

(特集)

ブラックホールはもっとも完全流体に近い？

*高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 理論センター 夏梅誠†

Black hole is closest to a perfect fluid?

Makoto NATSUUME, KEK Theory Center, Institute of Particle and Nuclear Studies, High Energy Accelerator Research Organization

1 はじめに

流体力学とこれまであまり縁のなかつた分野で、近年流体力学が盛んに議論されている。原子核物理や素粒子論といった分野である。なかでも、素粒子論の一分野、「超弦理論」での研究が1つの契機となり、活発におこなわれるようになった。自然界には、重力、電磁気力、弱い相互作用、強い相互作用という4つの基本的な力がある^{注1)}。超弦理論は、これらの力を統一的にあらわす統一理論の最有力候補である。その統一理論の研究者が、流体力学を研究しているとは、いったい何が起きているのだろうか？ 本解説では、この動きについて解説したい。

カギとなるのは、「AdS/CFT 双対性」として知られる考えである^{注2)}。AdS や CFT という言葉の意味については、現時点では気にする必要はない。AdS/CFT は、一言で言ってブラックホールが「ある種の」流体と等価だという考えである。「ある種の」の意味については、おいおい述べていく。ブラックホールと流体の話というと、ついついブラックホールや中性子星といった天体まわりの流体の話（降着円盤など）を思い浮かべるかもしれないが、そういう話ではない。ブラックホールそのものが、一種の低エネルギー極限で流体と等価だという話である：

$$(\text{ブラックホール}) = (\text{ある種の流体}) \quad (1)$$

ブラックホールと流体が等価だということにもかかわら

*〒 305-0801 茨城県つくば市大穂 1-1

†E-mail: makoto.natsuume@kek.jp

注1) このうち強い相互作用は、5節で登場するグルーオンによって運ばれる力である。

注2) AdS/CFT 双対性は、「ゲージ・重力双対性」、「ホログラフィック理論」などさまざまな呼ばれ方をしているが、いずれも同じものを指す。

ず、一見するとこの2つは全然似ていない。一般相対論によると、重力により時空は曲がりうるが、ブラックホールはその顕著な場合である。しかし、AdS/CFT は、そのブラックホールが曲がっていない平坦な時空での流体と等価だと主張している。さらに、この流体は我々が住むような4次元時空の流体なのだが、ブラックホールはそうではない。このブラックホールは我々の住む宇宙にあるようなブラックホールではなく、仮想的な宇宙のブラックホールである^{注3)}。

しかし、話をあまり先走らず、まずブラックホールの初歩から説明していこう。そして、

- ブラックホールと流体が等価だとなぜ考えるのか？
- それはどのような流体か？
- ブラックホールを使うことで何が言えるのか？ そのご利益は？
- そのような流体は観測可能か？

といった点に焦点をあてて、AdS/CFT を説明していく。その過程で、式(1)をより精密化していきたい。なお、解説中やや進んだトピックには、「◆」をつけた。

2 ブラックホールと熱力学、流体力学

大ざっぱに言って、ブラックホールとは重力が強くなり、光さえも外に出られない領域のことである。そして、ブラックホールの境界を「ホライズン」と呼ぶ。

物体を星の表面から投げ上げたとき、速度が小さいと重力によって星に戻ってしまう。ニュートン力学では、

注3) 典型的には5次元時空で、負の「宇宙定数」をもつ宇宙である。正の宇宙定数は「ダーク・エネルギー」とも呼ばれ、近年宇宙論で盛んに議論されている。

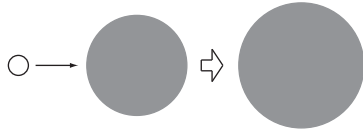


図1 物質がブラックホールに落ちこむとブラックホールは大きくなる。

星の重力から逃れるためには脱出速度を超えている必要がある。脱出速度は、エネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r_0} \quad (2)$$

によって決まる (G :ニュートン定数)。星の質量 M が同じ場合、半径 r_0 が小さくなるほど、星表面の重力は強くなるので、脱出速度も大きくなる。星の半径がきわめて小さくなると、ついには脱出速度が光速 c になる。このとき、どんな物体であっても重力からは逃れられない。上の式で $v = c$ とすると、このときの半径は、

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \quad (3)$$

で与えられる^{注4)}。これがホライズンの半径に相当する。正確にはこのような議論は誤っており、ブラックホールを正確に理解するには一般相対論が欠かせないが(その一例として、ホライズン半径の意味そのものの違いが挙げられる。この点については注6)をみよ)、式(3)は一般相対論のもっとも単純なブラックホール、シュワルツシルド・ブラックホールでもそのまま成りたつ。

さて、ブラックホールの性質は、熱力学を強く想起させる。ホライズンの半径はブラックホールの質量に比例するので、物質がブラックホールに落ちこむとブラックホールは大きくなる(図1)。また、ブラックホールからはなにも逃れられないので、ブラックホールは大きくなる一方である。これは熱力学のエントロピーの性質と似ている。したがって、ブラックホールも一種の熱力学系であり、熱力学的な性質を備えていると想像される。そして、エントロピーに相当するのが、ブラックホールの大きさであろう。

実は第2法則に限らず、ブラックホールの古典論的な性質は熱力学の第0法則から第3法則と同じ形でまとめることができる。さらに、古典論的にはブラックホールからはなにも出てこないが、量子論的には黒体放射を起こすことが知られている(ホーキング放射)。すなわち、ブラックホールは温度という概念をもつ。このように、ブラックホールは1つの熱力学系である^{注5)}。

注4) 以下では、 $c = \hbar = k_B = 1$ の自然単位系を主に使う。

注5) ホーキング放射によりブラックホールが蒸発していくと、ブラッ

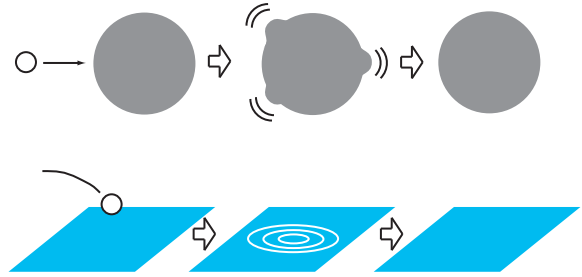


図2 摂動を与えたとき、ブラックホールのふるまいは流体力学のふるまいとよく似ている。流体力学では、これは粘性の効果である。

さて、平衡状態にある熱力学系に、なにか摂動を加えたとする。摂動が低エネルギー長波長の場合、熱力学系の振るまいは流体力学であらわされる。ブラックホールも1つの熱力学系なので、摂動を加えた場合、ブラックホールの振るまいが流体力学であらわされると考えるのは自然である。

事実、ブラックホールの振るまいは流体と似ている(図2)。たとえば、池にボールを落とすとさざ波が立つが、さざ波はやがて止んでもとの静かな水面に戻る。これは散逸であり、粘性による効果である。同様に、ブラックホールにモノを落とすとすると、しばらくの間、ブラックホールの形は不規則になるが、最終的にはもとの対称的なブラックホールに戻ってしまう。この場合の「散逸」は、摂動がブラックホールに吸収されることによって起こる。したがって、ブラックホールに対してもなにか粘性のような概念が考えられるはずで、上のようなプロセスを考えればブラックホールの「粘性」が求まるはずである。

ブラックホールと流体力学との対応は、単なるアナロジーではない。以下で、ブラックホールが実際に流体方程式に従い、したがって特定の流体とみなせることをみていく。

3 どんなブラックホールを考えるべきか？

前節ではブラックホールの「大きさ」がエントロピーに相当すると書いたが、もっと具体化しよう。ブラックホールとは、その外から観測することを前提とした概念であり、私たちがブラックホールの性質という場合も外から観測することを想定している。したがって、ブラックホールの熱力学量も外から観測できる量で書くのが望ましい。外にいる観測者にとって、ブラックホール

は小さくなる。しかし、ブラックホール・エントロピーと放射のエントロピーを足したものは常に増大する。(一般化された第2法則)。

の大きさとして観測できるのはホライズンの面積 A であり、ホライズン半径やブラックホールの体積ではない^{注6)}。そこで、ブラックホール・エントロピーとしてふさわしいのは、ホライズン面積 A であろう：

$$S \propto A? \quad (4)$$

数式上、エントロピーがホライズン面積になる理由は注7)に挙げる。

ブラックホールと流体との対応をより精密化するために、ブラックホール・エントロピーの性質に注意しよう。第一に、ブラックホール・エントロピーの大きな特徴は、ホライズン面の「面積」に比例する点である。つまり、空間2次元量である。これは通常の熱力学的エントロピーとは大きく異なる。通常の熱力学的エントロピーは、系の「体積」に比例する。空間3次元量である(図3)。

したがって、4次元時空のブラックホールが、4次元時空の流体に対応するはずはない。しかし、3次元時空の流体なら、エントロピーは空間2次元量である。これは、4次元時空のブラックホール・エントロピーが空間2次元量というのと符合する。逆に、通常の4次元時空の流体を考えるとすれば、5次元時空のブラックホールを考えればよい。5次元時空のブラックホールのホライズン「面」は、空間3次元量だからである。

このように、ブラックホールと流体は違う時空次元に住んでいることになる。また、このことから示唆されるのは、流体に対応するのはブラックホール全体というより、むしろホライズン「面」だということである。

第二に、ブラックホールと流体を対応づけるうえで、単純なシュワルツシルド・ブラックホールでは時空次元以外にも問題がある。式(3)と(4)より、 $S \propto M^2$ となる。第1法則 $dM = TdS$ を使うと、ブラックホールの温度は $T \propto 1/M$ である。したがって、ブラックホールの比熱は $C = \partial M / \partial T \propto -1/T^2$ 、つまり比熱が負になってしまう^{注7)}。

注6) ◆ そもそも、一般相対論で言うホライズン半径は $A = 4\pi r_0^2$ と、面積から便宜的に定義された量である。つまり、球体であるホライズンに、平坦な時空での球の表面積の式を用いたものである。しかし、曲がった時空では、面積と物理的に意味のある半径は、必ずしもそのような関係になっているわけではない(ホライズン半径自体は座標不変な概念ではない、と言う)。したがって、ホライズン半径はもとより、「体積」 $4\pi r_0^3/3$ にも物理的意味がないのは明らかであろう。さらに、ホライズンの外の時空はシュワルツシルド解で与えられても、実はホライズンのなかの様子はシュワルツシルド解である必要もなく、解が一意的ではない。このため、ブラックホール内部の様子を知る必要がある座標不変な半径や座標不変な体積であったとしても適切ではない。

注7) 実際には、ホーキング放射の計算から $T \propto 1/M$ が求まり、この

エントロピー	流体	ブラックホール
空間2次元量：	3次元時空	↔ 4次元時空
空間3次元量：	4次元時空	↔ 5次元時空

図3 通常のエントロピーのように、ブラックホール・エントロピーが空間3次元量になるのは、5次元時空の場合である。

負の比熱は熱平衡状態が安定に存在しないことを意味するので、通常の熱力学系とは対応しない。このようなブラックホールは、ホーキング放射を起こし「蒸発」する。ブラックホールが負の比熱をもつのは、シュワルツシルド・ブラックホールに限らず、ブラックホールに典型的な事情である。

しかし、一般相対論では「反ド・ジッター (anti-deSitter, 略して AdS) ブラックホール」と呼ばれるブラックホールが知られている。AdS ブラックホールは、負の宇宙定数をもつ仮想的な宇宙に存在するブラックホールである。このブラックホールは、比熱が正という顕著な特徴をもち、安定な平衡状態が存在する。実際、5次元 AdS ブラックホールの場合、エネルギー密度 ε は

$$\varepsilon \propto T^4 \quad (5)$$

であり、比熱は正である。また式(5)は、ステファン・ボルツマンの法則と同じ関数形である。ステファン・ボルツマンの法則は、光子気体のような相対論的流体が従う状態方程式である。相対論的流体では、流速が光速度に近く、本質的に特殊相対論が必要である。また、エネルギー密度 ε と圧力 P が同じオーダーの大きさであられる ($c=1$ の単位系で)。

したがって、ブラックホールと通常の熱力学系を対応させるには、AdS ブラックホールが候補としてふさわしい。これまでにわかったことをまとめると、

$$\begin{aligned} & (5 \text{次元時空の AdS ブラックホール}) \\ & = (4 \text{次元時空のある種の相対論的流体}) \end{aligned} \quad (6)$$

ここまでブラックホールを具体化すれば、実際にブラックホール摂動を計算することができる。

ことから $dM \propto TdM^2$ と式変形できるため、これを第1法則とみなせば $S \propto M^2$ と、式(4)のブラックホール・エントロピーの面積則が導出される。なお、以上の議論では4次元時空のシュワルツシルド・ブラックホールを使ったが、シュワルツシルド・ブラックホールは5次元時空にも拡張することができて、結論は変わらない。

4 ブラックホールによる輸送係数の導出

実際に式 (6) の対応をみるために、まず流体力学の簡単なおさらいからはじめよう。以下では相対論的な流体力学を考える。ブラックホールに対応する流体は、式 (5) に従う相対論的流体だからである。線形化すると、流体方程式は縦波（音波モード）と横波にわけられる。簡単のために横波だけを考え、周波数を ω 、波数を q とすると、横波の分散関係は、

$$\omega = -i \frac{\eta}{\bar{\epsilon} + \bar{P}} q^2 \tag{7}$$

$$= -i \frac{\eta}{\bar{T}s} q^2 \tag{8}$$

で与えられる。 η はずり粘性率、 s はエントロピー密度であり、「 $-$ 」つきの量は平衡状態での値をあらわす。2行目では、オイラーの関係式 $\bar{\epsilon} + \bar{P} = \bar{T}s$ を使った（主に化学ポテンシャル $\mu = 0$ の場合を考えることにする）。

式 (7) は拡散方程式の形をしている。電荷密度 ρ の拡散方程式は、

$$\partial_t \rho - D \partial_x^2 \rho = 0 \tag{9}$$

で与えられる。 D は拡散係数である。運動量空間では式 (9) は、

$$\omega = -i D q^2 \tag{10}$$

となる。式 (7) と (10) を比べてわかるように、 $D_\eta := \eta / (\bar{\epsilon} + \bar{P})$ は拡散係数の役割を果たす。非相対論的 ($\bar{P} \ll \bar{\epsilon}$) に対応する量 $\nu := \eta / \bar{\epsilon}$ は動粘性係数である。

拡散係数に相当するのは $\eta / (\bar{T}s)$ であるが、 η / \bar{s} という組み合わせはとくに興味深い。 $1/\bar{T}$ という因子は次元解析で決まるものだが、 η / \bar{s} は自然単位系で無次元量であり、流体のダイナミクスを反映しているからである。エントロピー密度は大ざっぱには粒子数に比例するので、 η / \bar{s} は粒子あたりの粘性を考えることに相当する。

ブラックホールに重力摂動を加えると、やはり縦波と横波に分解できて、低エネルギー長波長極限で横波は式 (7) と同じ分散関係を満たす^{注8)}。この意味で、ブラックホールは流体とみなすことができるのである。重力摂動の計算から

$$\frac{\eta}{\bar{s}} = \frac{\hbar}{4\pi k_B} \tag{11}$$

注8) 同様の計算を縦波でおこなえば、ずり粘性率以外の輸送係数、音速と体積粘性率も求めることができる。

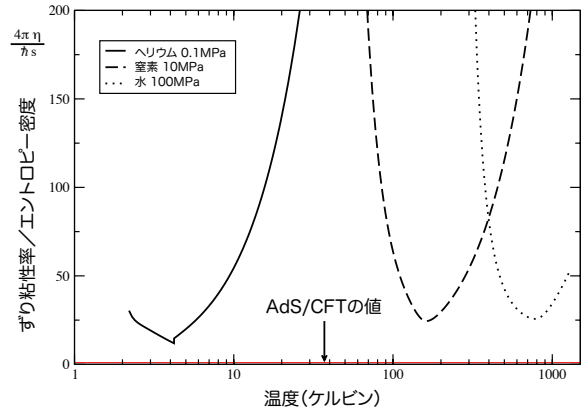


図 4 いくつかの流体についての η/\bar{s} ¹⁾。横軸にほとんど重なっている線が、AdS/CFT の値。

が得られる。ここで次元依存性をあらわに書いた (\hbar と k_B)。数値的には、

$$\frac{\eta}{\bar{s}} \approx 6.1 \times 10^{-13} \text{ K} \cdot \text{s} \tag{12}$$

この η/\bar{s} の値は、通常物質と比べて著しく小さい (図 4)。一例として、窒素の η/\bar{s} は標準状態でこの値の 3×10^3 倍にもなる。超流動ヘリウムさえ、その η/\bar{s} は式 (12) より一桁大きい (超流動体には常流体成分があるため、粘性はゼロではない)。ブラックホールがあらゆる流体は粘性が小さく、粘性をもたない完全流体に近い^{注9)}。

このようにブラックホールがある種の流体と等価だとして、これは何の流体なのだろう？ 別の言葉で言えば、微視的な記述は何なのだろう？ この流体は著しく粘性が小さく、従来知られているあらゆる流体より小さいので、何かエキゾチックな流体だと考えられる。そのような流体は、実際に観測可能なのだろうか？

この流体について、これまでわかかったことをまとめよう。第一の手がかりは、この完全流体に近いという性質である。ずり粘性率は $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ の次元をもつので、次元解析より一般に^{注10)}

$$\eta \simeq \rho \bar{v} l_{\text{mfp}} \tag{13}$$

となることが期待される (ρ : 質量密度、 \bar{v} : 通常の流体で分子や原子に相当する、流体を構成する粒子の平均速度、 l_{mfp} : 平均自由行程)。流体を構成する「粒子」どうしの相互作用が強い場合、平均自由行程は短くなる。したがって、相互作用が強くなると、粘性は小さくなる。

注9) 以下では繰り返し「粘性が小さい」という言い方をしますが、 η 自体が小さいという意味ではなく、正確には η/\bar{s} が小さいという意味である。

注10) 以下の議論ではニュートン流体を仮定する。

つまり、完全流体に近いという性質は、流体を構成する「粒子」どうしがきわめて強く相互作用していることを示唆する。

第二に、この流体は相対論的流体であり、非相対論的流体ではない。相対論的流体では、流速が光速に近く、本質的に特殊相対論が必要である。また、エネルギー密度と圧力の大きさが同じオーダーである。光子気体がこれに相当する（この場合、 $\varepsilon = 3P$ ）。もっとも、光子どうしに働く相互作用は弱い（量子効果に基づくもの）。

この2つの性質、強結合する相対論的流体、という性質をもつ流体は実際に存在する。「クォーク・グルーオン・プラズマ」と呼ばれ、その実験は世界各地で進行中である。

5 クォーク・グルーオン・プラズマ

陽子や中性子は、「クォーク」と言う、より基本的な粒子からできている。しかし、クォークは通常は陽子や中性子のなかに「閉じこめ」られており、ばらばらにとり出すことはできない。これは「グルーオン」と呼ばれる粒子が、クォークどうしを強く結びつけているからである^{注11)}。

しかし十分高温では、クォークはもはや閉じこめられない。そうしてできたものが、クォーク・グルーオン・プラズマである。このプラズマの存在は、理論的には以前から知られていた。しかし、このプラズマは初期宇宙は別として、実験でも創り出されたことがなかったものであり、ましてやその物理的性質など測られたことはなかった。しかし、近年このプラズマを実現して物理的性質を測ろうという「重イオン実験」が世界各地でおこなわれている。

重イオン実験では、金原子核のような重い原子核どうしを衝突させて、ごく短時間高温状態を実現させる。この温度が十分高ければ（おおよそ2兆度以上）、クォーク・グルーオン・プラズマが生成される。代表的な重イオン実験としては、

- ブルックヘブン国立研究所の RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider)
- セルンの LHC (Large Hadron Collider)

と呼ばれる加速器を使った実験がある。とくに RHIC は、重イオン実験に特化して設計された史上はじめての加速器である。

注11) グルーオン (gluon) は「のり」を意味する glue から来ている。古い文献では、グルーオンは「膠着子」、「膠粒子」、「糊粒子」などと訳されていた。

2005年、RHICの最初のまとまった実験結果が報告され、マスコミでも大きな話題になった。この発表によると、クォーク・グルーオン・プラズマの振るまいは完全流体に近い。4節でみたように、小さな粘性は相互作用が強く働いていることを示唆する。クォーク・グルーオン・プラズマは「閉じこめ」から解放されたものの、相互作用はまだ強く働いている、ということである。クォーク・グルーオン・プラズマは理想気体のように振るまうのでは、という予想もされていたので、この発見は関係者にとって大きな衝撃であった。

しかし、強く相互作用しているということは、理論的な解析も難しいことも意味する。解析手段に乏しいことが、クォーク・グルーオン・プラズマ研究のやっかいな点である。そこで登場したのが、AdS/CFTである。RHIC実験の結果は、式(11)のAdS/CFTを使っただけで粘性率の予言に近いことが判明したのである^{注12)}。さきに述べたように、この η/\bar{s} は超流動ヘリウムよりさらに小さい。したがって、クォーク・グルーオン・プラズマはこれまで自然界でみつかった流体としては、もっとも完全流体に近い流体である。

この結果を受けて、RHICのプレスリリースでも「超弦理論とRHIC実験の間の予期せぬつながりには心が躍った」というコメントが載せられた²⁾。大型実験のプレスリリースで超弦理論が言及されたのは、これが史上初だったと思われる。

6 AdS ブラックホールに対応する流体

本誌の読者にとってあまりなじみがないかもしれないが、クォーク・グルーオン・プラズマは光子気体を一般化した「ゲージ理論」の一種である。一般にゲージ理論では、光子に相当する粒子は非線形の相互作用を起こし、強く相互作用しうる。クォーク・グルーオン・プラズマの場合、光子に相当するのがグルーオンである。一方、電磁気学の電子に相当するのがクォークである(図5)。

この解説では、ブラックホールから得られた性質を手がかりとして、対応する流体について推論してきた。しかし、本来このような推論をたどらなくても、AdS/CFTはブラックホールがどのような流体に対応しているのか教えてくれる。「強結合極限のゲージ理論のプラズマ」こそ、ブラックホールに対応する流体である。つまり、

注12) 流体シミュレーションと実験結果の比較から、 $\eta/\bar{s} \approx 0.1$ 程度と見積もられている ($\hbar = k_B = 1$ の単位系で)。AdS/CFTの値は、 $\eta/\bar{s} = 1/(4\pi) \approx 0.08$ である。

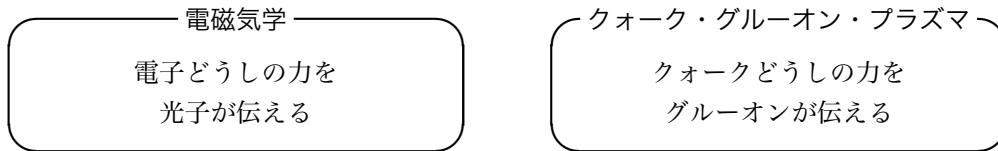


図5 電磁気学とクォーク・グルーオン・プラズマの比較。ここで電子をもち出したのは典型例というだけで、荷電粒子でさえあればもちろん電磁気力が働く。

式 (1), (6) はより正確には

$$\begin{aligned} & \text{(5次元時空の AdS ブラックホール)} \\ & = \text{(4次元時空強結合極限の} \\ & \quad \text{ゲージ理論のプラズマ)} \end{aligned} \quad (14)$$

これが AdS/CFT の主張である。しかし、その点を正確に理解するには、ゲージ理論そして超弦理論の知識が不可欠であり、本解説では詳細は省かざるを得ない。詳細は著者による超弦理論の一般書³⁾や、AdS/CFT の教科書⁴⁾をご覧ください^{注13)}。

式 (13) の議論から、強結合で粘性は小さくなる。しかし式 (11) には、相互作用の強さをあらわす「結合定数」が入っていない。明らかに、このような関係は特別な極限でのみ期待される。AdS/CFT によると、ブラックホールの結果は強結合極限に相当する。つまり、強結合で η/\bar{s} はだんだん小さくなり、極限で式 (11) の値をとると考えられる：

$$\frac{\eta}{\bar{s}} \geq \frac{\hbar}{4\pi k_B}. \quad (15)$$

強結合極限自体は理想的な状況であり、クォーク・グルーオン・プラズマそのものは強結合極限ではないが、この極限值がよい近似になっているようである (注12) を参照)。また、極限でも η/\bar{s} はゼロにはならず、有限にとどまることに注意してほしい。これは、完全流体は現実には存在しえないことを示唆する。

強結合極限に注目すると、さらに興味深い性質がみつかっている。実は AdS ブラックホールといっても一種類に限られない。式 (11) の結果は、特定の AdS ブラックホールを使った結果である。しかし、たとえばブラックホールに、化学ポテンシャルに相当するものをもたせ

注13) ◆ なお、以下で少しふれるように、AdS/CFT ではさまざまなゲージ理論のさまざまな状況を扱う。なかでも、もっとも単純な場合は理論がとくに大きな対称性を持つ。この対称性は、ポアンカレ対称性とスケール対称性をあわせもつ、コンフォーマル対称性と呼ばれるものである。そのような理論はコンフォーマル場の理論 (conformal field theory), 略して CFT と呼ばれる。「AdS/CFT」の「CFT」は、この事情を指している。

ることもできる。この例をはじめとするさまざまな AdS ブラックホールで、4 節と同様の計算ができる^{5)注14)}。しかし、既知の例では、強結合極限で常に式 (11) が成り立っている^{注15)}。強結合極限で、 η/\bar{s} は特別な性質を備えている。

そもそも、式 (11) には、基本定数である \hbar と k_B のみであらわれている。個々の流体の詳細にはよらない強力な関係式である。この普遍性と、式 (15) の振るまいから、どんな流体でも式 (15) を満たすのでは、という提案もある¹⁾。

ブラックホールの立場では、この普遍性はブラックホールがもつ普遍的な性質から来ている。たとえば、式 (4) のブラックホール・エントロピーの面積則は、シュワルツシルド・ブラックホールに限ったものではなく、一般のブラックホールでも成り立つ [式 (4) では書かなかった比例係数まで含めて]。

7 微視的な計算の替わりとしてのブラックホール

通常、輸送係数を理論的に予言するには、微視的な理論を計算する必要がある。強結合するクォーク・グルーオン・プラズマのような流体では、このような計算は至難である。しかし、AdS/CFT ではブラックホールを使うことで、微視的な計算を経ることなく輸送係数が求められる。これを可能にしたのは、微視的な理論に等価なブラックホールがわかっているからである。

しかし、だからと言って、AdS/CFT では微視的な理論の計算がまったく不要だというわけではない。実は、AdS/CFT そのものは、今のところ完全には証明されていない。本来、式 (14) の主張は証明する必要がある。この証明とは、結局のところ、微視的な理論を解くことに尽きる。その結果として、ここで議論しているような仮想的なブラックホールが導出されるはずである。もちろん、このような計算は容易ではない。

注14) なお、化学ポテンシャルがある場合、 $\eta/\bar{s} \neq TD_\eta$ だが、AdS/CFT が普遍性を主張するのは η/\bar{s} であり、 TD_η ではない。

注15) 普遍性の例外として知られているのは、非等方プラズマの場合だけである⁶⁾。

では、直接微視的な計算をせずに、そもそもどうやって AdS/CFT にたどり着けたのだろうか？ これは、

1. 超弦理論の知識と、
2. 対称性が強い縛りとなって、ブラックホールとそれに対応する微視的な理論を一对一に同定できた

という2つの理由からである。このような間接的な手段で AdS/CFT にたどり着けたことで、微視的な計算を経ることなく、予言ができるのである。その一方で、AdS/CFT は完全には証明できていない。しかし、特定の観測量に対しては微視的な計算も可能であり、実際にブラックホールの結果と一致することが確かめられている。

8 流体力学そのものへの応用 ◆

4節では、重力摂動の横波成分は、拡散方程式と同じ分散関係を満たすと書いた。しかし、正確には、波数 q について高次の項を含んでいる：

$$\omega = -i \frac{1}{4\pi T} q^2 + O(q^4) \quad (16)$$

$O(q^4)$ 項は何をあらわしているのだろうか？ 物理的意味とその重要性を理解するために、拡散方程式に戻って考えてみよう。

拡散方程式 (9) を解くと、

$$\rho(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (t > 0) \quad (17)$$

という解が得られる。この解は、当初デルタ関数的であった電荷密度が時間とともに拡散する様子をあらわしている (図 6)。電荷密度は空間的に指数減少しているものの、わずかでも時間が経過すれば ($t > 0$)、どんなに遠方でもゼロにはならない。これは無限の伝搬速度を意味し、相対論的因果律と矛盾する。

数学的には、拡散方程式は「放物型」の微分方程式である。つまり、時間には1次微分に対し、空間には2次微分になっている。このような非対称性は、時間非対称である拡散を起こすのに本質的だが、相対論的因果律を満たさないことも意味する。相対論的因果律を満たすには、波動方程式のように、時間、空間ともに2次微分になった「双曲型」の方程式が必要である。

そこで、拡散方程式を以下のように修正してみよう：

$$\tau_J \partial_t^2 \rho + \partial_t \rho - D \partial_x^2 \rho = 0. \quad (18)$$

第1項が新たに付け加えた項であり、 τ_J は新しい輸送係数である。この式は「電信方程式」の形をしている。電信方程式は、双曲型の方程式になっている。運動量空間で式 (18) は

$$-\tau_J \omega^2 - i\omega + Dq^2 = 0 \quad (19)$$

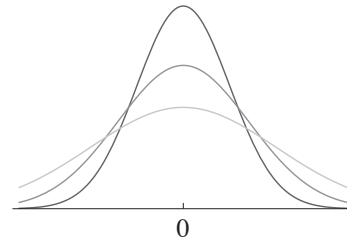


図 6 電荷の拡散。

となり、これを ω について解くと、

$$\omega = -iDq^2 - iD^2\tau_J q^4 + O(q^6). \quad (20)$$

第1項は拡散方程式の分散関係であり、第2項が補正項である。式 (20) と (16) を比べると、ブラックホールから出た $O(q^4)$ 項は、電信方程式による補正に相当すると考えられる。このため、ブラックホールの結果と比べることで、 τ_J に相当する輸送係数も決定できることになる。

D と τ_J で速度の次元をもった量を作ることができる：

$$v_{\text{front}}^2 := D/\tau_J. \quad (21)$$

v_{front} は信号伝達の典型的な速度をあらわし、 $v_{\text{front}} < c$ であれば相対論的因果律に抵触しない。このことから、この種の修正を一般に「因果的流体力学」と呼ぶ。その代表的な理論に、「Israel-Stewart 理論」がある⁷⁾。

または、流体力学は、低エネルギー長波長極限の理論である。つまり、これまで (ω, q) の低次項を議論してきた。しかし、本来は (ω, q) 展開の無限和からなる。ここで出てきた $O(q^4)$ 項は、低次項に対する補正である。この意味で、通常の粘性流体力学を「一次流体力学」、因果的流体力学を「二次流体力学」と呼ぶこともある。

$O(q^4)$ 項の物理的意味という観点から説明してきたが、実用的な観点からも因果的流体力学は重要である。相対論的な一次粘性流体力学には、実は物理的ではない不安定性が存在する^{8)注16)}。このことは、粘性を導入した途端に数値シミュレーションが破綻することを意味し、クォーク・グルーオン・プラズマのシミュレーションで問題となっていた。この問題を避けるには、因果的流体力学を考えればよいのだが、因果的流体力学の輸送係数の値については、ほとんど知られていなかった。

そこで、AdS/CFT で因果的流体力学の計算がなされ⁹⁻¹¹⁾、その輸送係数の値は数か月もしないうちにクォーク・グルーオン・プラズマの流体シミュレーションで使われた。

注16) この不安定性は、相対論的流体力学に特有のものである。不安定性が起こる時間スケールは極端に短く、室温の水で 10^{-34} 秒と見積もられている⁸⁾。

また、AdS/CFT は単に因果的流体力学の輸送係数を決めるだけではない。AdS/CFT の結果と、因果的流体力学は無矛盾になっていなければいけない。実は、因果的流体力学の研究には長い歴史があり、100 年以上議論されている。古くは、マクスウェルの熱伝導の理論にまで遡る¹²⁾。しかし、いまだに因果的流体力学の枠組みは 1 つに収束していない。つまり、Israel-Stewart 理論が決定打というわけではない。

しかし、AdS/CFT の結果を矛盾なく解釈できるかどうか考えることで、因果的流体力学の枠組みが妥当なものかどうか判断できる。事実、AdS/CFT の結果を矛盾なく解釈するために、Israel-Stewart 理論では欠けていた新たな輸送係数が存在することが指摘されたのである。

9 関連するアプローチと AdS/CFT との違い ◆

さて、実はブラックホールと流体の対応は昔から議論されており、AdS/CFT に特有のものではない。主なものだけでも、「メンブレン・パラダイム」¹³⁾、「アナログ・ブラックホール」¹⁴⁾、レイリー・プラトー不安定性との関係¹⁵⁾、といったアプローチがある^{注17)}。2 節の大ざっぱな議論でみたように、ブラックホールと流体の対応自体は自然だと考えられるので、さまざまなアプローチがあっても不思議ではない。

AdS/CFT とこれらのアプローチには関連があり、たがいに刺激にもなっているものの、区別して考える必要がある。これらのアプローチと AdS/CFT の決定的な違いは、AdS/CFT の場合、対応する流体が何の流体かわかっているという点である。あるいは、対応する流体の微視的な理論がわかっているという点である（強結合ゲージ理論のプラズマ）。このため、AdS/CFT による輸送係数の決定は、特定の理論に対する予言となり、RHIC などとの実験結果との比較が意味をもつ。

AdS/CFT 以外のアプローチは、対応する流体の微視的理論が不明なものの、ブラックホールと流体の対応自体は自然である。これらのアプローチは、ある種 AdS/CFT の拡張になっていて、AdS/CFT が適用できない場合にも役立つかもしれない。

10 さいごに

本解説では線形流体力学をあつかったが、AdS/CFT は原理的には線形近似に限ったものではない。このため、たとえば乱流の問題に多くの関心が寄せられている。ただし、ナビエ・ストークス方程式が非線形方

式であり解くのが難しいのと同じく、アインシュタイン方程式も非線形方程式であり解くのは難しい。このため、AdS/CFT の非線形領域での解析が、従来の手法と比べて有利かどうかはまだはっきりしない。また、ブラックホールと流体の関係をより明確にするために、低エネルギー長波長近似でアインシュタイン方程式がナビエ・ストークス方程式に直接帰着することを示す仕事もある¹⁷⁾。

このように、従来、流体力学とは縁の薄かった分野でも、流体力学の議論が盛んにおこなわれている。クォーク・グルーオン・プラズマを研究する原子核物理はもちろん、素粒子論、一般相対論の研究者も、AdS/CFT を使って流体力学を研究している。しかも、超弦理論の分野でこの種の研究は、1 つの主流となっている。たとえば、文献 1) 以降に出た論文で、この論文ほど引用されている超弦理論の論文はない^{注18)}。

一方、我々は流体力学にはまだまだ不案内なので、流体の専門家が参加することで、さらに新たな知見が得られる可能性もある。実際、クォーク・グルーオン・プラズマの粘性流体のシミュレーションに、気象学者が関わっている例もある¹⁸⁾。読者にとって他分野の話ゆえ、どの程度うまく説明できたか心もとないが、この機会に流体力学会の方々が AdS/CFT に興味をもち、新たな相互交流が生まれることを期待したい。

謝辞

草稿を読んで有益なコメントを寄せていただいた岡村隆さん（関西学院大学）に感謝します。

引用文献

- 1) P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets: Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601 [arXiv:hep-th/0405231].
- 2) http://www.bnl.gov/bnlweb/pubaf/pr/PR_display.asp?prID=05-38
- 3) 夏梅誠：超ひも理論への招待（日経 BP 社，2008）。
- 4) 夏梅誠：超弦理論の応用—物理諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方—（サイエンス社 SGC ライブラリ 93，2012）。
- 5) K. Maeda, M. Natsuume and T. Okamura: Viscosity of gauge theory plasma with a chemical potential from AdS/CFT, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 066013 [hep-th/0602010].

注17) このうち、アナログ・ブラックホールについては「ながれ」解説記事¹⁶⁾、レイリー・プラトー不安定性との関係については本特集の宮本氏の記事で扱われている。

注18) 2012 年 9 月 5 日現在、974 回の引用数。

- 6) M. Natsuume and M. Ohta: The shear viscosity of holographic superfluids, *Prog. Theor. Phys.* **124** (2010) 931 [arXiv:1008.4142 [hep-th]].
- 7) W. Israel: Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory, *Annals Phys.* **100** (1976) 310.
- 8) W. A. Hiscock and L. Lindblom: Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 725.
- 9) M. Natsuume and T. Okamura: Causal hydrodynamics of gauge theory plasmas from AdS/CFT duality, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 066014 [arXiv:0712.2916 [hep-th]].
- 10) R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov: Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography, *JHEP* **0804** (2008) 100 [arXiv:0712.2451 [hep-th]].
- 11) M. Natsuume: String theory implications on causal hydrodynamics, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **174** (2008) 286 [arXiv:0807.1394 [nucl-th]].
- 12) J. C. Maxwell: On the dynamical theory of gases, *Philos. Trans. Soc. London* **157** (1867) 49.
- 13) R. H. Price and K. S. Thorne: Membrane Viewpoint On Black Holes: Properties And Evolution Of The Stretched Horizon, *Phys. Rev. D* **33** (1986) 915.
- 14) W. G. Unruh: Experimental black hole evaporation, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 1351.
- 15) V. Cardoso and O. J. C. Dias: Rayleigh-Plateau and Gregory-Laflamme instabilities of black strings, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181601 [hep-th/0602017].
- 16) 奥住聡, 富永真太郎, 阪上雅昭: 遷音速流でつくる「音のブラックホール」なかがれ, *28* (2009) 391.
- 17) I. Bredberg, C. Keeler, V. Lysov and A. Strominger: From Navier-Stokes To Einstein, arXiv:1101.2451 [hep-th].
- 18) P. Romatschke and U. Romatschke: Viscosity Information from Relativistic Nuclear Collisions: How Perfect is the Fluid Observed at RHIC?, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 172301 [arXiv:0706.1522 [nucl-th]].