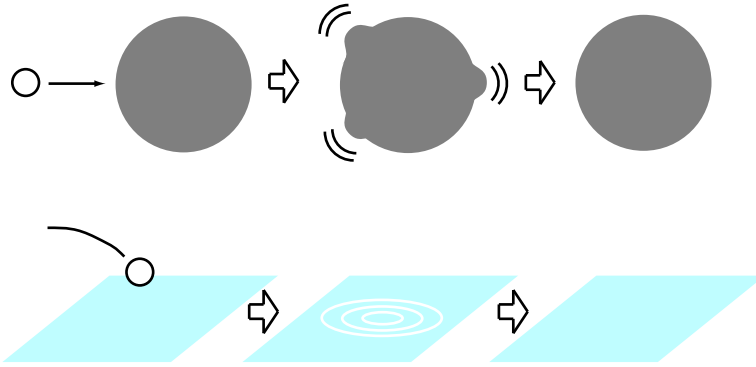


図7 摂動を与えたとき、ブラックホールのふるまいは流体力学のふるまいとよく似ている。流体力学では、これは粘性の効果である

そこで粘性について、簡単におさらいしておきましょう (図 8)。今2つの板の間に流体があるとして、上の板を動かします。すると、流体全体が引きずられ、下の板にも力がかかります。この力こそ粘性の効果です。今の場合、下の板にかかる単位面積あたりの力は、上の板を動かす速度に比例し、流体の厚みに反比例します：

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{L} \quad (4)$$

比例係数 η を「ずり粘性率」と言います。

したがって、ブラックホールについても「粘性」という概念が考えられそうです。しかし、ブラックホールというのは時空そのものの性質のことで、実際には粘性などもたないはずで、一体、ここで言う粘性とはなんのことでしょう？

2つの可能性があります (おたがい相容れない解釈ではなくて、なんらかの関係があるのかもしれない)。1つめは「メンブレン・パラダイム」を使ったものです。この考えによると、ブラックホールの地平面をあたかも物理的なメンブレンのようにあつかうことができます。したがって、粘性をこのメンブレンがもつ粘性とみる事ができるでしょう。

2つめの解釈は、近年の超弦理論の発展から生まれた解釈です。さきにみたように、ゲージ理論とブラックホールには対応関係があります。だから、この粘性とは、対応するゲージ理論プラズマの粘性を測っている、と解釈することができます。

したがって、この解釈によると、ブラックホールを使ってプラズマの粘性が計算できることになります。

では、具体的にどうやってプラズマの粘性が計算できるのでしょうか。まず、大ざっぱな説明をしてその帰結について考えることにします。そのあとで、より詳しく説明することにします。

3.1 粘性率の導出 (大ざっぱなもの)

流体力学では、散逸は粘性の効果です。一方、ブラックホールの立場では、散逸はブラックホールにエネルギーが吸い込まれることによって起こります。したがって、ブラックホールの場合、この散逸はブラックホールへの吸収断面積であらわされるでしょう。(いま、ブラックホールへ粒子が単位面積・単位時間あたり1個入射するとします。一般に断面積とは、この時間内に粒子が吸収されたり反応する確率のことです。)

この吸収断面積は、多くのブラックホールの場合で地平面の面積 A になります。^{*1)}したがって、

$$\eta \propto \sigma_{\text{BH}}(\omega \rightarrow 0) = A \quad (5)$$

となるでしょう。ところで、地平面の面積と言えどブラックホールの分野では有名で、これはブラックホールのもつエントロピー S_{BH} をあらわしています：^{*2)}

*1) 簡単な場合として、シュワルツシルド・ブラックホールに粒子を落とす場合もそうなります。正確には式にあるように、低エネルギー極限 $\omega \rightarrow 0$ の場合です。

*2) 本稿では、光速 $c = 1$ の単位系を使います。

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4G\hbar} k_B \quad (6)$$

(k_B はボルツマン定数)。ということは、ずり粘性率をエントロピー^{*3)}でわったものは、定数になります。定数部分は、あとでする議論から決めることができます

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B} \quad (7)$$

となります。これはきわめて低い値です。ちなみに、通常の条件下で、水はこの値の 3×10^3 倍ほどの η/s をもちます。

注目すべき点は、ここで使った各種の関係（エントロピーと地平面の面積など）はかなり一般的に成り立つという点です。したがって、この結論も一般に成立する、ゲージ理論の詳細によらないと考えられます。

実際にブラックホールでずり粘性率を計算できるゲージ理論は、超対称ゲージ理論の場合です。現実的な QCD ではありません。なぜなら、QCD に対応するブラックホールがどのようなものかはまだわかっていないからです。しかし、上でみたように η/s の値が普遍的だとすると、超対称ゲージ理論による結果をただちに QCD にも適用できることとなります。したがって、実験と比較することができます（図 9）。結局、この主張をまとめると、

「ブラックホールと対応関係があるゲージ理論プラズマは、強結合で普遍的な小さいずり粘性率をもつ（ただしゼロ化学ポテンシャルの場合）^{*4)}」

ということになります³⁾。

たしかに RHIC によると、実験できわめて小さい粘性をもつプラズマができています。そしてその値は、超弦理論からの値とよ

*3) 正確にはエントロピーではなく、エントロピー密度になります（ブレーンの単位体積あたりのエントロピー）。いま考えているブラックホールは無限に広がっているので、地平面の面積（エントロピー）自体は無限です。吸収断面積で出てきた面積も、同様の意味です。

*4) 化学ポテンシャルがゼロの場合に制限されるのは、ここでは触れなかったややテクニカルな仮定のせいです。

く一致しているようです。実験との比較という点で、1つ考慮に入れておきたいのは、RHIC でプラズマができていても、その温度はせいぜい QCD スケールのオーダーです。この領域では、QCD はまだまだ強結合で自由ガスようにはなっていません。したがって、強結合の結果を予言する超弦理論が注目されているわけです。

3.2 粘性率の導出（より正確なもの）

粘性と吸収断面積の関係を、もっとくわしく議論することにしましょう。そのためには、まずストリングの相互作用について考えておく必要があります。

閉弦は、端が切れて開弦になることができます。重力（閉弦）はあらゆるエネルギーと結合し、もちろんゲージ場（開弦）とも相互作用するからです。Dブレーンの場合で考えると、Dブレーンにやってきたグラビトンがブレーン上でゲージ場に崩壊することを意味します（図 10）。このようなグラビトンの崩壊確率、または相互作用の断面積 σ_{QFT} は、場の理論の公式を使って求めることができます：

$$\sigma_{\text{QFT}} = \frac{8\pi G}{\hbar\omega} \int d^4x e^{i\omega t} \langle [T_{xy}(t, x), T_{xy}(0, 0)] \rangle \quad (8)$$

式の詳しい説明は省きますが、 T_{xy} はゲージ理論のエネルギー運動量テンソルです。このテンソルが出てきたわけは、グラビトンが結合するのはこのテンソルだからです。^{*5)}

一方、Dブレーンはブラックホールとしても記述することができました。この場合、グラビトンの崩壊とはブラックホールへの吸収断面積 σ_{BH} に他なりません（図 10）。したがって

$$\sigma_{\text{BH}} = \sigma_{\text{QFT}} \quad (9)$$

となります。このことは、ブラックホールの物理量（左辺）とゲージ理論の物理量（右辺）が結びついたことを意味します。（ただし注意が必要です。ブラックホールは、ゲージ理論で言えば強結合に相当するので、この式 (9) は強結合での関係式です。

*5) この式は「光学定理」の一種とみることができます。

しかし、ゲージ理論ではふつう弱結合の場合しか計算できません。このため、この関係式を実際に証明することは困難です。特別な理論、 $N = 4$ 超対称ゲージ理論では（ゼロ温度の場合）、この関係が成立していることがわかっています⁴⁾。これは超対称理論の「非くりこみ定理」によるものです。ここでは、この関係がゲージ理論の強結合で一般的に成立すると仮定します。）

ところで、ずり粘性率は久保公式から求められます。上の式は久保公式とそっくり同じ形をしています：

$$\eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\hbar\omega} \int d^4x e^{i\omega t} \langle [T_{xy}(t, x), T_{xy}(0, 0)] \rangle \quad (10)$$

このことから、ずり粘性率と吸収断面積のあいだに次のような関係が成り立つことになります：

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{BH}}(\omega \rightarrow 0)}{16\pi G}. \quad (11)$$

こうして、プラズマの量をすべてブラックホールの量で書くことができました。式 (5), (6) を使えば

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\frac{A}{16\pi G}}{\frac{A}{4G\hbar} k_B} = \frac{\hbar}{4\pi k_B} \quad (12)$$

となり、さきほどの式 (7) となります。

ここで考えたストリングの相互作用は、Dブレーンにやってきたグラビトンがブレーン上のゲージ場に崩壊するプロセスでした。これを一般的に「バルクの場のゆらぎが、境界の場のソースとなる」と言いかえることもできます。^{*6)} この関係を推し進めたものは「GKP-Witten 関係式」として知られ、事実上 AdS/CFT 対応の定義となっています。

4. 粘性率限界

これまで考えてきたプラズマは、相対論的なプラズマでした。しかし、彼らは非相対論的な場合でも、流体のずり粘性率はつねに式 (7) より大きいと予想しています。図 11 はいくつかの流体に

^{*6)} 「バルク」とは時空全体のことで、Dブレーンが作る「境界」と対をなす言葉です。

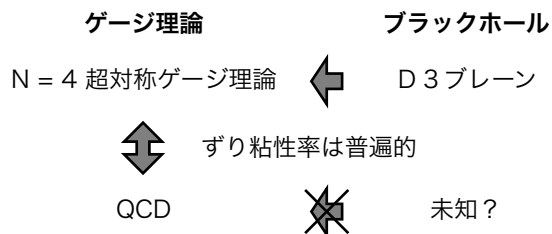


図 9 Dブレーンで議論できるゲージ理論は、超対称ゲージ理論であり、現実的なものではない。しかし、ブラックホールの議論から、ずり粘性率は普遍的であると考えられるので、超対称ゲージ理論の結果が現実のゲージ理論でも成り立つと考えられる。

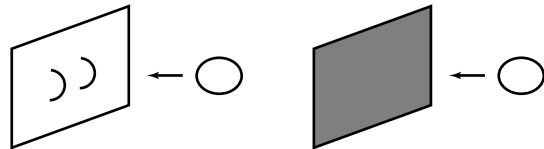


図 10 場の理論の断面積 (図左) とブラックホールの吸収断面積 (図右) は一致する。

ついて、 η/s をえがいたものです。これからわかるように、これらの流体はたしかにこの限界を満たしているようです。

実際、このような制限の存在は簡単な議論からもわかります。ずり粘性率とエントロピー密度は、一般に次のようになります：

$$\eta \sim \rho \bar{v} l_{\text{mfp}}, \quad s \sim \frac{\rho}{m} \quad (13)$$

(ρ : 質量密度, \bar{v} : 流体を構成する粒子の平均速度, l_{mfp} : 平均自由行程, m : 粒子の質量). すると粘性率制限 $\eta/s > \hbar$ は、平均自由行程が粒子のド・ブローイ波長より長くなければいけないという制限です。ふつうの流体は粒子描像が成り立つので、たしかにこうなっているでしょう。

勘違いしやすいのが、ヘリウム4の場合です。ヘリウム4は超流動を起こし、その粘性はゼロと思っている人も多いかもしれません。しかし、二流体理論によると、ヘリウム4は常流体部分と超流体部分からできています。(超流体部分は凝縮を起こしていますが、常流体部分は温度によるゆらぎをあらわし、ふつうの擬粒子描像が成り立ちます。有限温度ではつねに常流体部分があります。) この常

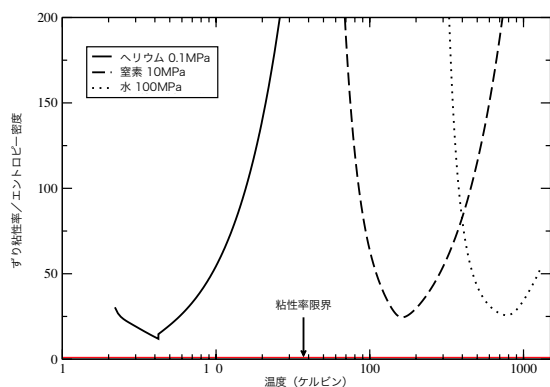


図 11 いくつかの流体についての $\eta/s, \hbar/(4\pi k_B)$ を 1 とした. 文献 3) に基づく.

流体部分は有限の粘性をもちます. このため, 全体としてヘリウム 4 の粘性はゼロにはなりません.

とは言え, この限界の成立については, きちんとした物性物理学からの研究が望まれます.

5. 多くの課題

このようにゲージ理論の流体力学的記述は強力なものですが, 多くの問題点もあります. とくに, ブラックホールとゲージ理論の関係 (9) は, 特別な場合でしか確かめられていません.

実験の立場から言ってもっとも重大な制限は, この議論が化学ポテンシャルゼロの場合にしか使えないことです. 現実の実験は原子核同士を衝突させるので, 有限のバリオン数密度をもっています. 化学ポテンシャルがある場合に, ずり粘性率がどうなるかはよくわかっていません. そもそも, 今のような議論でバリオンをどう実現すればいいのかさえ, あまり有力な考えはありません.

とりあえず化学ポテンシャルを実現する 1 つの方法は, ブラックホールに電荷を与えることです. ブラックホールは, 熱力学とそっくりな法則に従います. その第 1 法則は

$$dM = TdS_{\text{BH}} + \Phi dQ \quad (14)$$

となります (T : ブラックホールの温度, Q : 電荷, Φ : 電磁場のポテンシャル). この法則をみると, 電磁場がまさに化学ポテンシャルの働きをすることが読み取れます.

この場合の化学ポテンシャルは, 現実的なものではありません. ゲージ理論の立場からすると, これは超対称電荷間を変換する $U(1)_R$ 電荷に相当します. しかしこの場合で, 非閉じこめ相転移の様子を調べてみると, 相図は QCD のものとよく似ていることがわかっています. ですから, このような場合を調べることで, 現実的な有限密度の場合についても知見が得られる可能性があります.

このようなブラックホールについての η/s が, 最近 4 つのグループによって独立に計算されました⁵⁾. 結果は, 化学ポテンシャルがないときと同じ答え, $\eta/s = 1/(4\pi)$ となりました. したがって, 式 (7) は化学ポテンシャルがあるときも成り立つ可能性が高くなっています.

本稿執筆にあたり, 共同研究者の関西学院大学の岡村隆氏と神戸市立工業高等専門学校の前田健吾氏, ハドロン物理の立場から議論につき合っていたいただいた KEK の板倉数記氏, 森松治氏に感謝します. 以上の方々には原稿も読んでいただき, 示唆に富むコメントをいただきました.

参考文献

- 1) RHIC 実験についての初等的な解説は, たとえば M. ムカジー「ビッグバン直後を再現する」日経サイエンス 1999 年 6 月号; T. Schaefer, “The RHIC gold rush,” Physics World 2003 年 6 月号; 松井哲夫「古くて新しい物質相 クォーク・グルオンプラズマ」数理科学 2001 年 3 月号; T. ラドラム, L. マクラレン「相対論的重イオン衝突加速器からなにを学んだか?」パリティ 2004 年 9 月号.
- 2) AdS/CFT 対応についての初等的な解説は, たとえば J. マルダセナ「重力は幻なのか?」日経サイエンス 2006 年 2 月号; 今村洋介「重力でゲージ理論を調べる」日本物理学会誌 2000 年 3 月号. より本格的なレビューは, O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, Phys. Rept. **323** (2000) 183 [arXiv:hep-th/9905111].
- 3) P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 111601 [arXiv:hep-th/0405231].
- 4) I. R. Klebanov, Nucl. Phys. B **496** (1997) 231 [arXiv:hep-th/9702076].

- 5) J. Mas, arXiv:hep-th/0601144; D. T. Son and A. O. Starinets, arXiv:hep-th/0601157; O. Saremi, arXiv:hep-th/0601159; K. Maeda, M. Natsuume, and T. Okamura, arXiv:hep-th/0602010.

(なつうめ・まこと, 高エネルギー加速器研究機構)