2012 年 12 月 3 日
（パリティ2009 年 8 月号所収）

曲がった時空でわかる場の量子論

イゴール・クレバノフ，フアン・マルダセナ
翻訳：夏梅 誠* （高エネルギー加速器研究機構）

強結合の場の量子論は難しいことで悪名高いが，重力理論との驚くべき対応によって新しい情報がもたらされつつある．

11 年前，数人の研究者が，一見して別種の理論のあいだに驚くべき対応があると提案した [1]．このような対応は双対性 (duality) として知られている．同じ物理を，２つの対になった記述で同等にあらわしているからである．記述の一方は，ある種の場の量子論 (QFT) である．たとえば，素粒子物理学での標準模型で出てくるのに似たヤン-ミルズ・ゲージ理論である．この理論は，平坦な d 次元時空で相互作用する粒子をあらわす．記述のもう一方は重力を含んだ理論であり，アインシュタインの一般相対論や，それを弦理論的に一般化したものである．この重力理論は，高次元時空上で定義されており，粒子の理論の d 次元，それと無限に伸びた余分な方向が一つ含まれている．さらに，この重力理論はしばしば有限の大きさを持った次元も含んでいる（たとえば球の形）．この対応は，文脈次第でゲージ・重力双対性，ゲージ・ストリング双対性，AdS/CFT（反ド・ジッター／コンフォーマル場の理論）対応と呼ばれている．専門用語の意味がわからなくても，ガッカリすることはない．この解説では，この双対性が何であり，またさまざまな問題を調べる上で，どのようにそしてなぜ役立つのかを簡単な言葉を使って説明したい．

この重力理論には，特殊な曲がった背景時空が登場し，時空はその周りでダイナミックにゆらいでいる．余分な次元方向の座標を y としよう．この時空での重力のポテンシャル・エネルギーは，y が無限遠に近づくにつれて急速に増加するようになっている．さきほどの対応を動機づけるために，重力のポテンシャル・エネルギーが $y = 0$ で最低となるような，一群の曲がった時空を考えることにしよう（図 1）．この対応によると，$d + 1$ 次元の重力理論のダイナミクスは，d 次元の QFT に含まれている．このこと自体は驚くべきことではない．ポテンシャル・エネルギーが，ある空間方向に沿って急速に増加する場合，低エネルギーでは理論のダイナミクスは実質的に残りの次元に制限されると期待されるからである．しかし，ゲージ・ストリング双対性はこの単純な直感を越えている．なぜなら，余分な次元方向に沿った運動でさえ，対応する d 次元の QFT で再現できるからである．

この双対性は，強く相互作用する QFT を調べる上でとくに役立つ．強結合 QFT に対応する重力理論は，時空の曲がりが弱く，一般相対論の方法でたやすく解析できるからである．一方，弱い曲率が強結合に対応するということは，双対性の証明が難しいことを意味する．強結合の場の理論で，信頼できる計算は難しいからである．にもかかわらず，対応を支持する数多くの証拠が研究者によって集められてきた．

かりにこの双対性が正しいと単純に仮定すると，双対性によって，強結合の場の理論にさまざまな新しい情報がもたらされる．この双対性を使って解ける理論はまだ限られており，既知

*原論文:Igor Klebanov and Juan Maldacena, “Solving quantum field theories via curved spacetime,” Physics Today, Jan. 2009.

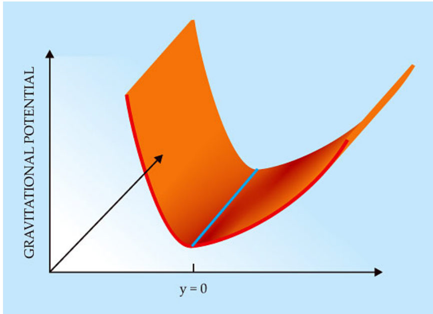

図 1: $d+1$ 次元の重力理論のポテンシャル・エネルギーの井戸のなかの粒子．座標 y は「余分な」次元方向をあらわす．かりに，ポテンシャル・エネルギーが y のどこかで深い谷底をもてば，低エネルギーの量子はあたかも残りの d 次元で動いているかのように振るまう．しかし，ゲージ・重力双対性はより遠大な主張をする．余分な次元方向の運動さえ，d 次元の粒子の理論で記述されるというのである．(図中文字：重力ポテンシャル)

の物理系に対する理論は含まれていない．しかし，解くことのできる理論のなかには，自然界で実現している理論の本質的な特徴をとらえているものもある．もっともよく研究された例は，強い力をあらわす量子色力学の親戚である．もっとも，この親戚には超対称性（ボゾンとフェルミオンがペアとなる対称性）があるので，表面的には QCD とはかなり異なっている．しかし，近年ブルックヘブン国立研究所の RHIC（リック）(Relativistic Heavy Ion Collider) で観測された，高温でのクォークとグルーオンの物理における新しい現象を調べるのに役立っている [2]．同様の理論が，標準模型を越えた物理を探る上でモデル作りの道具にもなっているし，物性であらわれる量子相転移点をもつ系のおもちゃのモデルにもなっている．

したがって，この双対性で解ける理論は，さまざまな実際の物理系への近似になっており，強結合の理論について直感を養う上で有用である．また，AdS/CFT 双対性は，ブラックホールの量子的な振るまいに関したある種の理論的なパラドックスを解明する上でも有益である．実際，もともとこの双対性は，そのような問題を調べる途上で発見された．さらに，この双対性は，理論物理の最前線で重要な問題になっている量子重力を調べる新しい方法を研究者に与えている．

どこにでも顔を出し難解な QFT

量子化された場のゆらぎを考える場の量子論は，特殊相対論と量子力学をあわせた結果である．これには多くの物理的な応用がある．素粒子物理学では，著名な標準模型の基礎となっており，電磁力，弱い力，強い力の完全な記述を与える．統計力学では，たとえば液体-気体相図上の臨界点近傍であらわれる二次相転移を記述するのに成功を収めている．この応用では，量子場のゆらぎは，問題となっている 3 次元系の統計力学的な長距離ゆらぎとみなされる．このため，場の理論は時間を含まない 3 次元空間で定義されている．一般に，ゆらぎの典型的な長さのスケールが系の微視的構成要素のサイズより大きい場合，多体系は場の理論でうまく記述される．温度がゼロであっても，温度や圧力を変化させるかわりに，ドーピング濃度のような物質の性質を変化させることで，長距離ゆらぎを起こすことができる．その結果が，量子臨界点として知られる振るまいである．

場の量子論は，しばしば解析が難しい．相互作用が弱いときは，摂動展開の最初のいくつかをファインマン・ダイアグラムを使って計算することができる．ファインマン・ダイアグラムは相互作用の一種の視覚化であり，粒子がほかの粒子を放出したり吸収したりしている．しか

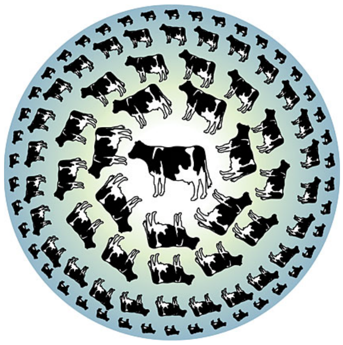

図 2: 双曲空間．もっとも簡単な負の曲率をもつ空間を射影したものである．それぞれの形は，座標不変な同じ「固有の」大きさをもっている．端に近づくにつれて小さくなっているのは，平坦なこのページに投影されているからである．似た現象は，標準的なメルカトル図法でも起こる．同じ固有の大きさをもっていても，物体は高緯度ほど広がって見える．双曲空間のこの射影は，エッシャーの版画，サークル・リミットを思い起こさせる．しかし，ここではエッシャーの入れ子になった魚のかわりに牛を使った．実際の牛を球で理想化するという物理学者によく知られたジョークを，読者に思い出させるためだ．反ド・ジッター／コンフォーマル場の理論対応では，双曲的な牛とでも呼ぶべきものを研究者はみつけている．

し，多くのおもしろい問題で結合定数はあまりに強く，そのような展開は可能ではない．

問題をさらに複雑にするのは，通常，結合定数がプロセスの典型的なエネルギーによることである．QCD では，摂動計算は高エネルギーで可能である．これは陽子の静止エネルギー約 1GeV よりずっと高エネルギーでは，結合定数が小さくなるからである．しかし，陽子の静止エネルギー程度のエネルギーでは結合定数は大きく，摂動計算が役にたたない．強結合領域での計算は難しい．陽子や重いメソンといったハドロンの質量を計算するちゃんとした一つの方法は，連続的な時空を不連続な格子点で近似するものである．しかし，格子 QCD と呼ばれるこのアプローチでは，膨大な計算パワーを必要とする (Carleton DeTar と Steven Gottlieb の記事．Physics Today, 2004 年 2 月号, 45 ページ）．さらに，高温 QCD で重要になる輸送係数のような量は，標準的な数値的手法では得ることができない．多くの物性の問題でも，強結合の場の理論が登場する．たとえ限られた種類の理論にしか応用できないとしても，強結合問題をあつかう解析的な手法はわずかで貴重である．そのような手法の一つが，ゲージ・重力双対性である．

AdS/CFT 対応

多くの応用で，場の理論は d 次元座標のスケーリング $x_\mu \to \lambda x_\mu$ のもとで近似的に不変である．(下付き文字の μ は 0 から $d-1$ までの値を取り，座標系をラベルする）たとえば，QCD は十分高エネルギーでほぼスケール不変であり，結合定数はエネルギーに対数的にしか変化しない．．２次相転移や量子相転移点近傍の物性系も，ほぼスケール不変である．スケーリングのもとで不変な理論は，しばしばほかの対称性も持っており，原点を無限遠点に移す時空反転 $x_\mu \to x_\mu/x^2$ もそうである．特殊相対論のローレンツ変換と並進変換を組みあわせて，これらの変換はコンフォーマル群をなす．この群のもとで不変な場の理論は，コンフォーマル場の理論と呼ばれる．

コンフォーマル不変性は，ゲージ・重力双対性を厳密に定式化する上で非常に役立つ．この不変性は，双対時空での幾何学的な対称性に翻訳されるからである．場の理論側で d 次元がすべて空間的な場合，双対空間はなじみ深い $d+1$ 次元の双曲空間，ロバチェフスキー空間にな

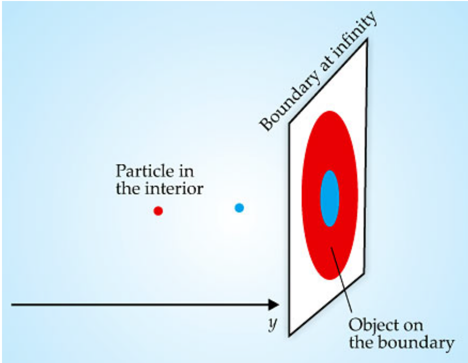

図 3: コンフォーマル場の理論に対となる重力理論での余分な次元方向の意味．CFT での物体は，高次元重力理論の境界に閉じこめられているとみなすことができる．青と赤の円盤は，スケール変換分だけ違う CFT の２つの物体をあらわす（つまり，すべての方向に対して定数倍）．重力理論では，２つの物体は同じ粒子だが，座標 y であらわされる余分な次元方向で異なる２点にあると記述される．境界では大きな物体に相当する赤の点は，y の小さな場所にある．(図中文字：時空内部での粒子，無限遠の境界，境界上の物体)

り，これは一定の負の曲率を持っている．図２はこの空間を射影したものである．CFT が $d-1$ 個の空間次元と時間次元１つで定式化されている場合，適切な対称性を持った $d+1$ 次元時空はただ一つしかなく，反ド・ジッター空間と呼ばれる．一定の負曲率時空についての初歩については，ボックス１を見よ．

$d+1$ 次元 AdS 時空の計量，線素は

$$ds^2 = R^2[e^{2y}(-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{d-1}^2) + dy^2] \tag{1}$$

で与えられる．ここで，無限に伸びる余分な次元方向 y はすべての実数を取り，R は曲率半径である．AdS 時空に対応する CFT は，座標 $x_0, \ldots, x_{d-1}$ で指定される平坦な d 次元時空上で定式化されている．この d 次元時空は，$d+1$ 次元 AdS 時空の $y=\infty$ での境界にあるとみなせる．QFT のスケール不変性は，AdS 計量の $x_\mu \to \lambda x_\mu, y \to y - \ln\lambda$ という対称性に翻訳される．

重力理論に出てくる余分な次元の起源は何であろうか？　CFT で，$d-1$ 空間座標で指定される場所に局在した，ある大きさをもった状態を考えよう．スケール変換を施すことで，あらゆる大きさの状態を得ることができ，状態のエネルギーは大きさに反比例する．図３に示されているように，重力理論の余分な座標 y は，CFT の状態の大きさをあらわしている．より正確には，大きさは e^{-y} に比例している．

アインシュタインの重力理論では，計量の時間-時間成分 g_{00}（つまり，線素で dx_0^2 にかかる部分）によって，質量 m の静止した物体のポテンシャル・エネルギー V が与えられる：

$$V = mc^2\sqrt{-g_{00}}$$

ここで，c は光速をあらわす．場が弱いとき，なじみ深いニュートン的なポテンシャル・エネルギー $m\phi$ を使うと，

$$g_{00} \approx -(1 + 2\phi/c^2)$$

となる．AdS 時空では，V は e^y に比例するので，物体は小さな y へと動く．双対関係にあるスケール不変な場の理論では，局在した場の配位は拡がり，エネルギーが下がることに対応する．

相関関数

CFT では，最も重要な観測量は局所的なオペレーター同士の相関関数である．たとえば，2 点相関関数は，離れた 2 点のオペレーターの積をあらゆる場の配位について適切に平均をとったものである．相転移の理論では，相関関数には臨界指数やほかの有益な情報が含まれている．

どんな場の理論にも，対称的なストレス-エネルギー・テンソルが普遍的なオペレーターとして存在する．電磁気学の場合と同様，時間-時間成分 T_{00} が場のエネルギー密度を与え，時間-空間成分 T_{0i} は運動量密度，空間-空間成分 T_{ij} は圧力やずりの力をあらわしている．

驚くことに，双対な重力理論で $T_{\mu\nu}$ の相関関数を計算するには，AdS 時空でグラビトンの伝搬を考える必要がある．グラビトンは重力を伝えるので，$d+1$ 次元の双対理論は重力的でなくてはいけない．相関関数が $T_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ を一つ含むことは，グラビトンが AdS 時空の境界上の点 $\mathbf{x}$ から放出されることに相当する．ストレス-エネルギー・テンソルの挿入に当たるグラビトン同士は，AdS 時空内部で出会い，一般相対論のルールに従って相互作用を起こす．したがって，場の理論でのストレス-エネルギー成分の 2 点相関の計算は，曲がった時空の内部でのグラビトンの散乱問題に翻訳される．QFT のほかのオペレーターは，重力理論のほかの場に対応し，2 つの理論には一対一対応がある．これは，場の理論と重力の言葉を関係づける「辞書」である．現在までにみつかっているもっとも正確な対応では，CFT は AdS 時空上で定式化された弦理論に写像される．弦理論が一般相対論で記述されるのは，低エネルギーだけである．高エネルギーでは，ストリングの励起から来る多数の状態が理論に追加される．

CFT では，コンフォーマル対称性によって，ストレス-エネルギー・テンソルの 2 点相関関数の関数形は定まってしまう．しかし，関数の係数，N_{eff} は CFT の実質的な自由度を数える．重力理論では，この係数は $R^{d-1}/\hbar G_N$ に比例する（G_N は $d+1$ 次元のニュートンの定数，$\hbar$ はプランク定数.）この係数の逆が，双対な重力理論での重力の有効結合定数にあたる．したがって，もしこの重力理論が弱結合ならば，QFT には多数の自由度があることになる．

このような QFT は，QCD のカラーの数を 3 つから大きな N へと一般化することで自然にあらわれる．こういった理論でカラーの力を伝えるグルーオンは，電磁気力を伝える光子に似ている．ただ電荷を帯びていない光子とは違って，グルーオンはそれ自身がカラーを持っている．また，N^2-1 個存在するため，N_{eff} は N^2 程度になる．

しかし，重力による記述が簡単になることを保証するには，N_{eff} が大きいだけでは不十分である．重力理論にはスピンの大きな軽い粒子は現れない．一方，弱結合の QFT には，しばしばスピンの大きいオペレーターが登場する．この食い違いは，相互作用の強さ g（電磁気学での電荷 e に対応するもの）を強くすることでなくすことができる．AdS 時空の曲率半径は，$(g^2N)^{1/4}$ と弦理論の基礎的な長さスケールをかけたものに比例する．このことから，より強い相互作用によって双対重力理論が簡単化されることがわかる．つまり，場の理論が $g^2N \gg 1$ であれば，対応する重力理論は弱結合であり，一般相対論の手法を使って安全に調べることができる．逆に，もし場の理論が弱結合な場合（$g^2N \ll 1$），曲率半径がストリング長さより小さくなってしまう．このような領域では，一般相対論はよい近似ではない．

したがって，もっとも扱いやすい対応は，カラーの状態が多い強結合 CFT である．さいわいなことに，多くのそういう理論が作られてきた．もっとも単純でもっとも調べられているのは，4 次元時空のゲージ理論で，ボゾンとフェルミオンをペアにする超対称性が可能な限り多い場合である．超対称性はゲージ・重力双対性には基本的なわけではないが，解析を簡単にしてくれる手法である．

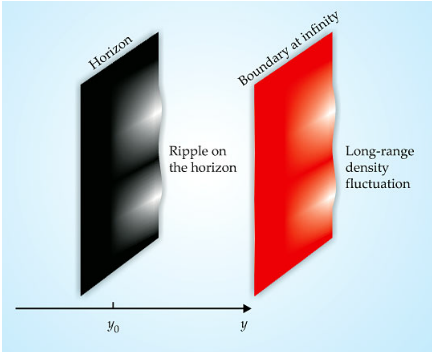

図 4: ブラックホールの双対性．有限温度にある強結合場の量子論は，ブラック・メンブレーン（ブラックホールの高次元版）と関係している．強結合 QFT の熱力学的性質は，ホライズンの幾何的性質と結びつく．たとえば，熱力学系で密度の長距離ゆらぎは，ブラック・メンブレーンを取りまくホライズン上のさざ波に対応する．さざ波はブラック・メンブレーンに吸収される．これが熱場の理論での熱化に相当する．(図中文字：ホライズン，ホライズン上のさざ波，無限遠の境界，密度の長距離ゆらぎ)

ブラックホールと熱場の理論

一般相対論で興味をそそる一面は，ホライズンで囲まれたブラックホールが存在することである．ホライズンを通過したどんな古典論的な物体も戻ってはこられないが，ホーキングはホライズンそのものがある特徴的な温度 T で放射することを示した．いま，ブラックホール（高次元ではブラック・メンブレーンの場合もある）から離れた場所で，$d+1$ 次元時空は AdS 時空のようにみえるとしよう．図 4 に示されているように，このブラック・メンブレーンのホライズンは場所 y_0 にあり，$d-1$ 空間次元方向に拡がっている．ブラック・メンブレーン時空の場合でも，重力理論は d 次元の QFT であらわされる．しかし，この場合 QFT はホライズンと同じ温度 T に熱せられている．

ブラックホールと強結合 QFT をつなぐ双対性から，多くの興味深い示唆がえられる．ベケンシュタインとホーキングが示したように，ブラックホールはホライズンの面積に比例したエントロピーをもつ．強結合の QFT に対して，有限温度のエントロピーを計算することは一般に困難である．粒子の相互作用が，自由エネルギーそしてエントロピーに重要な寄与をするからである．しかし，この QFT に双対な重力理論があれば，単にホライズンの面積を計算することでエントロピーが求まる．

ホライズンの「黒さ」は，QFT の何に対応しているのだろうか？　ブラックホールは粒子を効率的に吸収する．ブラックホール時空のどんなゆらぎも，時間とともに指数関数的に減少する．ホライズン近傍の波は，ブラックホールに飲みこまれるからである．有限温度の QFT の立場では，これはゆらぎの急速な熱化にあたる．

強結合 QFT の熱力学量や輸送係数も，ブラックホール幾何学の性質に関係している．このため，ずり粘性率 (shear viscosity) のような輸送係数は，重力理論では扱いやすい．ブラックホール幾何で，ある種の波動方程式を解けばいいだけである．この方針に沿った計算は，実験的にも実現可能な複雑な有限温度 QCD の問題に直感を養うのに使われている．RHIC では新しい状態の物質が作られていると信じられており，もともとクォーク・グルーオン・プラズマと呼ばれてきた．RHIC 実験では，粘性が予想よりはるかに小さいことから，この物質はプラズマというより液体により近い振るまいをしているということがはっきりした [2]．興味深いことに，ゲージ・重力双対性が応用可能なときもまた，小さな値の粘性を予言する（文献 [3] および Physics Today, 2005 年 5 月号, 23 ページ）．また，高エネルギーのクォークが媒質中を運

動するときに，どのようにエネルギーが減少するか，といった量なども計算可能である．有限温度のゲージ・重力双対性が，実験的な観測可能性がある新しい強結合現象研究の動機になっている例もある．

閉じこめのポテンシャル・エネルギー

ゲージ・ストリング双対性は，QCD の深い謎であるカラーの閉じこめについても新しい洞察をもたらしている．QCD はカラーをもった基本粒子（クォークとグルーオン）で定式化されているが，それらは自由粒子としては観測されていない：陽子，中性子，パイオンといったカラー中性の粒子に常に閉じこめられている．クォークとグルーオンでどうハドロンができているのかは，中性子と陽子でどう原子核ができているのかというのとは根本的に違う．核子はしばしば強く結合しているものの，原子核を十分強く衝突させてやれば，自由にすることができる．ところが，どんなに強くハドロンを衝突させても，別のハドロンに崩壊するだけで，クォークとグルーオンがばらばらになるわけではない．ゲージ理論の格子計算もこの現象を支持するが，理論的な証明はいまだにない．

ここでもまた，ゲージ・ストリング双対性は新しい知見をもたらした．QCD に双対な弦理論はみつかってはいないものの，ある種の閉じこめのゲージ理論には扱いやすい双対な重力理論がある [4]．これらの理論はスケール不変ではない．こういった理論には優先的な長さのスケールがあり，もっとも軽い束縛状態の大きさ程度で与えられる．たとえば，QCD ではこのスケールは陽子半径 10^{-15} m ほどである．QFT がスケール不変ではないとき，双対時空は一定でない曲率を持ち，計量は「ワープした」形をとる：

$$ds^2 = e^{2A(y)}(-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{d-1}^2) + dy^2 \tag{2}$$

このような時空では，質量をもった粒子の重力エネルギーは $e^{A(y)}$ に比例する．関数 $A(y)$ の形は，y が大きなところでは AdS 計量のようにエネルギーが e^y に近づくが，y が小さいところではもっと複雑である．この関数は $y = 0$ で最小値 $e^{A(0)}$ をとる．したがって，質量をもった粒子は重力井戸の底に落ちていき，そこで $e^{A(0)}$ に比例する有限のエネルギーをもつ．QCD では，陽子質量の大部分は閉じこめの効果から来ることに注意してほしい．クォークの質量は，比較すると小さな寄与に過ぎない．

閉じこめが起こる理論で，重いクォーク・反クォークのペアを離したとしよう．研究者たちは，そのとき単位長さあたり一定のエネルギーをもち，特徴的な太さをもつカラー電気力線の束（カラー・フラックス・チューブ）が作られると提案してきた．しばしば閉じこめのストリングと呼ばれるこの物体は，数値計算でみられるものである．スピンの大きなメソンの質量は，このようなストリングが回転していると考えることでうまく説明できる．(弦理論がどのように QCD につながるか，ボックス２をみよ)

このような閉じこめのフラックス・チューブは，ゲージ理論に対となる弦理論ではどのようにあらわれるのだろう？　答は意外なほど簡単である．図５で示されているように，これはポテンシャル・エネルギーの底にある（弦理論の）ストリングにほかならない．実際，計量 (2) の空間方向の一つに沿って伸び，一定の y にあるストリングのエネルギーは，単位長さあたり $T_s e^{2A(y)}$ に比例する．ここで T_s はストリングの張力である．このようなストリングはひとりでに重力ポテンシャルの井戸の底に落ちこみ，ゼロでない張力 $T_s e^{2A(0)}$ をもつ．閉じこめのゲージ理論はいずれもフラックス・チューブを作ることが期待されているので，双対理論は単純に重力場の理論で与えられるわけではない—弦理論を含んでいるはずである．

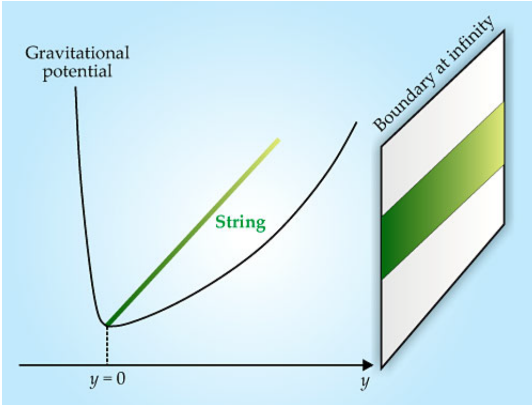

図 5: クォーク閉じこめを起こす弦理論．重力ポテンシャル・エネルギーの井戸の底に落ちた長いストリングが，境界上の閉じこめのゲージ理論にあらわれるカラー・フラックス・チューブをうまくあらわす．このようなストリングによって，クォークと反クォークのポテンシャル・エネルギーが距離とともに直線的に増加し，２つの粒子が自由になることを妨げている．ゲージ理論でのストリングの太さは，ストリングが y 方向のどこにあるかと関係する．(図中文字：重力ポテンシャル，ストリング，無限遠の境界)

さまざまな応用

ゲージ・重力双対性には，さまざまな理論的な応用があり，その応用範囲は到達可能なもっとも高いエネルギーからもっとも低いエネルギーまでおよぶ．高エネルギー極限では，研究者は約 10^{19} GeV というプランク・スケールの物理を探究している．このスケールでは，必然的に時空幾何の量子化されたゆらぎを扱わなければいけない．N 個のカラーをもつゲージ理論に双対な理論は，曲がった時空での量子重力であり，有効重力結合定数は $1/N$ 程度になる．これらのゲージ理論は，通常の量子力学に従い，波動関数はユニタリーな時間発展をする．したがって，一般に量子重力，とくにブラックホールはなぜ情報を破壊しないのかという，もっとも強力な議論が双対性によって与えられる．

低エネルギーの極限では，しばしば物性物理の低温領域で QFT が現れる．もっとも研究されている例は，量子相転移点での系の振るまいに関わる [5]．この場合，理論は温度ゼロ，スケール不変であり，２次相転移を記述する場の理論と似ている．ただし，d 次元空間ではなく，d 次元時空で定式化されている点が違う．量子相転移で興味ある量は，温度ゼロないしは有限温度での輸送係数の計算である．扱いやすい双対重力時空をもった理論は，そういった計算が強結合でできる「おもちゃのモデル」とみなせる．これまでのところ，そういった扱いやすい理論は，現実の世界の物性系には対応しないが，こういった系の重要な面をとらえているかもしれない．量子相転移点近くでの輸送現象のこの方向性での研究については，文献 [6] をみよ．

素粒子物理にとって，今はわくわくする時代である．セルン (CERN) の大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) がもうすぐピークの衝突エネルギー 14 TeV に達する．素粒子物理の現在の標準模型が高エネルギーの自然界についての最終的な答ではないことを，我々は確信している．そして LHC 実験が，物理の新しい階層に光を照らすかもしれない．素粒子のモデルを作る人々は，多くのさまざまなシナリオを調べているが，しばしば強結合の QFT にちなんだ困難に直面する．ゲージ・重力双対性によって，別な方法で強結合理論を調べることが可能になる．そして，実際，式 (2) の「ワープした」AdS ふうの幾何は，さまざまな現象論的理由から導入され，とくになぜ弱い相互作用のスケールが，プランク・スケールより著しく小さいかを説明するためにも使われている [7]．

ゲージ・重力双対性によって，場の理論研究者は弱結合を越えて新しい可能性を探求することができた．ある種の強結合の場の理論は，いまや曲がった双対時空によって解くことができ，興味深い物理系について「双曲的な牛」近似を与える．将来，ゲージ・重力双対性と自然界の間により密接な関係がみつかることに，私たちは楽観的である．

ボックス１：反ド・ジッター時空

反ド・ジッター時空は，時間方向１つと一般に d 個の空間方向をもった時空である．しかし，AdS 時空への準備として，まず曲がった２次元面を考えよう．

２次元の単位球は，正の曲率を持ち，３次元ユークリッド空間内の原点から等間隔の点の集合として定義される：

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

ここで R は球の半径である.（簡単化のため，このボックスの終わりまで単位球とその類似物を考える）計量，線素は，座標が無限小だけ変化したときの無限小の距離を与える．球の場合，ユークリッド空間の計量

$$ds^2 = (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2$$

から座標を球に制限することによってえられる．標準的な極座標 θ と方位角 φ を使うと（つまり $X = \sin\theta\cos\varphi, Y = \sin\theta\sin\varphi, Z = \cos\theta$ とおくことで），球の計量

$$ds^2 = (d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2$$

がえられる．

負の曲率をもった面，２次元双曲空間をあらわすためには，いくつか符号をかえるだけでいい．つまり，

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1, \quad ds^2 = (dX)^2 + (dY)^2 - (dZ)^2$$

である．座標 ρ と φ を $X = \sinh\rho\cos\varphi, Y = \sinh\rho\sin\varphi, Z = \cosh\rho$ として定義すると，計量

$$ds^2 = (d\rho)^2 + \sinh^2\rho(d\varphi)^2$$

がえられる．上の定義には負の符号が出てくるものの，２次元双曲空間の計量自体は正の符号だけをとることに注意してほしい．双曲空間は２次元空間であり，時空ではない．

同様にして，２次元 AdS 時空は

$$-X^2 - Y^2 + Z^2 = -1, \quad ds^2 = -(dX)^2 - (dY)^2 + (dZ)^2$$

として定義される．座標 x_0 と y を $X = e^y x_0, 2Y = e^{-y} + e^y(1 - x_0^2), 2Z = e^{-y} - e^y(1 + x_0^2)$ として定義することで，計量は

$$ds^2 = -e^{2y}(dx_0)^2 + dy^2$$

となる．第１項の負の符号は，x_0 が時間変数であることを示す．本文中の式 (1) は，一定の負の曲率半径 R をもった $d+1$ 次元 AdS 時空をあらわす．

なお，AdS/CFT 対応で出てくる重力理論では，重要なのは AdS 時空そのものであり，AdS 時空が埋めこまれている平坦な空間自体はなんの役割も果たさない．

ボックス２：弦理論と QCD

弦理論と強い相互作用の関係は，量子色力学 (QCD) 自体より古い．実際，弦理論は，ハドロンのスペクトルや相互作用を記述するために 1960 年代の終わりに生まれた．動機の一部は実験的なものだった．観測されたハドロンの状態のなかには，スピンが大きくなるにつれて質量の二乗が直線的に増加するものがあった．相対論的なストリングによって，この関係は説明できた．しかし，ストリング模型が困難に突き当たるのにそう時間はかからなかった．もっとも簡単な弦理論は，10 次元時空（ボゾンとフェルミオンを含んだ場合）ないしは 26 次元時空（ボゾンだけを含んだ場合）でのみ定義できて，量子重力を含んでいなければいけなかったからである [8]．

さらに，深部非弾性散乱実験 (DIS) によって，ハドロンのなかにより基本的な構成物の兆候がみられ，これはストリングによる記述と相いれないようにみえた．また，これらの実験は重要な情報を与えてくれた：強い相互作用は高エネルギーで弱くなるという性質である．漸近的自由性というこの性質をもった 4 次元時空での理論として，唯一知られている理論がヤン-ミルズ・ゲージ理論である (Physics Today, 2004 年 12 月号, 21 ページ)．1970 年代初頭，SU(3) ヤン-ミルズ・ゲージ理論（すなわち QCD）が強い相互作用を完全に記述するとして提案され，いまでは標準模型に不可欠となっている．しかし，低エネルギーで QCD の結合定数 g は強くなるので，解くのは困難である．

しかし，ストリングが助けになるかもしれない．QCD では，カラー・フラックス・チューブとしてストリングが作り出されることが，数値格子計算で確立している．また，g^2N を保ちつつ，カラーの数を 3 から大きな数 N にすると，QCD それ自身が簡単になる [9]．この極限では（large-N 極限），簡単な議論からゲージ理論が一種の弦理論になり，ストリングがちぎれたりくっついたりする相互作用は $1/N$ で抑えられる．しかし，この議論はどのような弦理論が出てくるかまでは特定しない．研究者は当初，この弦理論はゲージ理論と同じ 4 次元時空で定義されるべきだと仮定していた．しかしポリャコフ (Polyakov) は，少なくとも 5 次元の曲がった時空が必要だと予想した [10]．

一方，研究者は弦理論を量子重力理論として調べ続けた．彼らはとくに 10 次元の弦理論を熱心に調べ，多くの性質をくわしく理解してきた．1990 年代半ば，ポルチンスキー (Polchinski) は，D ブレーンと呼ばれる空間的に伸びたさまざまな物体が弦理論にあることを発見した [11]．D ブレーンの一種は，ちょうどこの世界のように，無限に広がった空間次元を 3 つもつ．この D ブレーンが N 枚重なると，低エネルギーでは QCD 同様，4 次元の $SU(N)$ ゲージ理論であらわされる（ただし，超対称性とコンフォーマル不変性を余分にもつ.）しかし，D ブレーンのこの集まりは，それが埋めこまれている 10 次元時空を曲げてしまう．D ブレーンの近くでは，次元の半分が 5 次元の反ド・ジッター時空であり，残りが 5 次元球である．したがって，D ブレーンのダイナミクスの一つの見方として，4 次元ゲージ理論が使える．そしてもう一方の見方として，曲がった時空での 10 次元の弦理論が使える (Physics Today, 1998 年 8 月号, 20 ページをみよ)．これら 2 つの理論が完全に等価だという予想が，ゲージ・ストリング双対性のもっともしっかりした例である．この対応の最近のテストとして，ある種の量が g^2N の関数として超対称ゲージ理論で計算された [12]．驚くことに，彼らは物性物理で現れるスピン鎖を調べるのにしばしば用いられるベーテ仮設に頼ることになった (Murray Batchelor の記事をみよ．Physics Today, 2007 年 1 月号, 36 ページ)．g^2N が大きいとき，結果は弦理論からの予言と一致した．

同様のゲージ・ストリング双対性は，スケール不変ではない理論でもみつかっているが，QCD 自体は今のところ解かれていない．漸近的自由性により，QCD は高エネルギーで弱結合になる． この弱結合 QCD に双対な時空は大きく曲がった時空となり，双対な重力理論では曲率の

高次の項が最低次よりも重要になる．もっとも，高エネルギーでは双対計算に頼る必要はない．理論は弱結合だからである．一方で，低エネルギーの QCD は，単純な摂動計算が破綻する程度には強結合になるが，双対な時空の曲がりを十分小さくするほどには強結合ではない．このため，一般相対論だけでは双対理論を調べるのに十分ではない．弦理論のすべての道具立てが必要になるが，あまりにも難しくて今のところ組みこむことができない．しかしながら，一般的に言って，過去 10 年間に発展してきた道具によって，強結合ゲージ理論をより理解できるようになった．

参考文献

[1] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998); J. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999); S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B428**, 105 (1998); E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998).

[2] I. Arsene et al., BRAHMS collaboration, Nucl. Phys. **A757**, 1 (2005); B. B. Back et al., PHOBOS collaboration, Nucl. Phys. **A757**, 28 (2005); J. Adams et al., STAR collaboration, Nucl. Phys. **A757**, 102 (2005); K. Adcox et al., PHENIX collaboration, Nucl. Phys. **A757**, 184 (2005).

[3] G. Policastro, D. T. Son, A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **87**, 081601 (2001).

[4] I. R. Klebanov, M. J. Strassler, J. High Energy Phys. **2000** (08), 052 (2000).

[5] S. Sachdev, Quantum Phase Transitions, Cambridge U. Press, New York (1999).

[6] C. P. Herzog, P. Kovtun, S. Sachdev, D. T. Son, Phys. Rev. **D75**, 085020 (2007).

[7] L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).

[8] T. Yoneya, Lett. Nuovo Cimento **8**, 951 (1973); J. Scherk, J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B81**, 118 (1974).

[9] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B72**, 461 (1974).

[10] A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **68**, 1 (1998).

[11] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995).

[12] N. Beisert, B. Eden, M. Staudacher, J. Stat. Mech. **2007**, P01021 (2007).