

超弦理論の応用
—物理諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方—

夏梅 誠

高エネルギー加速器研究機構

2012 年 3 月 15 日

サイエンス社 SGC ライブラリとして出版予定

本書は、大学院生や他分野の研究者向けに書いた超弦理論の AdS/CFT 双対性の「応用」についての本である。

AdS/CFT は、ある意味、素粒子物理学でもっとも活発に議論された考えだと言って差しつかえないだろう。素粒子物理学を中心とした論文のデータベース INSPIRE/SPIRES によると^[1]、歴代論文のなかでも AdS/CFT を提唱した論文^[2] が引用件数トップである。この論文は、2008 年には、標準模型で CP の破れを説明した小林-益川論文を抑え 2 位に、2011 年には、標準模型の電弱理論を確立したワインバーグ論文を抑えてトップに躍り出た。

もともと AdS/CFT は超弦理論の考えなので、超弦理論の分野で盛んに議論されてきた。しかし、近年は様相が変わってきており、素粒子論の枠を超えて一般相対論、原子核物理、物性物理、非平衡統計力学などの分野で議論されてきている。それは、AdS/CFT が「現実世界」を解析するうえで強力な手法になりつつあるからである。AdS/CFT は、5次元の曲がった時空の解析によって、4次元の強結合ゲージ理論を解くことができると主張する。このため、実際に強結合ゲージ理論が登場する原子核物理をはじめとした分野で盛んに議論されている。

このような AdS/CFT の応用では、超弦理論、一般相対論、原子核理論、物性理論、非平衡統計力学といった多分野にわたる話が出てくる。そこで、本書では初学者でも学びやすいように、これらの分野の基礎を含めて紹介する。また、このように多分野にわたる話では、わからない点があってもなかなか専門家に相談する機会も少ないかもしれない。そこで、初心者がつまづきやすいと思われる点をなるべく丁寧に議論するよう心がけた。一方、教科書というのは、それだけではなかなか実際の研究に進むことができないのが常である。本書では、読者が AdS/CFT の研究を実践できるよう、結果だけを紹介するのではなく、なるべく細かい計算も含め、また（ごく簡単とは言え）なるべく進んだ話題、論文にもふれることにした。本書をもとに、もしもさまざまな分野の方々が新たな AdS/CFT の応用をみつけることができれば幸いである。

目次

第 1 章 はじめに	1
1.1 AdS/CFT のあらまし	1
1.2 AdS/CFT の応用	4
1.3 本書の構成	6
1.4 規約について	6
1.5 教科書について	7
第 2 章 一般相対論とブラックホール	9
2.1 粒子の作用	10
2.2 アインシュタイン方程式とシュワルツシルド計量	13
2.3 シュワルツシルド・ブラックホールの物理	15
2.3.1 重力赤方偏移	15
2.3.2 粒子の運動	16
2.4 クルスカル座標	18
2.5 補遺：一般相対論のおさらい	20
第 3 章 ブラックホールと熱力学	23
3.1 ブラックホールと熱力学	23
3.1.1 第ゼロ法則	24
3.1.2 表面重力 κ	25
3.1.3 第 1 法則	26
3.2 アナロジーから熱力学へ	26
3.2.1 ホーキング放射	26
3.2.2 ホーキング温度とユークリッド定式化	28
3.2.3 ブラックホール・エントロピーの起源について	30
3.3 そのほかのブラックホール	31
3.3.1 高次元シュワルツシルド・ブラックホール	31
3.3.2 荷電ブラックホール	32
第 4 章 強い相互作用とゲージ理論	35
4.1 強い相互作用と QCD	35
4.1.1 QCD のあらまし	35

4.1.2	QCD の相構造	36
4.1.3	重イオン実験	37
4.1.4	「超弦理論との予期せぬつながり」	38
4.2	ラージ N_c ゲージ理論	40
第 5 章	AdS/CFT へと至る道のり	45
5.1	超弦理論前史	45
5.2	統一理論としての弦理論	48
5.2.1	ストリングの振動と素粒子	48
5.2.2	なぜ閉弦と開弦があるのか?	49
5.2.3	弦の相互作用	50
5.2.4	超弦理論の古典重力近似: 超重力理論	52
5.3	強い相互作用としての超弦理論の再検討	54
5.3.1	分配関数の比較	54
5.3.2	スケール不変なゲージ理論と曲がった時空	56
5.3.3	AdS/CFT へ	58
5.4	D ブレーンと AdS/CFT	60
5.4.1	D ブレーンとゲージ理論	60
5.4.2	D ブレーンと曲がった時空	62
5.4.3	ゲージ理論と曲がった時空	64
5.4.4	D ブレーンを通してわかったこと	65
第 6 章	AdS 時空	67
6.1	定曲率時空	67
6.1.1	定曲率空間	67
6.1.2	定曲率時空: 宇宙項をもった時空	69
6.1.3	定曲率空間との関係	70
6.1.4	AdS 時空のさまざまな座標系	71
6.1.5	一般の次元の場合	72
6.2	AdS 時空での粒子の運動 ♦	74
6.3	AdS/CFT での解釈について	77
第 7 章	AdS/CFT-平衡系の場合	79
7.1	AdS ブラックホール	79
7.2	AdS ブラックホールの熱力学量	80
7.2.1	熱力学量	80
7.2.2	弱結合極限での計算	84
7.3	球形のホライズンをもつ AdS ブラックホール	85

7.4	補遺：AdS ブラックホールの熱力学量の計算 \blacklozenge	86
第 8 章	AdS/CFT-プローブを加えた場合	91
8.1	ウィルソンループの初歩	91
8.2	AdS/CFT でのウィルソンループ：直観的理解	93
8.3	ストリングの作用	100
8.4	AdS/CFT でのウィルソンループ：具体計算	102
第 9 章	非平衡系への導入	105
9.1	線形応答理論	105
9.1.1	アンサンブル平均と密度行列	105
9.1.2	線形応答理論	106
9.1.3	輸送係数の例：伝導率	109
9.2	熱力学のおさらい	110
9.3	流体力学	113
9.3.1	流体力学のあらまし	113
9.3.2	例：拡散問題	113
9.3.3	完全流体	117
9.3.4	粘性流体	120
9.3.5	カレントも存在する場合 \blacklozenge	121
9.3.6	粘性の久保公式	123
9.3.7	線形方程式のポール	125
第 10 章	AdS/CFT-非平衡系の場合	129
10.1	GKP-ウィッテン関係式	129
10.2	簡単な例	132
10.2.1	スカラー場の場合	132
10.2.2	ほかの例	135
10.2.3	Lorentzian 処方箋について \blacklozenge	137
10.3	そのほかの AdS 時空 \blacklozenge	139
第 11 章	クォーク・グルーオン・プラズマへの応用	145
11.1	ラーズ N_c プラズマの粘性率	145
11.1.1	$\mathcal{N} = 4$ プラズマの輸送係数	145
11.1.2	通常物質の粘性	147
11.1.3	η/s の普遍性	148
11.1.4	摂動方程式の解き方 \blacklozenge	150

11.2 QGP 実験との比較	153
11.2.1 実験で粘性をどうみるか?	153
11.2.2 格子数値計算との比較	155
11.2.3 超対称ゲージ理論を使う根拠は?	155
11.3 関連する話題	158
11.3.1 ずり粘性の限界予想	158
11.3.2 拡散問題ふたたび、流体力学への応用 ◆	158
11.3.3 ラージ N_c 極限からの補正 ◆	162
11.4 補遺：テンソルモードの作用導出の詳細 ◆	164
11.5 補遺：ベクトルモードの計算 ◆	168
第 12 章 相転移の初歩	175
12.1 相転移	175
12.1.1 2 次相転移	176
12.1.2 1 次相転移	178
12.1.3 非一様な場合	180
12.1.4 臨界現象	181
12.2 超伝導	184
第 13 章 AdS/CFT-相転移	189
13.1 なぜ AdS/CFT で相転移を調べるのか	189
13.2 1 次相転移：ホーキング-ページ転移	190
13.3 2 次相転移：ホログラフィック超伝導	194
参考文献	201
索引	205

第 1 章

はじめに

1.1 AdS/CFT のあらし

この章では、まず AdS/CFT の全体像を俯瞰したい。以下ではさまざまなキーワードが出てくるが、おいおい説明していくので、この段階ではこれらの用語をあまり気にする必要はない。

AdS/CFT 双対性は、もともと**超弦理論**の分野で出てきた考えである。自然界には、重力、電磁気力、弱い力、強い力の 4 つの相互作用がある。超弦理論は、これらの力を統一的にあらわす統一理論の最有力候補である (5 章)。

一般に**双対性** (duality) とは、表面上まったく異なってみえる 2 つの理論が等価だという考えである。超弦理論ではさまざまな双対性が存在し、超弦理論の全体像を理解するのに役立っている。一見違ってみえる 2 つの理論 A, B が等価でありうるのは、たとえば理論 B が弱結合のときに理論 A は強結合になっているせいである。理論 A が強結合なので、理論 A の弱結合での記述、基本的な自由度などが必ずしも適切ではなくなっている。AdS/CFT の場合も同じような構造になっている。

AdS/CFT 双対性の場合、大ざっぱに言って以下の同等性を主張する：

$$(4 \text{次元時空の}) \text{強結合ゲージ理論} = (5 \text{次元の}) \text{AdS 時空}$$

AdS/CFT は 4 次元の物理と 5 次元の物理が対応すると主張していることに注意してほしい。このような事情から、AdS/CFT はしばしば**ホログラフィック理論**とも呼ばれる。通常ホログラムが 2 次元面に 3 次元の映像を記録するように、4 次元の理論で 5 次元の理論があらわされるからである。

右辺の AdS 時空は**反ド・ジッター時空** (anti-deSitter space) の略称である (6 章)。「AdS/CFT」の「AdS」は、この AdS 時空のことである。球は、正の定曲率をもつ空間である。同様に AdS 時空は、負の定曲率をもつ時空である。ド・ジッターはオランダの天文学者で、1917 年にアインシュタイン方程式

の解、ド・ジッター解をみつけた。これは正の定曲率をもつ時空である。反ド・ジッター時空は逆に負の定曲率をもつので、頭に「反」という言葉がついているのである。

左辺のゲージ理論は、重力以外の力、つまり電磁気力、弱い力、強い力を記述する。たとえば、電磁気力は $U(1)$ ゲージ理論、強い力をあらわす**量子色力学** (Quantum Chromodynamics) は $SU(3)$ ゲージ理論である (4.1 節)。重力以外の力の理論的基礎は、ゲージ理論としてよく理解されているが、ゲージ理論を強結合の場合に計算するのは困難である。このため、たとえば強い力が文字どおり強い状況下では、理論的な理解はなかなか進まない。AdS/CFT は、強結合のゲージ理論が曲がった時空を使って解析できると主張する。

双対性は、強結合の理論 A と弱結合の理論 B を対応づける。AdS/CFT の場合、たとえば理論 A がゲージ理論、理論 B が重力理論である。「重力理論が弱結合」という言い方はふつうしないが、弱結合の重力理論とは時空の曲率が小さいという意味である。ゲージ理論が強結合のときに、重力理論はこの性質を満たし、逆に上の意味で重力理論が強結合のときは、ゲージ理論は弱結合になっている。

より具体的には、AdS/CFT は両者の生成汎関数 (分配関数) が一致すると主張する：

$$Z_{\text{ゲージ}} = Z_{\text{AdS}} \quad (1.1)$$

$Z_{\text{ゲージ}}$ はゲージ理論の生成汎関数、 Z_{AdS} は重力理論の生成汎関数である。本書でやることは、この関係式がどういう意味をもち、この関係式からどういう量が計算できるかを議論することに尽きる。

有限温度のゲージ理論を議論することもできる。この場合、上の関係は

$$\text{有限温度の強結合ゲージ理論} = \text{AdS 時空中のブラックホール}$$

に置きかわる。**ブラックホール**が出てくる基本的な理由は、ブラックホールも有限温度系だからである。**ホーキング放射**という現象により、ブラックホールは温度という概念をもつ (3 章)。本書では、基本的に**この有限温度の場合をあつかい、AdS/CFT による非平衡現象の解析を目的とする**。

ブラックホールを考えると、5次元の重力理論と4次元の場の理論がなぜ対応しうるか、片鱗がうかがえる。有限温度系としてブラックホールもエントロピーをもつが、それが**ホライズン** (2 章) の「面積」に比例するという特徴をもっている (3 章)。一方、統計力学的なエントロピーは、系の「体積」に比例する。このことは、ブラックホールがかりに通常の場の理論であらわされるのなら、ブラックホールより次元が1次元低い場の理論でなければいけないことを示唆する。

ただし、AdS/CFTがあつかうゲージ理論は、現実的な $SU(3)$ ゲージ理論などではなく、いくつかの点で違いがある。第一に、AdS/CFTでは仮想的な $SU(N_c)$ ゲージ理論を考える。強結合のゲージ理論と言うのは、**ラージ N_c 極限**と呼ばれる場合のことである (4.2 節)。

第二に、AdS/CFTは典型的には超対称性をもつ**超対称ゲージ理論**と呼ばれる理論をあつかう。とくに、もっとも解析が容易なのは $\mathcal{N} = 4$ **超対称ゲージ理論**と呼ばれる理論である (5.4.1 節)。 \mathcal{N} は、この理論のもつ超対称性の数をあらわす*1)。この理論には、次元をもったパラメータがないので、スケール対称性をもつ。さらに、この理論は、ポアンカレ対称性とスケール対称性をあわせもつ、より大きなコンフォーマル対称性をもつことが知られている。このような理論は、一般に**コンフォーマル場の理論** (conformal field theory)、略して CFT と呼ばれる。「AdS/CFT」の「CFT」は、この事情を指している。

ただし、ゲージ理論側が CFT なのは、もっとも簡単な AdS/CFT に限られる。AdS/CFT で議論されるゲージ理論・重力理論では、コンフォーマル対称性をもたない系の方がふつうである。たとえば、相転移が起こる系も知られているので (13 章)、この場合明らかにスケール対称性はない。したがって、AdS/CFT という名前には語弊があり、歴史的な意味合いしかない*2)。式 (1.1) の左辺に違うゲージ理論をもつてくると、それに応じて右辺も適切な時空を選ぶ必要がある (10.3 節)。しかし、典型的には無限遠方で AdS 時空に近づくような時空を考える。

このように、AdS/CFT であつかうゲージ理論は現実的な系とは言いがたい。しかし、このような欠点は AdS/CFT に特有なものではない。そもそも、場の理論ではしばしば強結合の問題に直面するが、解析的な手法や厳密に解けるモデルは少数しかない。しかし、そういった例が、場の理論に対する我々の直感を養うのに、事実上大きな役割を果たしてきた。たとえ限られた理論にしか適用できなくても、このような手法は貴重であり、場の理論に大きな進歩をもたら

*1) \mathcal{N} は超対称性の数をあらわし、 N_c は $SU(N_c)$ ゲージ理論の N_c (カラーの数) をあらわすことに注意。

*2) AdS/CFT という名前が不都合だということで、さまざまな代替案が提案されてきた。「ホログラフィック理論」もその 1 つである。ほかに有力なものとして「ゲージ・重力双対性」があったが、AdS/CFT が QCD に限らず場の理論全般に応用されるようになって、この名前も具合が悪くなってきた。そこで、「バルク/境界双対性」や「場の理論・重力双対性」という言い回しもよく見かける。また、American Institute of Physics による PACS (Physics and Astronomy Classification Scheme) コードでは「ゲージ/ストリング双対性」という名称が採用されている。おいおいみていくように、ゲージ理論の双対理論は本当は超弦理論なので、この名称も適切ではある。いずれにせよ、名前は違っていても、どれも基本的には同じである。AdS/CFT の応用がどこまで広がるか読めない現時点では、むやみに名前を作らず、もとの AdS/CFT を使いつけた方が無難だと思うので、本書では一貫して AdS/CFT と呼ぶことにする。余談だが、AdS/CFT は名前に悩まされてきた。もともとは、AdS/CFT の提唱者の名前を使って「Maldacena 予想」と呼ばれた。しかし、双対性はほとんどの場合証明できるものではなく、まず予想として出発するのが常なので、この言い方も廃れた。

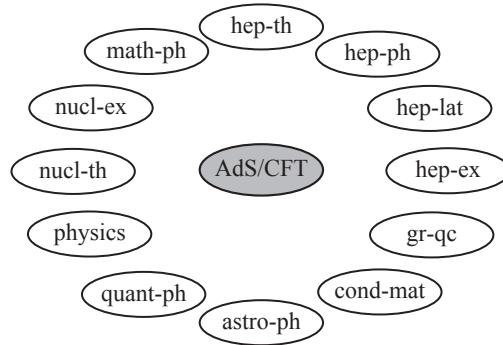


図 1.1 アーカイブにまたがる AdS/CFT 双対性

してきた。AdS/CFT 双対性も、そういった手法の一つと考えることができる。

1.2 AdS/CFT の応用

もともと AdS/CFT は超弦理論の考えなので、超弦理論の分野で盛んに議論されてきた。しかし、近年は様相が変わってきており、AdS/CFT は素粒子論の枠を超えて議論されてきている。それは、AdS/CFT が「現実世界」を解析するうえで強力な手法になりつつあるからである。応用分野としては、QCD、原子核物理、物性論、流体力学（非平衡統計力学）などが挙げられる。プレプリント・サーバー（アーカイブ）で検索してみると、アーカイブの物理分野すべてで AdS/CFT の論文^[2] が引用されている（図 1.1）。

たとえば、強い力の場合、その理論的基礎は量子色力学として理解されているが、強い力は文字どおり強いので、摂動論はあまり役に立たない状況が多い。しかし、AdS/CFT によれば、AdS 時空を使うことで強結合のゲージ理論が解析できる。そこで、AdS/CFT を使った強い力の解析が活発におこなわれている^{*3)}。

1 つの応用例はクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) である。QCD によると、十分高温では QCD の基礎的な自由度であるクォークやグルーオンが非閉じこめを起こし、QGP をなす (4.1.2 節)。その実験も進行中である (4.1.3 節)。実験によると、QGP は**ずり粘性率**の小さい流体のように振るまう。このことは、QGP が強く相互作用をしていることを意味し、理論的な解析を難しくする (4.1.4, 11.2 節)。ところが、実験から示唆された粘性の値は、ブラックホールを使った AdS/CFT の予言値に近い (11 章)。このため、分野を超えて AdS/CFT が議論されるようになった。

ブラックホールと粘性がどう関係しているのかイメージをもってもらうために、

*3) もっとも、量子色力学は $SU(3)$ ゲージ理論だが、AdS/CFT であつかう系は主に $SU(N_c)$ 超対称ゲージ理論である。したがって、AdS/CFT の結果は近似的な結果である。

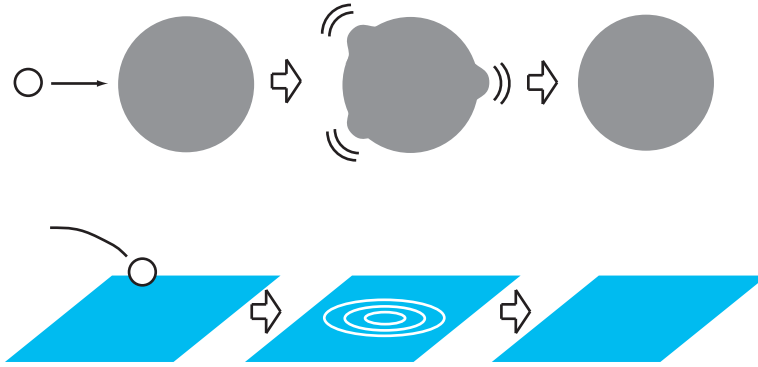


図 1.2 摂動を与えたとき、ブラックホールのふるまいは流体力学のふるまいとよく似ている。流体力学では、これは粘性の効果である

直観的な説明をしておこう。平衡状態にある熱力学系に、なにか摂動を与えることにしよう。たとえば、池にボールを落とすとさざ波が立つが、さざ波はやがて止んでもとの静かな水面に戻る。この**散逸**は、粘性による効果である。

ブラックホールのふるまも、流体と似ている。やはり、ブラックホールにモノを落としたとしよう。すると、しばらくの間、ブラックホールの形は不規則になるが、最終的にはもとの対称的なブラックホールに戻ってしまう。これも一種の散逸とみなすと、この場合の散逸は摂動がブラックホールに吸収されることによって起こる。したがって、ブラックホールに対してもなにか粘性のような概念が考えられるはずで、この「粘性」は上のようなプロセスを考えれば計算できるだろう。

このような**緩和現象**は、**非平衡統計力学**や**流体力学**のテーマであり、主たる物理量は**輸送係数**である (9 章)。粘性も輸送係数の 1 つである。ブラックホールと粘性の関係は単なるアナロジーにすぎないように思えるかもしれないが、実際にブラックホールが小さな粘性をもつとみなせることを示すのが本書の目標の 1 つである。

また、物性でもしばしば強相関係があらわれる (たとえば高温超伝導など)。こういった状況を受けて、AdS/CFT を物性論に応用しようという研究も盛んにおこなわれている (13 章)。

このように分野横断的な研究の性格から、この種の応用では、しばしば他分野の研究者が研究をリードしてきた。たとえば、原子核物理の研究者によって、AdS/CFT をクォーク・グルーオン・プラズマに応用しようという流れがはじまった。また物性物理の研究者によって、AdS/CFT でフェルミ面がはじめて議論された。

1.3 本書の構成

本書では AdS/CFT の応用を解説するが、AdS/CFT の応用を網羅することは目的ではない。この種の応用は膨大な数に上り、また日々新しい応用が提案されているからである。それら個々のトピックを紹介するより、基本的な考えをじっくり解説したい。そして、AdS/CFT の応用の典型例として、クォーク・グルーオン・プラズマへの応用や、ホログラフィック超伝導と呼ばれるトピックなどを解説する。しかし、いったん基本的な考えを理解しさえすれば、さまざまな系に応用することは難しくはない。基本的には同じような計算の繰り返しにすぎないからである。

本書では一般相対論や場の理論については初歩的な知識を仮定しているが、ブラックホールや超弦理論についての知識は仮定しない。また、AdS/CFT の応用は多分野にわたるので、さまざまな分野の基礎知識を解説しつつ議論を進める：

- 2, 3 章：ブラックホール，ブラックホール熱力学
- 4 章：量子色力学
- 5 章：超弦理論
- 9 章：非平衡統計力学，流体力学
- 12 章：物性論

それぞれの基礎知識をもった読者は、該当する章をとばして読んでも差しつかえない*4)。

また、本書ではどのようにして AdS/CFT の考え方にたどり着いたのかという説明にもページをさいているが、一方「習うより慣れろ」で実際の計算を通して AdS/CFT を理解していきたい読者もいるだろう。そういった場合、4.2 節、5 章をとばして読むのも一案である。

◆がついている節や脚注は、やや進んだトピックであり、最初に読むときはとばしても差しつかえない。

1.4 規約について

本書では $\hbar = c = 1$ の自然単位系を使う。また、熱力学的な議論では、ボルツマン定数 $k_B = 1$ の単位系もしばしば使う。ただし、いくつかの節ではこれらの単位系は用いず、すべての定数をあらわに書くこともある。

計量の符号 (signature) は、一般相対論や弦理論で標準的に用いられる

*4) なお、本書の目的はこれらの解説自体が目的ではないので、専門家には物足りない点があるかもしれない。また、筆者はこれらすべての分野の専門家というわけでもないのので、誤っている点もあるかもしれない。それらの点については、ご指摘いただければ幸いです。

$(-, +, \dots, +)$ の規約を使う。また計量から作られる諸量, クリストッフエル記号やリーマン・テンソルなどの規約は文献 [3] にしたがう。ベクトル, テンソルなどの添字に対して, 5.3 節までは一般相対論の標準的な規約にしたがい, ギリシャ文字の添字 μ, ν, \dots を使う。ただし, 本書ではゲージ理論の住む 4 次元時空と重力理論の住む 5 次元時空が出てくるので, 添字がどちらの意味で使われているのか区別する必要がある。5.3 節以降は,

- ギリシャ文字の添字 μ, ν, \dots は, **ゲージ理論の住む 4 次元時空に対して使い**, $0, \dots, 3$ まで走るものとする。
- 一方, 大文字アルファベットの添字 M, N, \dots は, **重力理論の住む 5 次元時空に対して使い**, $0, \dots, 4$ まで走るものとする。

なお, 場の理論などでは Lorentzian 定式化とユークリッド定式化の 2 種類ある。本書では両方を適宜使い分けながら議論を進める (なるべく読者が混乱しないように配慮するが)。ユークリッド定式化は平衡系を議論するのに便利であり, Lorentzian 定式化は非平衡系を議論するのに便利だからである。

1.5 教科書について

AdS/CFT の基本的な総合報告としては,

- [1] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” Phys. Rept. **323** (2000) 183 [hep-th/9905111].

AdS/CFT 研究の初期当時のまとまった総合報告である。残念ながら, いまだにこの総合報告を超えたものは出ていない。

本書では必要最低限の超弦理論の知識しか解説しないが, より詳しく超弦理論を学ぶには,

- [2] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory* (Cambridge Univ. Press, 1987).
- [3] J. Polchinski, *String theory* (Cambridge Univ. Press, 1998).
- [4] B. Zwiebach, *A first course in string theory, second edition* (Cambridge Univ. Press, 2009).

文献 [2] は 1990 年代までの標準的な教科書, 文献 [3] はそれ以後の標準的な教科書である。文献 [2] は, 文献 [3] であまりあつかっていない点について詳しい記述があり, いまでも一定の価値がある。しかし, これらの教科書は, 本格的に超弦理論を修めようとする人向けである。学部上級生や, 他分野の人でも読みやすい教科書としては, 文献 [4] がある。

そのほかの超弦理論の教科書で, 近年のものとしては,

- [5] K. Becker, M. Becker, J. H. Schwarz, *String theory and M-theory: A modern introduction* (Cambridge Univ. Press, 2007).

[6] E. Kiritsis, *String theory in a nutshell* (Princeton Univ. Press, 2007).

[7] C. V. Johnson, *D-branes* (Cambridge Univ. Press, 2003).

これら近年の教科書にも AdS/CFT はとりあげられている。しかし、本稿執筆時点で、本書があつかうような AdS/CFT の応用を十分に扱った教科書はない。

本書ではブラックホールについては初歩から解説しているが、一般相対論そのものについては初歩的な知識を仮定している。一般相対論の教科書としては、

[8] B. F. Schutz, *A first course in general relativity, second edition* (Cambridge Univ. Press, 2009) [邦訳：バーナード・F・シュッツ, 相対論入門 第2版 (丸善, 2010)]。

[9] R. M. Wald, *General relativity* (The Univ. of Chicago Press, 1984).

文献 [8] は初歩的なもの、文献 [9] は本格的な教科書である。

これら以外の分野の基礎知識については、教科書を適宜挙げる。

第 2 章

一般相対論とブラックホール

本書ではブラックホールが頻繁に登場するので、まずもっとも簡単なブラックホール、シュワルツシルド・ブラックホールについて説明し、シュワルツシルド・ブラックホールでの物理を調べる。

大ざっぱに言って、ブラックホールとは重力が強くなり、光さえも外に出られない領域のことである。そして、ブラックホールの境界を**ホライズン** (horizon) と呼ぶ。ホライズンからは光さえも逃れられないので、ホライズンはブラックホールの内から外へ因果的な影響がおよぶ限界である。

ブラックホールを正確に理解するには、一般相対論が欠かせないが、ブラックホールのようなものの存在は、ニュートン力学的な議論からも想像することができる。物体を星の表面から投げ上げたとき、速度が小さいと重力によって星に戻ってしまう。ニュートン力学では、星の重力から逃れるためには脱出速度を超えている必要がある。脱出速度は、エネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} \quad (2.1)$$

によって決まる。星の質量 M が同じ場合、半径 r が小さくなるほど、星表面の重力は強くなるので、脱出速度も大きくなる。星の半径がきわめて小さくなると、ついには脱出速度が光速になる。このとき、どんな物体であっても重力からは逃れられない。上の式で $v = c$ とすると、このときの半径は、

$$r = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.2)$$

で与えられる。これがホライズンに相当する。太陽程度の重さの場合、ホライズン半径は 3 km 程度になり太陽半径の 24 万分の 1 しかない。

いくつかの理由から、正確にはこのような議論は誤りである：

1. まず、ニュートン力学的な議論では光速は任意である。その結果として、このような議論では、ブラックホールから離れるにつれて光の速さが減ることになる。しかし特殊相対論では光速は絶対速度であり、どの観測者

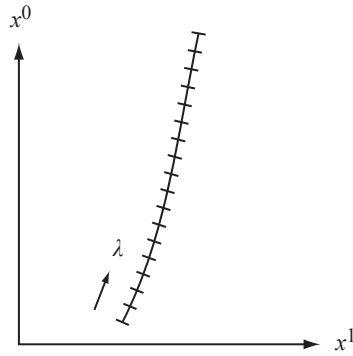


図 2.1

にとっても一意的な値をもつ。

2. また、そもそもニュートン力学では重力が光にどう影響するのかは決められない。
3. さらに、ニュートン力学では光が脱出できず戻って来るにせよ、一時的に「ホライズン」から脱出できないわけではない。しかし、一般相対論によると、ホライズンから光が一時的にせよ脱出することはない。

このように、ニュートン力学的な議論には多々問題があるものの、ホライズン半径の式 (2.2) は一般相対論においてもそのまま成り立つ。ニュートン力学的な議論については、またあとでも利用する。

以下、一般相対論を用いてブラックホールを議論するが、まず与えられた時空中で粒子の運動をどう記述するか、から出発することにする（平坦な時空の場合、これは実質的には特殊相対論のおさらいである）。これは、ブラックホールの物理を理解するために、あとでブラックホール周りでの粒子の運動を調べるからである。また、本書では時空をどう求めるかではなく、むしろ既知の時空に粒子のような「プローブ」を加えたときのプローブの振るまいを調べることを主眼としているので、このようなアプローチが自然である。さらに、超弦理論の現在の定式化も、粒子の場合を自然に拡張したものになっている。

2.1 粒子の作用

平坦な時空の場合—特殊相対論のおさらい

まずは平坦な時空での粒子の運動を考えよう。粒子の座標を $x^\mu := (t, x, y, z)$ とする。特殊相対論によると、粒子にとって相対論的な不変距離は

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.3)$$

である。2点間の距離が $ds^2 < 0$ の場合、2点間の関係を時間的 (timelike) と呼び、 $ds^2 > 0$ を空間的 (spacelike)、 $ds^2 = 0$ をヌル (null) と呼ぶ。粒子に

対しては $ds^2 < 0$ なので

$$ds^2 = -d\tau^2 \quad (2.4)$$

で与えられる**固有時間** (proper time) τ を使ってもよい.

粒子にとって固有時間が相対論的な不変量なので, 粒子の作用も固有時間で書くのが自然である:

$$S = -m \int d\tau. \quad (2.5)$$

非相対論的極限を考えると, この作用が自然であることがみてとることができる. 速度 $v^i := dx^i/dt$ を用いると, $d\tau = dt(1-v^2)^{1/2}$ なので

$$S = -m \int dt(1-v^2)^{1/2} \simeq -m \int dt \left(1 - \frac{1}{2}v^2 + \dots \right), \quad (v \ll 1) \quad (2.6)$$

第一項は粒子の静止エネルギー, 第二項は非相対論的な運動エネルギーをあらわしている.

粒子は時空中で**世界線** (world-line) を掃く (図 2.1). 世界線に沿った任意パラメータ λ を導入すると, 粒子の座標, つまり粒子の運動は $x^\mu(\lambda)$ によって指定することができる. このパラメータを使うと

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu d\lambda^2 \quad (\dot{} := d/d\lambda) \quad (2.7)$$

なので, 作用は

$$S = -m \int d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = \int d\lambda L \quad (2.8)$$

と書きかえられる. λ は余分な変数なので, 作用は λ に依存すべきではない. 実際, 作用は

$$\lambda' = \lambda'(\lambda) \quad (2.9)$$

という変換の下で不変である.

粒子の正準運動量は

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = m \frac{dx_\mu}{d\tau} \quad (2.10)$$

($\dot{x}^2 := \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$) . ただし, 正準運動量は

$$p^2 = m^2 \frac{\dot{x}^2}{-\dot{x}^2} = -m^2 \quad (2.11)$$

を満たすので独立ではない:

$$\boxed{p^2 = -m^2} \quad (2.12)$$

ラグランジアン L は座標 x^μ そのものは含まず \dot{x}^μ のみを含むため, p_μ は保

存する。したがって、 $p_\mu = m dx_\mu/d\tau = (\text{定数})$ であり、これは自由運動をあらわす。

粒子の 4 元速度 u^μ は、

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.13)$$

で定義される。速度 v^i で書くと、

$$u^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(1, v^i), \quad \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - v^2 := \gamma^{-2}. \quad (2.14)$$

$p_\mu = mu_\mu$ かつ $p^2 = -m^2$ より、 $u^2 = -1$ である。

作用 (2.5) は m に比例するため、質量ゼロの粒子に対しては違う作用を使う必要がある。質量ゼロの粒子に対しても成り立つ作用としては

$$S = \frac{1}{2} \int d\lambda \{e^{-1} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - em^2\}. \quad (2.15)$$

この作用から

$$e \text{ の運動方程式: } \dot{x}^2 + e^2 m^2 = 0, \quad (2.16)$$

$$\text{正準運動量: } p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e} \dot{x}_\mu = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}. \quad (2.17)$$

式 (2.17) の最後の等号では式 (2.16) を使う。式 (2.16) を使うと、ラグランジアンは

$$\frac{1}{2} \{e^{-1} \dot{x}^2 - em^2\} = -m \sqrt{-\dot{x}^2} \quad (2.18)$$

となり式 (2.8) に帰着する。

式 (2.15) も座標変換不変性をもち、

$$\lambda' = \lambda'(\lambda), \quad (2.19)$$

$$e' = \frac{d\lambda}{d\lambda'} e, \quad (2.20)$$

の下で、作用 (2.15) は不変に保たれる。

粒子の作用 (曲がった時空)

特殊相対論から一般相対論に移ると、座標不変な距離は平坦な時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ のかわりに曲がった時空の計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を使い

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.21)$$

で与えられる。計量 $g_{\mu\nu}$ をどう決めるかはあとで議論することにして、ここではまず曲がった時空での粒子の運動を考えることにする。

曲がった時空での粒子の作用も、 $\eta_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu}$ で置きかえることで得られる：

$$S = -m \int d\tau = -m \int d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (2.22)$$

平坦な時空同様、正準運動量は

$$p_\mu = m \frac{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\nu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}, \quad \dot{x}^2 := g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \quad (2.23)$$

で与えられ、 $p^2 = -m^2$ の拘束条件が存在する。また^{*1)},

計量がある座標 x^μ を含まないときは p_μ が保存する。

変分原理 $\delta S = 0$ は、固有時間が極値をとる世界線を与える。平坦な時空のときは、粒子は自由運動をし、世界線は「直線」だった。曲がった時空の場合、作用の極値を与える世界線 $x^\mu(\tau)$ を**測地線** (geodesics) と呼ぶ。作用を x^μ で変分すると、

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (2.24)$$

という運動方程式が得られる。これを**測地線方程式** (geodesic equation) と呼ぶ^{*2)}。ここで $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ はクリストッフエル記号

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (2.25)$$

である。測地線方程式を解けば粒子の運動が決まるが、以下でみるように、この本で考えるようなブラックホールでは十分な数の保存量があるため、測地線方程式を解くまでもない。

質量ゼロの粒子の場合も、作用 (2.15) で $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ の置きかえで与えられる。これらの粒子の作用は、超弦理論のストリングやブレーンといった物体にも自然に拡張可能である (8.3 節)。

2.2 アインシュタイン方程式とシュワルツシルド計量

ここまで計量の形は指定せずに議論してきたが、計量はアインシュタイン方程式によって決まる^{*3)}：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (2.26)$$

ここで、 G はニュートン定数、 $T_{\mu\nu}$ は物質場のエネルギー・運動量テンソル

-
- *1) 保存されるのは p_μ であり、一般に p^μ とは一致しないことに注意。平坦な時空では、 p_μ と p^μ には符号の違いしかないが、曲がった時空では計量 $g_{\mu\nu}(x)$ の因子分違うので、 p_μ と p^μ の関数形は一致しない。
 - *2) ここで任意の世界線パラメータ λ ではなく、固有時間 τ を使っていることに注意。任意の λ に対しては、運動方程式は一般に測地線方程式の形にはならない。 τ のようなパラメータを**アフィンパラメータ**と言う。測地線方程式から簡単にわかるように、アフィンパラメータには $\tau \rightarrow a\tau + b$ (a, b : 定数) という線形変換の自由度しかない。質量ゼロ粒子に対しては固有時間は定義できないものの、アフィンパラメータの定義は可能である。
 - *3) あまりなじみのない読者のために、2.5 節に一般相対論のフォーマリズムを簡単にまとめた。

である。アインシュタイン方程式は、物質場のエネルギー・運動量テンソルによって、時空の曲がりが決まると主張する。

時空の曲がりを決めるエネルギー・運動量テンソルとして、本書ではさまざまな物質場が登場するが、とくに本書で重要な役割を果たすのが、

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

という形のものである。Λは**宇宙定数**と呼ばれる。この場合、アインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.28)$$

式(2.27)より、宇宙定数は一定のエネルギー密度として働く。このため、正の宇宙定数(Λ > 0)はダーク・エネルギーとの関連で近年盛んに議論されている。一方、AdS/CFTで登場するのは、負の宇宙定数(Λ < 0)の場合である。AdS/CFTで使われる反ド・ジッター時空は、この場合の解である(6章)。

一方、物質場がないときのアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (2.29)$$

の解として、もっとも簡単なブラックホール、**シュワルツシルド**(Schwarzschild) **ブラックホール**がある：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2d\Omega_2^2. \quad (2.30)$$

ここで $d\Omega_2^2 := d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ は半径1の S^2 の面積要素である。このブラックホールの性質について、いくつか列挙しておく

- $r \rightarrow \infty$ で計量は平坦な時空 $ds^2 \rightarrow -dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega_2^2$ に近づく。
- あとでわかるように(2.3.2節)、 M はブラックホールの質量をあらわす。これもあとでわかるように、 GM/r という振るまいは、4次元時空でのニュートンポテンシャルの振るまいから来る。
- 計量 $g_{00} = 0$ となる $r_0 = 2GM$ がホライズンである。
- この計量から、

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{r^6} \quad (2.31)$$

のようなりーマン・テンソルなどで作られる座標不変な量を見ると、 $r = 0$ で発散している。この場所は**時空特異点**と呼ばれ、重力が無限に強くなる場所である。

この計量を理解するために、このブラックホール周りでの粒子や光子の運動を調べる。

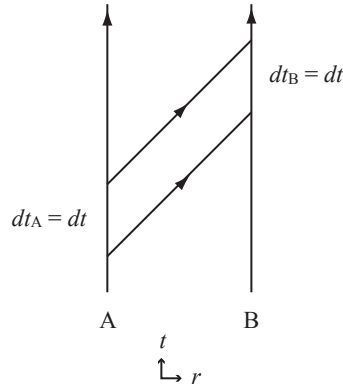


図 2.2 A と B の光のやりとり.

2.3 シュワルツシルド・ブラックホールの物理

2.3.1 重力赤方偏移

重力赤方偏移は、一般相対論の古典的予言と呼ばれる3つの予言の1つである。(ほかの2つについては2.3.2節でふれる)

地点 A と B に、それぞれ静止した観測者がいるとする。A で発した光を、B で受けとるものとする。光は $p^2 = 0$ あるいはヌル測地線 $ds^2 = 0$ を描くので、

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 = 0, \quad (2.32)$$

$$dt^2 = \frac{g_{rr}}{-g_{00}}dr^2 \quad \rightarrow \quad \int_A^B dt = \int_A^B \sqrt{\frac{g_{rr}(r)}{-g_{00}(r)}} dr. \quad (2.33)$$

右辺は時刻に依存しないので、光が A から B に到達するのにかかる座標時間は常に同じである。したがって、A が dt のあいだだけ光を発したとすると、B がその光を受けとるのにかかる座標時間も dt である (図 2.2)。

しかし、 $d\tau^2 = |g_{00}|dt^2$ なので、それぞれの観測者にとっての固有時間の進みは違う：

$$d\tau_A^2 \simeq |g_{00}(A)|dt^2, \quad (2.34)$$

$$d\tau_B^2 \simeq |g_{00}(B)|dt^2. \quad (2.35)$$

どちらの観測者にとっても、光の総振動数は同じはずだから、

$$\omega_B d\tau_B = \omega_A d\tau_A. \quad (2.36)$$

光子のエネルギーは $E = \hbar\omega$ なので、 $E_B d\tau_B = E_A d\tau_A$ つまり

$$\boxed{\frac{E_B}{E_A} = \sqrt{\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}}} \quad (2.37)$$

簡単な場合としてシュワルツシルド・ブラックホールを考え、 $r_B = \infty, r_A \gg GM$ とすると、

$$E_\infty = \sqrt{|g_{00}(A)|} E_A \simeq E_A - \frac{GM}{r_A} E_A < 0. \quad (2.38)$$

ここで、 $\sqrt{|g_{00}(A)|} = (1 - 2GM/r_A)^{1/2} \simeq 1 - (GM)/r_A$ を使った。したがって、無限遠での光子のエネルギーは減少する。とくに A がホライズンの場合、 $g_{00}(A) = 0$ なので、 $E_\infty \rightarrow 0$ となって、光子は無限の赤方偏移を受ける。光子のエネルギーが減少するのは、重力ポテンシャルが上がったためである。実際、式 (2.38) の第 2 項は光子に対するニュートン的な重力ポテンシャルの形をしている。

2.3.2 粒子の運動

遠方での運動

粒子の運動は測地線方程式 (2.24) から求められるが、シュワルツシルド・ブラックホールのような静的球対称解の場合、測地線方程式を解くまでもなく保存則から求めることができる。

- まず球対称の場合、運動は 1 つの平面内に限定されるので、その平面を赤道面 ($\theta = \pi/2$) に選べる。
- また、2.1 節でみたとおり、計量が、ある座標 x^μ を含まない場合、 x^μ に共役な運動量 p_μ が保存する。静的球対称解の場合、計量は t, φ によらないため、エネルギー p_0 、角運動量 p_φ が保存する。

したがって、粒子の 4 元運動量は

$$p_0 =: -mE, \quad (2.39a)$$

$$p_\varphi =: mL, \quad (2.39b)$$

$$p^r = m \frac{dr}{d\tau}, \quad (2.39c)$$

$$p^\theta = 0, \quad (2.39d)$$

(E, L は単位質量あたりのエネルギーと角運動量)。運動量は拘束条件 $p^2 = -m^2$ を満たすので

$$g^{00}(p_0)^2 + m^2 g_{rr} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + g^{\varphi\varphi} (p_\varphi)^2 = -m^2. \quad (2.40)$$

シュワルツシルド・ブラックホールでは、まず角運動量 $L = 0$ のときは

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = (E^2 - 1) + \frac{2GM}{r}. \quad (2.41)$$

$r \rightarrow \infty$ で $(dr/d\tau)^2 \simeq E^2 - 1$ なので、 $E = 1$ は無限遠方で粒子が静止状態にあった場合のエネルギー、つまり粒子の質量エネルギーをあらわす。この式を τ で微分し、非相対論的な場合は $\tau \simeq t$ となるので

$$\frac{d^2r}{dt^2} \simeq -\frac{GM}{r^2}. \quad (2.42)$$

これはニュートンの重力法則にほかならない。したがって、シュワルツシルド・ブラックホール (2.30) の M はブラックホールの質量をあらわす。

同様に角運動量 L がある場合、

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (2.43)$$

$$= (E^2 - 1) + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2GML^2}{r^3}. \quad (2.44)$$

式 (2.44) の第3項は遠心力をあらわす。これに対して、第4項は新しい項であり、一般相対論的な効果をあらわす。一般相対論の古典的予言には、重力赤方偏移以外に

- 水星の近日点移動
- 光の曲がり

があるが、いずれもこの項からの効果である*4)。第3項と第4項を比べると、第4項は $r \simeq 2GM$ 程度に近づいてはじめて第3項と同等の寄与となる。この距離はブラックホールのホライズン半径に相当し、太陽質量の重力場の場合、3km 程度なので、通常微弱な効果だということがわかる。

ホライズン近傍での運動

次に、ホライズン近傍での粒子の運動を考える。ホライズンに落下するまでの時間を求める。簡単のために、無限遠では静止状態にあり ($E = 1$)、動径方向にまっすぐ落ちる運動 ($L = 0$) を考える。 $E = 1, L = 0$ の粒子の運動は、式 (2.41) より

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{r_0}{r} \quad (2.45)$$

($r_0 = 2GM$)。ホライズン近傍では

$$\frac{dr}{d\tau} \simeq -1 \quad (2.46)$$

となる。落下する粒子に対しては、時間経過とともに r が小さくなるので、右辺の符号を負に選んだ。したがって、 $r = r_0 + R$ から $r = r_0 + \epsilon$ まで動くのに

$$\tau \simeq -\int_{r_0+R}^{r_0+\epsilon} dr = R - \epsilon. \quad (2.47)$$

すなわち、落下する粒子の固有時間 τ の立場では、**有限時間でホライズンに到達する。**

*4) 光の曲がりの場合は、式 (2.40) のかわりに質量ゼロの式を使う。

一方、座標時間 t の立場では、話が変わってくる。定義より $p^0 = m dt/d\tau$ だが、一方保存則より $p^0 = g^{00} p_0 = m(1 - r_0/r)^{-1}$ なので、

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{r_0(r - r_0)^2}{r^3}. \quad (2.48)$$

ホライズン近傍では

$$\frac{dr}{dt} \simeq -\frac{r - r_0}{r_0} \quad (2.49)$$

なので、

$$t \simeq -r_0 \int_{r_0+R}^{r_0+\epsilon} \frac{dr}{r - r_0} = r_0(\ln R - \ln \epsilon). \quad (2.50)$$

$\epsilon \rightarrow 0$ で $t \rightarrow \infty$ となるので、 t の立場では、**粒子がホライズンに到達するのに無限の時間がかかる**。なお、ホライズン近傍の式 (2.49) は光子 (2.53) と同じ形になる。つまりホライズン近傍では、粒子の速度は光速に近づく。

光子の場合も考えてみよう。光子に対しては、 $p^2 = 0$ あるいは $ds^2 = 0$ なので、

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{rr} dr^2 = 0 \quad (2.51)$$

$$\rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{g_{00}}{g_{rr}} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 \quad (2.52)$$

$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \simeq -\frac{r - r_0}{r_0}. \quad (2.53)$$

したがって、ホライズン近傍では粒子の場合 (2.49) と同じ形である。また、光子がホライズンに落下する場合ではなく、逆に光子がホライズンから外向きに出る場合を想定すると、ホライズンで出た光が (有限 r でも) 観測者に到達するのは $t \rightarrow \infty$ である。

落下する粒子の立場では、ホライズンで特殊なことはないのに対し、 t の立場では特異なことが起きている。これはホライズン近傍ではシュワルツシルド座標 (t, r) の振るまいが悪いことを意味している。そこで、落下する粒子の立場がみやすい座標系を導入することにする。

2.4 クルスカル座標

これまでにわかった粒子の運動は、新しい座標系、**クルスカル (Kruskal) 座標**を導入することで自然に理解できる。クルスカル座標 (u, v) は

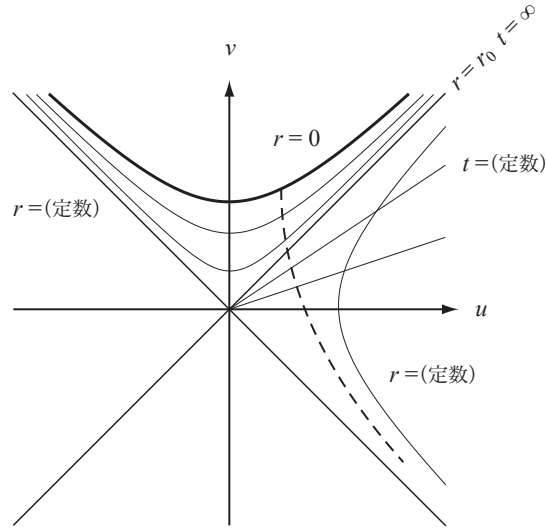


図 2.3 クルスカル座標. 光円錐が 45° に保たれ, 因果構造が見やすい. 太い線は特異点をあらわす. 破線は粒子の軌跡の一例である. ホライズンを横切ると, 粒子は特異点に到達せざるをえない.

$$r > r_0 \quad \begin{cases} u = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)^{1/2} e^{r/(2r_0)} \cosh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \\ v = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)^{1/2} e^{r/(2r_0)} \sinh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \end{cases} \quad (2.54)$$

$$r < r_0 \quad \begin{cases} u = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/2} e^{r/(2r_0)} \sinh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \\ v = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/2} e^{r/(2r_0)} \cosh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \end{cases} \quad (2.55)$$

として定義される. 計量 (2.30) を座標変換すると,

$$ds^2 = \frac{4r_0^3}{r} e^{-r/r_0} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.56)$$

上の計量では (u, v) だけではなく r も用いているが, $r = r(u, v)$ であり,

$$\left(\frac{r}{r_0} - 1\right) e^{r/r_0} = u^2 - v^2 \quad (2.57)$$

から決まる.

この変換と計量から, 以下のさまざまなことがわかる:

- $r = r_0$ で計量 (2.56) に特異性はない. $r = 0$ には特異性が残る. 変換 (2.54) には $r = r_0$ で特異性があるが, これは問題にはならない. $r = r_0$ で特異性がある座標と特異性がない座標を変換するので, この特異性は当然である.
- ヌル世界線 $ds^2 = 0$ は $dv = \pm du$ である. この座標系では, 特殊相対論のように 45° の線が光円錐をあらわす. このため因果構造を見やすい利点がある.

- 式 (2.57) より $r = (\text{定数})$ の線は、双曲線である。
- 式 (2.54) より $t = (\text{定数})$ の線は、直線である。とくに、 $t \rightarrow \infty$ は $u = v$ である。座標 t では、ホライズンに到達するのに無限の時間がかかるのが読みとれる。
- $r = r_0$ のホライズンは、ヌル世界面である。つまり、ホライズンは実際には空間の境界をあらわしているのではなく、光円錐そのものである。光円錐の内から外へは影響を及ぼすことができない。同様に、ホライズンもホライズンの外へは影響を及ぼすことができない。つまり、光さえも $r < r_0$ から $r > r_0$ には届かない。
- $r < r_0$ では、 $r = (\text{定数})$ の線は空間的になる。粒子の測地線は空間的にはなれないので、粒子は $r = (\text{定数})$ にはとどまれない。 $r = 0$ の特異点も空間的である。つまり、特異点は空間の一点ではなく、むしろ時間の終わりという意味をもつ。

これらのことをまとめると、ホライズンに落ちた粒子は逃れられず、必然的に特異点に到達することになる (図 2.3)。

2.5 補遺：一般相対論のおさらい

一般座標変換

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x) \quad (2.58)$$

の下で、

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad (2.59)$$

と変換する量をベクトル、「逆」の変換性

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V_{\nu} \quad (2.60)$$

をもつ量を 1 フォームと言う。添字を複数もつテンソルも同様に定義する。

一般にテンソルの微分 $\partial_{\mu} V^{\nu}$ は、テンソルとして変換しない。そこで、テンソルとして変換する共変微分 ∇_{μ} を使う。ベクトルや 1 フォームの場合、共変微分は

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + V^{\alpha} \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} , \quad (2.61)$$

$$\nabla_{\mu} V_{\nu} = \partial_{\mu} V_{\nu} - V_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} . \quad (2.62)$$

また、有用な関係式として、ベクトルの発散は

$$\nabla_{\mu} V^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} V^{\mu}) . \quad (2.63)$$

例として、

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad (2.64)$$

はベクトルとして変換し、計量は

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x) \quad (2.65)$$

と変換する。したがって、線素 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ は座標変換の下で不変である。無限小変換 $x'^{\mu} = x^{\mu} - \xi^{\mu}(x)$ の下で、式 (2.65) を書きかえると、

$$g'_{\mu\nu}(x - \xi) = (\delta^{\rho}_{\mu} + \partial_{\mu}\xi^{\rho})(\delta^{\sigma}_{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\sigma}) g_{\rho\sigma} \quad (2.66)$$

より

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + (\partial_{\mu}\xi^{\rho})g_{\rho\nu} + (\partial_{\nu}\xi^{\rho})g_{\mu\rho} + \xi^{\rho}\partial_{\rho}g_{\mu\nu} \quad (2.67)$$

$$= g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu} \quad (2.68)$$

となる。

一般相対論では、作用は一般座標変換の下で不変なスカラー量であることを要求する。式 (2.64) より、

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x. \quad (2.69)$$

$|\partial x'/\partial x|$ はヤコビアンである。一方、

$$\sqrt{-g'} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \sqrt{-g}, \quad g := \det g \quad (2.70)$$

となるので、一般座標不変な体積要素は $d^4x \sqrt{-g}$ である。

計量はアインシュタイン-ヒルベルト作用によって決まる：

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (2.71)$$

ここで G はニュートン定数であり、リッチ・スカラー R は、リーマンテンソル $R^{\alpha}_{\mu\nu\rho}$ 、リッチ・テンソル $R_{\mu\nu}$ から以下のように定義される：

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}, \quad (2.72)$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.73)$$

アインシュタイン-ヒルベルト作用を変分すると、

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + (\delta\sqrt{-g}) R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} \right\}. \quad (2.74)$$

$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。第 2 項目は

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.75)$$

を使う。第3項目は、表面項に帰着することを示すことができるので、運動方程式には寄与しない*5)。したがって、

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (2.76)$$

となり、 $\delta S = 0$ を要求して真空中のアインシュタイン方程式が得られる：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (2.77)$$

式 (2.29) の縮約をとると、 $R_{\mu\nu} = 0$ となる。

物質場の作用 $\mathcal{S}_{\text{matter}}$ を加えると、運動方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.78)$$

ここで $T_{\mu\nu}$ は、物質場のエネルギー・運動量テンソルである：

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.79)$$

本書ではさまざまな物質場が登場するが、アインシュタイン-ヒルベルト作用に加えることができるもっとも単純な作用は、

$$\mathcal{S}_{cc} = -\frac{1}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda \quad (2.80)$$

であり、これが宇宙定数である。式 (2.79) より、

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (2.81)$$

であり、アインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.82)$$

となる。

*5) ただし、変分原理を well-defined におこなうために、表面項には特別な注意が必要である。この点について関連する事情は 7.4, 11.4 節でふれる。