# 第 14 章
# 超弦理論の応用：補章

2013 年 8 月 15 日

このファイルは「超弦理論の応用—物理諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方—」（サイエンス社 SGC ライブラリ）でページ数の都合から割愛した部分をまとめたものである.

## 14.1 RN ブラックホールの熱力学量の計算（3 章）

ここでは，ライスナー-ノルドストリューム・ブラックホール（以下 RN ブラックホール）に対して分配関数を鞍点近似で評価し，熱力学量を求める．ユークリッド化した RN ブラックホール解は（$t_{\mathrm{E}}=it$）

$$ds_4^2 = f dt_{\mathrm{E}}^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_2^2 \ , \tag{14.1}$$

$$f = \left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right) = 1-\frac{r_0}{r}+\frac{r_+r_-}{r^2} \ , \quad r_0 := r_+ + r_- \ , \tag{14.2}$$

$$A_M dx^M = i\frac{\sqrt{r_+r_-}}{r}dt_{\mathrm{E}} \ . \tag{14.3}$$

作用は形式的に 2 つの部分に分けられる：

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = \mathcal{S}_{\mathrm{bulk}} + \mathcal{S}_{\mathrm{GH}} \ . \tag{14.4}$$

ここで， $\mathcal{S}_{\mathrm{bulk}}, \mathcal{S}_{\mathrm{GH}}$ は，それぞれバルク作用，ギボンズ-ホーキング作用である（7.4 節，11.4 節）.

#### バルク作用

バルク作用は

$$\mathcal{S}_{\mathrm{bulk}} = -\frac{1}{16\pi G_4}\int d^4x\,\sqrt{g}\left(R-F^2\right) \ . \tag{14.5}$$

アインシュタイン方程式 (3.41) の縮約をとると，$R=0$．したがって，アインシュタイン-ヒルベルト作用は寄与しない．

$F^2=-2r_+r_-/r^4$ より，マクスウェル作用は，

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}} = \frac{1}{16\pi G_4}\int dt_{\text{E}}\, dr\, d\Omega_2\, r^2(-2)\frac{r_+r_-}{r^4} \tag{14.6}$$

$$= \frac{\beta}{2G_4}\frac{r_+r_-}{r}\bigg|_{r=r_+}^{r=\infty} \tag{14.7}$$

$$= -\frac{\beta}{2G_4}r_- \ . \tag{14.8}$$

**ギボンズ-ホーキング作用**

$N^{-1}=f^{1/2}$，$\sqrt{\gamma}=f^{1/2}r^2\sin\theta$ なので，ギボンズ-ホーキング作用は ($\sqrt{\gamma}\,K=\partial_r\sqrt{\gamma}/N$)

$$\mathcal{S}_{\text{GH}} = -\frac{2}{16\pi G_4}\int d^3x\,\sqrt{\gamma}\,K \tag{14.9}$$

$$= -\frac{2}{16\pi G_4}\int dt_{\text{E}}\, d\theta\, d\phi\, f^{1/2}\left[f^{1/2}r^2\right]'\sin\theta\bigg|_{r=\infty} \tag{14.10}$$

$$= -\frac{\beta}{2G_4}f^{1/2}\left[f^{1/2}r^2\right]'\bigg|_{r=\infty} \tag{14.11}$$

$$\xrightarrow{r\to\infty}\ \frac{\beta}{2G_4}(-2r+\frac{3}{2}r_0)\bigg|_{r=\infty} \tag{14.12}$$

ギボンズ-ホーキング作用は発散する．

**発散の処理**

漸近的に平坦なブラックホールの場合，相殺作用 (7.52) を加えるという手法は使えない．かわりに，平坦な時空の自由エネルギーとの差を考える「レファレンス時空法」を使う（13.2 節）．

平坦な時空の周期 $\beta_0$ は，ブラックホールの温度にあわせる．ただし，ブラックホールのホーキング温度 $T$ にあわせるのではなく，半径 $r$ での「固有温度」(6.69) にあわせる：

$$T(r)=\frac{T}{f^{1/2}}\to\beta_0=\beta(r)=f^{1/2}\beta \ . \tag{14.13}$$

平坦な時空に対しては，$\sqrt{\gamma}K=2r\sin\theta$ となり，

$$\mathcal{S}_{\text{flat}} = -\frac{2}{16\pi G_4}\int d^3x\,\sqrt{\gamma}\,K \tag{14.14}$$

$$= -\frac{2}{16\pi G_4}\int_0^{\beta(r)} dt_{\rm E}\int d\theta\,d\phi\,2r\sin\theta\Big|_{r=\infty} \tag{14.15}$$

$$= -\frac{\beta}{2G_4}2rf^{1/2}\Big|_{r=\infty} \tag{14.16}$$

$$\xrightarrow{r\to\infty}\ \frac{\beta}{2G_4}(-2r+r_0)\Big|_{r=\infty} \tag{14.17}$$

以上より，RN ブラックホールのグランドカノニカル・ポテンシャル $\Omega$ は

$$\Omega := \frac{\mathcal{S}_{\rm E}-\mathcal{S}_{\text{flat}}}{\beta} = \frac{r_+ - r_-}{4G_4} \tag{14.18}$$

となる．

### 化学ポテンシャルについての注意

10 章では化学ポテンシャルを $\mu = A_t(r=\infty)$ と定義したが，正式には注意を要する．バルクのゲージ場にはゲージ不変性があるからである：

$$A_M(x^\nu, r) \to A_M(x^\nu, r) + \partial_M\Lambda(x^\nu, r) \tag{14.19}$$

通常 $A_r = 0$ のゲージをとるが，依然として

$$A_\alpha(x^\nu, r) \to A_\alpha(x^\nu, r) + \partial_\alpha\Lambda(x^\nu) \tag{14.20}$$

という不変性は残るので， $\mu = A_t(r=\infty)$ という定義はゲージ不変ではない．

1. 通常使われるのは，

$$A_t(r=r_+) = 0 \tag{14.21}$$

とさらにゲージ固定をして $\mu = A_t(r=\infty)$ を使う方法である*1)．

2. あるいはゲージ不変な定義

$$\mu = A_t(r=\infty) - A_t(r=r_+) \tag{14.22}$$

を使ってもよい．

前者を使う場合，式 (14.3) のかわりに

$$A_t = -\sqrt{r_+r_-}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_+}\right)\,, \tag{14.23}$$

$$\mu = \frac{1}{G_4}A_t(r=\infty) = \frac{1}{G_4}\sqrt{\frac{r_-}{r_+}}\,. \tag{14.24}$$

ここで，化学ポテンシャルをニュートン定数でスケールしたのは，3.3.2 節で $[Q] =$（長さ）という次元をとったことに起因する．

*1)　なお，式 (13.27) でも暗黙のうちにそうしている．

**熱力学量**

$\Omega$ を本来の変数 $(T,\mu)$ で書きかえる．

$$T = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2}\ , \tag{14.25}$$

$$\mu = \frac{1}{G_4}\sqrt{\frac{r_-}{r_+}}\ , \tag{14.26}$$

を使うと，

$$\Omega = \frac{(1-G_4^2\mu^2)^2}{16\pi G_4 T}\ . \tag{14.27}$$

これより，熱力学量は

$$S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_\mu = \frac{(1-G_4^2\mu^2)^2}{16\pi G_4 T^2} = \frac{\pi r_+^2}{G_4}\ , \tag{14.28}$$

$$Q = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_T = \frac{G_4\mu(1-G_4^2\mu^2)}{4\pi T} = \sqrt{r_+ r_-}\ , \tag{14.29}$$

$$M = \Omega + TS + \mu Q = \frac{r_+ + r_-}{2G_4}\ . \tag{14.30}$$

なお，$(r_+, r_-)$ のままで計算するときは，たとえば $\mu$ を固定しなければいけない．この場合，

$$d\mu = \frac{\partial\mu}{\partial r_+}dr_+ + \frac{\partial\mu}{\partial r_-}dr_- = 0 \to dr_- = \frac{r_-}{r_+}dr_+ \tag{14.31}$$

という条件が得られる．これを使うと，

$$d\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial r_+}dr_+ + \frac{\partial\Omega}{\partial r_-}dr_- = \frac{1}{4G_4}(dr_+ - dr_-) = \frac{r_+ - r_-}{4G_4 r_+}dr_+ \tag{14.32}$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial r_+}dr_+ + \frac{\partial T}{\partial r_-}dr_- = -\frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^3}dr_+ \tag{14.33}$$

したがって，

$$S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_\mu = \frac{\pi r_+^2}{G_4}\ . \tag{14.34}$$

同様に，$T$ 固定の場合は $dT=0$ から得られる $dr_- = (2r_- - r_+)dr_+/r_+$ を使えばよい．

## 14.2　閉じこめの簡単な例（8 章）

本文では閉じこめ相のモデルとして，$r = r_c$ で切りとった AdS 時空を考えたが，ここでは具体例として $S^1$ コンパクト化した $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論と，対応する時空を取りあげる．

**AdS ソリトン**

$\mathrm{SAdS}_5$ ブラックホールは

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-hdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{hr^2} , \tag{14.35}$$

$$h = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 , \tag{14.36}$$

で与えられた．$z$ に対して $z : 0 \to l$ と $S^1$ コンパクト化する．ユークリッド時間方向も $t_\mathrm{E} : 0 \to \beta = \pi L^2/r_0$ と周期化されている．

しかし式 (14.35) は漸近的に $\mathbb{R}^{1,2} \times S^1$ である唯一の解ではない．

$$z' = it , \quad z = it' \tag{14.37}$$

と「ダブル・ウィック回転」した解

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt'^2 + dx^2 + dy^2 + hdz'^2) + L^2 \frac{dr^2}{hr^2} \tag{14.38}$$

も同じ漸近構造をもつ．式 (14.38) を「AdS ソリトン」解と言う．

どちらもユークリッド幾何としては同じ時空だが，時間方向の $S^1$ と空間方向の $S^1$ が入れ替わっている．ユークリッド化すると，この点まぎらわしい．AdS ソリトンはブラックホールではない．むしろ $dz'^2$ につく因子 $h$ のため，ユークリッド化したブラックホール同様，時空が $r = r_0$ で終わっている．8 章の議論から，この時空は閉じこめ相をあらわす．

AdS ソリトンの場合，$t'$ の周期は任意に取れるが，SAdS ブラックホールと比べるため $t'_\mathrm{E} : 0 \to \beta$ ととる．一方，ホーキング温度導出の議論と同じ理由で，$z'$ の周期 $l$ に

$$l = \frac{\pi L^2}{r_0} \tag{14.39}$$

と条件がつくことになる．

AdS ソリトンに対して，$x$ 方向のクォーク・ポテンシャルを考える．ウィルソン・ループとしては，$t'$-$x$ 平面上のループである．公式 (8.20) を使うと，時空は $r = r_0$ で終わるので，

$$E_{\text{ゲージ}} \propto \sqrt{-g_{t't'}g_{xx}}|_{r_0}\, \mathcal{R} = \left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \mathcal{R} \tag{14.40}$$

と閉じこめポテンシャルが出る．

なお，8.2 節では SAdS ブラックホールでのウィルソン・ループを使って，デバイ遮蔽を議論した．ユークリッド幾何としては同じ時空ではあるが，ここでは考えているウィルソン・ループが違うことに注意しよう：

- AdS ソリトンの立場で，$t'$-$x$ 平面上のウィルソン・ループ（“temporal Wilson loop”）は，ブラックホールの立場では，$x$-$z$ 平面上のウィルソン・ループ（“spatial Wilson loop”）に相当する．

● 一方，デバイ遮蔽の導出では，ブラックホールの立場で $t$-$x$ 平面上の temporal Wilson loop を考えた．

**閉じこめ／非閉じこめ転移**

7.4 節で計算したように，SAdS ブラックホールの自由エネルギーは，

$$F_{\mathrm{BH}} = -\frac{V_3}{16\pi G_5}\frac{r_0^4}{L^5} = -\frac{V_3 L^3}{16\pi G_5}\pi^4 T^4 \tag{14.41}$$

である．ユークリッド幾何は同じなので，AdS ソリトンの自由エネルギーも同じ表式で与えられるが，$T$ の役割を果たすのが $1/l$ であることに注意すると，

$$F_{\mathrm{soliton}} = -\frac{V_3}{16\pi G_5}\frac{r_0^4}{L^5} = -\frac{V_3 L^3}{16\pi G_5}\frac{\pi^4}{l^4} \ . \tag{14.42}$$

自由エネルギーの差は，

$$\Delta F = F_{\mathrm{BH}} - F_{\mathrm{soliton}} = -\frac{V_3 L^3}{16\pi G_5}\pi^4 \left(T^4 - \frac{1}{l^4}\right) \ . \tag{14.43}$$

したがって，

● $T < 1/l$ ：AdS ソリトンが安定な状態で，閉じこめ相をあらわす．

● $T > 1/l$ ：ブラックホールが安定な状態で，非閉じこめ相をあらわす．

AdS ソリトンはブラックホールではないので，エントロピーをもたない（ブラックホールと比べると，$1/N_c^2$ のオーダーという意味）．これは閉じこめ相として適切でもあるが，このことは 1 次相転移も意味する．また，コンパクトな空間上での相転移という意味で，13.2 節のホーキング-ページ転移に似ている．

## 14.3　そのほかの時空の詳細（10 章）

### 14.3.1　SAdS$_{p+2}$ ブラックホール

$(p+2)$ 次元のシュワルツシルド AdS ブラックホール（プラナー・ホライズン）は

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_{p+2}}\int d^{p+2}x\,\sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) \ , \tag{14.44}$$

$$2\Lambda = -\frac{p(p+1)}{L^2} \ . \tag{14.45}$$

の解であり，

$$ds_{p+2}^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 d\boldsymbol{x}_p^2 \ , \tag{14.46}$$

$$f = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{p+1}\right\} \ . \tag{14.47}$$

熱力学量は，

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{p+1}{4\pi L^2} r_0 \ , && (14.48)\\
s &= \frac{1}{4G_{p+2}} \left(\frac{r_0}{L}\right)^p \ , && (14.49)\\
\varepsilon &= \frac{p}{16\pi G_{p+2} L} \left(\frac{r_0}{L}\right)^{p+1} \ , && (14.50)\\
P &= \frac{1}{16\pi G_{p+2} L} \left(\frac{r_0}{L}\right)^{p+1} = \frac{1}{p}\varepsilon \ . && (14.51)
\end{aligned}
$$

### 14.3.2 RN-AdS ブラックホール

RN-AdS$_5$ ブラックホール（プラナー・ホライズン）は

$$
\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} \left( R - 2\Lambda - \frac{L^2}{4} F^2 \right) \ . \tag{14.52}
$$

の解であり，

$$
\begin{aligned}
ds_5^2 &= -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 d\boldsymbol{x}_3^2 \ , && (14.53)\\
f &= \left(\frac{r}{L}\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{r_-}{r}\right)^2 \right\} \left\{ 1 + \frac{r_+^2 + r_-^2}{r^2} \right\} \ , && (14.54)\\
A_t &= -\frac{r_+}{L^2} \sqrt{3\alpha(1+\alpha^2)} \left( \frac{r_+^2}{r^2} - 1 \right) \ , && (14.55)
\end{aligned}
$$

$(\alpha := r_-/r_+)$．ホライズンは $r = r_+, r_-$ である．熱力学量は，

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{r_+}{2\pi L^2}(2 - \alpha^2 - \alpha^4) \ , && (14.56)\\
\Omega &= -\frac{V_3}{16\pi G_5 L} \left(\frac{r_+}{L}\right)^4 (1 + \alpha^2 + \alpha^4) \ , && (14.57)\\
s &= -\frac{1}{V_3} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V_3,\mu} = \frac{1}{4G_5} \left(\frac{r_+}{L}\right)^3 \ , && (14.58)\\
\mu &= A_t|_{r\to\infty} = \frac{r_+}{L^2} \sqrt{3\alpha(1+\alpha^2)} \ , && (14.59)\\
\rho &= -\frac{1}{V_3} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V_3} = \frac{1}{8\pi G_5} \left(\frac{r_+}{L}\right)^3 \sqrt{3\alpha(1+\alpha^2)} \ , && (14.60)\\
\varepsilon &= \frac{\Omega}{V_3} + Ts + \mu\rho = \frac{3}{16\pi G_5 L} \left(\frac{r_+}{L}\right)^4 (1 + \alpha^2 + \alpha^4) \ , && (14.61)\\
P &= -\frac{\Omega}{V_3} = \frac{1}{3}\varepsilon \ . && (14.62)
\end{aligned}
$$

RN-AdS$_4$ ブラックホール（プラナー・ホライズン）は

$$
\begin{aligned}
ds_4^2 &= -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 d\boldsymbol{x}_2^2 \ , && (14.63)\\
f &= \left(\frac{r}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) \left(1 + \frac{r_+^2 + r_+ r_- + r_-^2}{r^2}\right) \ , && (14.64)\\
A_t &= -\frac{2r_+}{L^2} \sqrt{\alpha(1+\alpha+\alpha^2)} \left(\frac{r_+}{r} - 1\right) \ , && (14.65)
\end{aligned}
$$

$(\alpha := r_-/r_+)$．熱力学量は，

$$T = \frac{r_+}{4\pi L^2}(3-\alpha-\alpha^2-\alpha^3)\ , \tag{14.66}$$

$$\Omega = -\frac{V_2}{16\pi G_4 L}\left(\frac{r_+}{L}\right)^3(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)\ , \tag{14.67}$$

$$s = -\frac{1}{V_2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V_2,\mu} = \frac{1}{4G_4}\left(\frac{r_+}{L}\right)^2\ , \tag{14.68}$$

$$\mu = A_t|_{r\to\infty} = \frac{2r_+}{L^2}\sqrt{\alpha(1+\alpha+\alpha^2)}\ , \tag{14.69}$$

$$\rho = -\frac{1}{V_2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,V_2} = \frac{1}{8\pi G_4}\left(\frac{r_+}{L}\right)^2\sqrt{\alpha(1+\alpha+\alpha^2)}\ , \tag{14.70}$$

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{V_2}+Ts+\mu\rho = \frac{1}{8\pi G_4 L}\left(\frac{r_+}{L}\right)^3(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)\ , \tag{14.71}$$

$$P = -\frac{\Omega}{V_2} = \frac{1}{2}\varepsilon\ . \tag{14.72}$$

### 14.3.3 M ブレーン

**ゼロ温度の場合**

M2 ブレーンは

$$ds_{11}^2 = f_2^{-2/3}(-dt^2+dx_1^2+dx_2^2)+f_2^{1/3}(dr^2+r^2d\Omega_7^2)\ , \tag{14.73}$$

$$f_2 = 1+\left(\frac{r_2}{r}\right)^6 . \tag{14.74}$$

5.4 節と同様，$r \ll r_2$ の near-horizon 極限では

$$ds_{11}^2 \to \left(\frac{r}{r_2}\right)^4(-dt^2+dx_1^2+dx_2^2)+\left(\frac{r_2}{r}\right)^2(dr^2+r^2d\Omega_7^2) \tag{14.75}$$

$$= \left(\frac{2\tilde{r}}{r_2}\right)^2(-dt^2+dx_1^2+dx_2^2)+\left(\frac{r_2}{2}\right)^2\frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2}+r_2^2d\Omega_7^2\ . \tag{14.76}$$

$r=(2\tilde{r}r_2)^{1/2}$ とした．AdS 半径 $L=r_2/2$ の $\mathrm{AdS}_4\times S^7$ に帰着する．ただし D3 ブレーンとは異なり， $S^7$ の半径 $L_{S^7}$ は $L_{S^7}=2L=r_2$ で与えられる．

M5 ブレーンは

$$ds_{11}^2 = f_5^{-1/3}(-dt^2+d\boldsymbol{x}_5^2)+f_5^{2/3}(dr^2+r^2d\Omega_4^2)\ , \tag{14.77}$$

$$f_5 = 1+\left(\frac{r_5}{r}\right)^3 . \tag{14.78}$$

near-horizon 極限では

$$ds_{11}^2 \to \left(\frac{r}{r_5}\right)(-dt^2+d\boldsymbol{x}_5^2)+\left(\frac{r_5}{r}\right)^2(dr^2+r^2d\Omega_4^2) \tag{14.79}$$

$$= \left(\frac{\tilde{r}}{2r_5}\right)^2(-dt^2+d\boldsymbol{x}_5^2)+(2r_5)^2\frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2}+r_5^2d\Omega_4^2\ . \tag{14.80}$$

$r=\tilde{r}^2/(2r_5)$ とした．AdS 半径 $L=2r_5$ の $\mathrm{AdS}_7\times S^4$ に帰着する．ただし $S^4$ の半径 $L_{S^4}$ は $L_{S^4}=L/2=r_5$ で与えられる．

**AdS/CFT 辞書**

M ブレーンの AdS/CFT 辞書の作り方は，5.4 節の D3 の場合と同様である．M2 の場合，ブレーンに垂直な空間次元は 8 である．したがって，ニュートン・ポテンシャルは空間 3 次元の $GM/r$ のかわりに，$G_{11}T_2/r^6$ となる．次元解析と $N_c$ 枚のブレーンがあることから，

$$
\begin{aligned}
r_2^6 &\simeq G_{11}T_2 \simeq N_c l_{11}^6 \,, && (14.81)\\
G_{11} &=: l_{11}^9 \,. && (14.82)
\end{aligned}
$$

ここで $l_{11}$ は 11 次元プランク長さである．超弦理論では，ストリング長さ $l_s$ という基礎的なスケールがあり，プランク長さ $l_{10}$ は $l_s$ で $l_{10}^8 \simeq g_s^2 l_s^8$ と与えられる．しかし，11 次元の場合，$l_s$ に相当するスケールがあるか不明なので，$l_{11}$ を使う．これらの関係から，

$$
\frac{r_2^9}{G_{11}} \simeq N_c^{3/2} \,. \qquad (14.83)
$$

これは D3 の場合，式 (5.42) の第 1 式に相当する式である．

M5 ブレーンの場合，ブレーンに垂直な空間次元は 5 である．したがって，ニュートン・ポテンシャルは $G_{11}T_5/r^3$ となり，

$$
r_5^3 \simeq G_{11}T_5 \simeq N_c l_{11}^3 \,. \qquad (14.84)
$$

したがって，

$$
\frac{r_5^9}{G_{11}} \simeq N_c^3 \,. \qquad (14.85)
$$

式 (14.83), (14.85) を係数まで注意してまとめたものは，

$$
N_c^{3/2} = \frac{\sqrt{2}\pi^5(2L)^9}{16\pi G_{11}} \quad (\mathrm{M2})\,, \qquad N_c^3 = \frac{\pi^5 L^9}{2\cdot 16\pi G_{11}} \quad (\mathrm{M5})\,. \qquad (14.86)
$$

**有限温度の場合**

有限温度の場合，M2 ブレーンは

$$
\begin{aligned}
ds_{11}^2 &= f_2^{-2/3}(-hdt^2 + dx_1^2 + dx_2^2) + f_2^{1/3}(h^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_7^2) \,, && (14.87)\\
h &= 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 = 1 - \left(\frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}}\right)^3 . && (14.88)
\end{aligned}
$$

M5 ブレーンは，

$$
\begin{aligned}
ds_{11}^2 &= f_5^{-1/3}(-hdt^2 + d\boldsymbol{x}_5^2) + f_5^{2/3}(h^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_4^2) \,, && (14.89)\\
h &= 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 = 1 - \left(\frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}}\right)^6 . && (14.90)
\end{aligned}
$$

$\tilde{r}_0 < \tilde{r} \ll L$ の near-horizon 極限で，M2, M5 はそれぞれ $\mathrm{SAdS}_4$, $\mathrm{SAdS}_7$ ブ

ラックホールに帰着する．熱力学量は，シュワルツシルド AdS ブラックホールの結果（14.3.1 節）をそのまま用いればよい．

M2 ブレーンの場合，

$$s = \sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \pi^2 N_c^{3/2} T^2 \ , \tag{14.91}$$

$$\varepsilon = \sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \pi^2 N_c^{3/2} T^3 \ . \tag{14.92}$$

M5 ブレーンの場合，

$$s = 2\left(\frac{2}{3}\pi\right)^6 N_c^3 T^5 \ , \tag{14.93}$$

$$\varepsilon = \frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\pi\right)^6 N_c^3 T^6 \ . \tag{14.94}$$

### 14.3.4 D$p$ ブレーン

**ゼロ温度の場合**

D$p$ ブレーンは

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= Z_p^{-1/2}(-dt^2 + d\boldsymbol{x}_p^2) + Z_p^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2) \ , & (14.95)\\ e^{-2\phi} &= Z_p^{(p-3)/2}, & (14.96)\\ Z_p &= 1 + \left(\frac{r_p}{r}\right)^{7-p} . & (14.97)\end{aligned}$$

$p \neq 3$ のとき，ディラトン $\phi$ がノントリビアルな振るまいをする．$p = 3$ では，ディラトンは定数なのでこれまで考慮してこなかった．

near-horizon 極限では，

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 \to& \left(\frac{r}{r_p}\right)^{(7-p)/2}(-dt^2 + d\boldsymbol{x}_p^2) + \frac{dr^2}{(\frac{r}{r_p})^{(7-p)/2}} \\ &+ r_p^2\left(\frac{r}{r_p}\right)^{(p-3)/2} d\Omega_{8-p}^2 \ . \end{aligned} \tag{14.98}$$

**AdS/CFT 辞書**

5.4 節の D3 の場合と同様である．係数まで注意してまとめたものは，

$$\begin{aligned} 16\pi G_{10} &= (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8 \ , & (14.99)\\ r_p^{7-p} &= \frac{(2\pi)^{7-p}}{(7-p)\Omega_{8-p}} g_s N_c l_s^{7-p} \ , & (14.100)\\ 2(2\pi)^{p-2} g_s\, l_s^{p-3} &= g_{\rm YM}^2 \ . & (14.101)\end{aligned}$$

$p = 3$ のとき，式 (14.99)-(14.101) は D3 ブレーンの場合の式 (5.42) に帰着する．また，式 (14.101) の $l_s$ 依存性は，$(p+1)$ 次元のゲージ理論では $g_{\rm YM}$ が次元をもつことを反映している．

### 有限温度の場合

有限温度では，

$$ds_{10}^2 = Z_p^{-1/2}(-hdt^2 + d\boldsymbol{x}_p^2) + Z_p^{1/2}(h^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2) \ , \quad (14.102)$$

$$h = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{7-p} . \quad (14.103)$$

near-horizon 極限での熱力学量は，

$$T = \frac{7-p}{4\pi} \frac{r_0^{(5-p)/2}}{r_p^{(7-p)/2}} \ , \quad (14.104)$$

$$s = e^{-2\phi} \frac{a}{4G_{10}} = \frac{1}{4G_{10}} \Omega_{8-p} (r_p r_0)^{(7-p)/2} r_0 \ , \quad (14.105)$$

$$\varepsilon = \frac{9-p}{32\pi G_{10}} \Omega_{8-p} r_0^{7-p} \ , \quad (14.106)$$

$$C = \frac{9-p}{4G_{10}(5-p)} \Omega_{8-p} (r_p r_0)^{(7-p)/2} r_0 \ . \quad (14.107)$$

比熱は $p=5$ で発散，$p>5$ で負になるので，以下では $p<5$ を考える．なお，ディラトンはニュートン定数の働きをすることから（5.2.4 節），エントロピーの面積則は

$$s = e^{-2\phi} \frac{a}{4G_{10}} \bigg|_{r=r_0} \quad (14.108)$$

となる．

ゲージ理論の変数で書き直すと，たとえばエネルギー密度は

$$\varepsilon \propto (g_{\mathrm{YM}}^2 N_c)^{(p-3)/(5-p)} N_c^2 T^{2(7-p)/(5-p)} \ . \quad (14.109)$$

### D$p$ ブレーンと M ブレーンの関係

熱力学量は，$p=1$ で $\varepsilon \propto N_c^{3/2} T^3$ となり，M2 ブレーンの振るまいと同じである．同様に，$p=4$ で $\varepsilon \propto N_c^3 T^6$ となり，M5 ブレーンの振るまいと一致する．これらの振るまいは偶然ではない．一部の D ブレーンは，11 次元の M ブレーンに起源をもつからである（図 14.1）．ここでは詳細に議論しないが，たとえば

- M5 でブレーン方向を $S^1$ コンパクト化したものが，10 次元タイプ IIA 超弦理論の D4 ブレーンである．
- M2 でブレーン方向を $S^1$ コンパクト化したものが，10 次元タイプ IIA 超弦理論のストリングである．このストリングは，T 双対性によりタイプ IIB 超弦理論のストリングになり，さらに S 双対性を使うとタイプ IIB 超弦理論の D1 ブレーンになる．

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{M 理論} & \mathrm{W} & \mathrm{M2} & \mathrm{M5} & \mathrm{KK6} \\
 & \swarrow\ \downarrow & \swarrow\ \downarrow & \swarrow\ \downarrow & \swarrow\ \downarrow \\
\text{タイプ IIA} & \mathrm{D0}\ \mathrm{W} & \mathrm{NS1}\ \mathrm{D2} & \mathrm{D4}\ \mathrm{NS5} & \mathrm{KK5}\ \mathrm{D6}
\end{array}
$$

**図 14.1** M ブレーンとタイプ IIA 超弦理論のブレーンとの関係.「$\swarrow$」はブレーン方向を $S^1$ コンパクト化した場合で,「$\downarrow$」はブレーンと垂直方向にコンパクト化した場合. NS1 はストリングをあらわす. D$p$ ブレーン以外にも, NS5 ブレーンや Kaluza-Klein $p$ ブレーンと呼ばれるものがある（KK$p$ と書いたもの）. W は重力波をあらわす.

このため, D ブレーンの near-horizon 極限も, M ブレーンの near-horizon 極限と関係する. 実際, 式 (14.98) は

$$
ds_{10}^2 \to \left(\frac{r}{r_p}\right)^{(p-3)/2} \left\{ \left(\frac{r}{r_p}\right)^{5-p} (-hdt^2 + d\boldsymbol{x}_p^2) + \frac{dr^2}{(\frac{r}{r_p})^2 h} + r_p^2 d\Omega_{8-p}^2 \right\} \tag{14.110}
$$

と書き替えられるが, 座標変換

$$
\frac{r}{r_p} = \left(\frac{2}{5-p}\frac{\tilde{r}}{r_p}\right)^{2/(5-p)}, \qquad \frac{r_0}{r_p} = \left(\frac{2}{5-p}\frac{\tilde{r}_0}{r_p}\right)^{2/(5-p)} \tag{14.111}
$$

をすると, 式 (14.110) の { } 内は

$$
\frac{ds_{10}^2}{\left(\frac{2}{5-p}\right)^2} \to \left(\frac{\tilde{r}}{r_p}\right)^2 (-hdt^2 + d\boldsymbol{x}_p^2) + \frac{d\tilde{r}^2}{\left(\frac{\tilde{r}}{r_p}\right)^2 h} + \frac{r_p^2}{\left(\frac{2}{5-p}\right)^2} d\Omega_{8-p}^2\ , \tag{14.112}
$$

$$
h \ = \ 1 - \left(\frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}}\right)^{2(7-p)/(5-p)} . \tag{14.113}
$$

$p = 1$ のとき $h = 1 - (\tilde{r}_0/\tilde{r})^3$ となり, 上の計量はプラナー $\mathrm{SAdS}_4$ をブレーン方向に沿って $S^1$ コンパクト化したものと一致する.（プラナー $\mathrm{SAdS}_4$ で, ブレーン方向の一つを単に無視すればよい.）同様に, $p = 4$ のとき $h = 1 - (\tilde{r}_0/\tilde{r})^6$ となり, プラナー $\mathrm{SAdS}_7$ をブレーン方向に沿って $S^1$ コンパクト化したものと一致する.