

線形応答理論で学ぶ AdS/CFT 双対性

夏梅 誠¹

高エネルギー加速器研究機構

概要

線形応答理論を軸とした AdS/CFT 双対性の実践的なレビューです。超弦理論の知識は前提としません。Summer Institute 2009, 東北大学天文学教室での集中講義などをもとにしています。

目次

1	はじめに	2
2	GKP-Witten 関係式	3
2.1	GKP-Witten 関係式の左辺 (場の理論)	5
2.1.1	線形応答理論	5
2.1.2	輸送係数の例: 伝導率	7
2.1.3	流体力学の場合	7
2.2	GKP-Witten 関係式の右辺 (重力理論)	8
2.2.1	スカラー場の例	10
2.2.2	AdS/CFT 「辞書」	12
2.2.3	カレントの場合	12
3	輸送係数の具体計算: 流体力学	13
3.1	$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論: 熱力学量	13
3.2	ずり粘性率の計算	15
3.3	η/s の普遍性	16
3.4	補正と因果的流体力学	17
4	輸送係数の具体計算: ホログラフィック超伝導	18
4.1	ホログラフィック超伝導	18
4.2	ホログラフィック超伝導の臨界現象	20
4.3	ホログラフィック超伝導の伝導率	21
4.4	コメント	22
5	練習問題	23

¹e-mail address: makoto.natsume@kek.jp

A D3 ブレーンと AdS/CFT	26
A.1 D3 ブレーンとゲージ理論	26
A.2 D3 ブレーンと重力	27
A.3 ゲージ理論と重力	29
B 解 (55) の求め方	30

1 はじめに

場の理論ではしばしば強結合の理論が登場しますが、解析的な手法や厳密に解けるモデルは少数です。しかし、そういった例が、場の理論に対する私たちの直感を養うのに、事実上大きな役割を果たしてきました。超弦理論に基づく AdS/CFT 双対性も、そういった手法の一つと言えます。実際、AdS/CFT 双対性は large- N 理論の流れをくむ手法です。

このような手法の特徴として、AdS/CFT で扱う系は現実的な系とは言いがたいものです。しかし、このような欠点は AdS/CFT に特有なものではなく、これまでの解析的な手法や可解系にも共通したものです。たとえ限られた理論にしか適用できなくても、このような手法は貴重であり、場の理論に大きな進歩をもたらしてきました。

このため、近年 AdS/CFT は超弦理論にとどまらず、「現実世界」を解析する上で強力な手法になりつつあります。応用分野としては、QCD、原子核物理、物性論、流体力学（非平衡統計力学）などが挙げられます。いつの日か、AdS/CFT は large- N 極限や ϵ -展開のように、場の理論における標準的な手法になるかもしれません。本稿では、とくに流体力学との関連に着目しながら、AdS/CFT の計算手法について詳しく説明したいと思います。なお、AdS/CFT については、以前に「原子核研究」でも書かせていただきました [1]。そちらはブラックホールのより初歩的な知識や、平衡状態についても詳しく書いているので、そちらもあわせて読んでいただければと思います。

大雑把に言って、AdS/CFT 双対性は以下の同等性を主張します：

(4次元時空の) 有限温度の強結合ゲージ理論 \leftrightarrow (5次元の) AdS 時空中のブラックホール

AdS とは反ド・ジッター時空と呼ばれる時空で、負の宇宙定数を持つ時空です。ブラックホールが出てくる基本的な理由は、ブラックホールも有限温度系だからです。ホーキング輻射という現象により、ブラックホールは温度を持ちます。また、4次元の物理と5次元の物理が対応していることに注意してください。このような事情から、AdS/CFT はしばしば**ホログラフィック理論**とも呼ばれます。

またこの双対性は、統一理論としての超弦理論の利点が出ていることにも注意してください。この双対性は、重力とゲージ理論を関係づけます。しかし、通常の場合の理論ではこの二つは完全に分離しています。二つの理論の理論的な基礎や概念は完全に違うからです（ゲージ理論は量子化可能だが、一般相対論は古典論）。この二種類の理論に関係をつけるというのは、重力とゲージ理論を統一する超弦理論だからこそ可能になった考えです。

2 GKP-Witten 関係式

AdS/CFT 双対性でもっとも重要な式が、**GKP-Witten 関係式**と呼ばれる式です²：

$$\left\langle \exp \left(i \int_{\partial M} \phi_{(0)} \mathcal{O} \right) \right\rangle = e^{i S_{\text{on-shell}}[\phi_{(0)}]}, \quad \phi|_{u=0} = \phi_{(0)}. \quad (1)$$

これは事実上、AdS/CFT の定義を与えるものです。この式は一見すると簡単な構造をしていますが、その意味には注意が必要です。あとで詳しく説明しますが、まず表記についてざっと説明すると（図 1 も参照のこと）、

- この関係式は左辺が 4 次元のゲージ理論をあらわし、右辺が 5 次元の重力理論を表しています。
- 右辺：
 - $S_{\text{on-shell}}$ は 5 次元の作用で、少なくとも重力場を含みますが、5 次元の物質場が入ることもあります。どのような 5 次元物質場が入るかは、4 次元のゲージ理論次第です。
 - $S_{\text{on-shell}}$ は漸近的に AdS になるような時空 M を解として持つとします。
 - M はしばしば**バルク**と呼ばれます。
- 左辺：
 - 左辺はゲージ理論の生成汎関数にすぎません。 $\langle \dots \rangle$ は期待値をあらわします。
 - この生成汎関数は、AdS 時空の「無限遠方」（ここでは $u = 0$ とする）の 4 次元面 ∂M 上で定義されます。
 - ∂M はしばしば**境界**と呼ばれます。
- 場とオペレーター：
 - ϕ は重力理論のある場をあらわしています。
 - \mathcal{O} はゲージ理論のあるオペレーターをあらわします。ここでは ϕ と \mathcal{O} は模式的に書いたもので、具体例は 2.2.2 節 で述べます。
 - ϕ は運動方程式の解になっているとします。すなわち $S_{\text{on-shell}}$ は on-shell 作用です。 $\phi_{(0)}$ は ϕ の境界での値をあらわします³。

この関係式をより理解するために、左辺と右辺をより注意深くみることにします。

^{2*} 正確には、GKP-Witten 関係式はもともと Euclidean で定式化されています。ここではダイナミクスに興味があるので、GKP-Witten の Lorentzian バージョンを使います [2]。二つの定式化の同等性については、いくつかの仕事があり [3, 4]、基本的に有限温度の場の理論の実時間形式と同じような手法を使います。Euclidean と Lorentzian ではその prescription にいくつか重要な違いがあり、たとえば 3.2 節 で述べる境界条件の違いがあります。また、Lorentzian の式 (1) もあまり字句通りに受け取ってはいけません（本稿でもに議論する一点関数以外は）。なお、GKP は Witten と独立にこの関係式を提案した三人の頭文字 (Gubser - Klebanov - Polyakov)。

³ $u \rightarrow 0$ で場が定数にならず、 $\phi \sim u^{\Delta-}$ として振るまう場合、 $\phi|_{u=0} = \phi_{(0)} u^{\Delta-}$ として $\phi_{(0)}$ を定義します（5 節の問 1 を参照）。

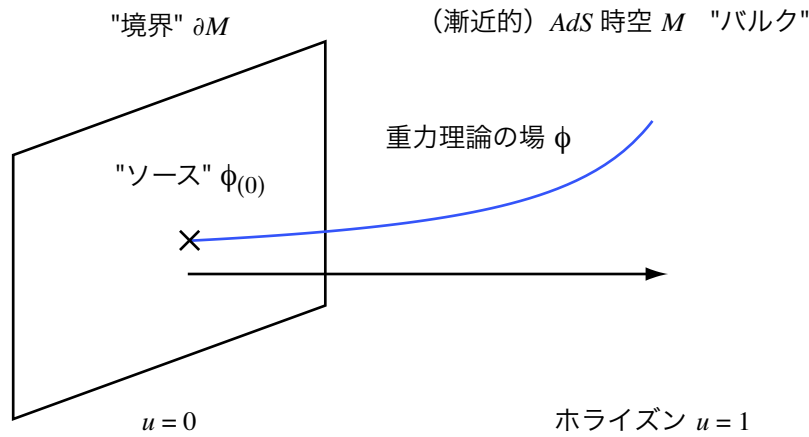


図 1:

読者のなかには、ゲージ理論と重力理論のこのような関係の根拠が気になる人もいるでしょう。この点を理解するには、超弦理論や超対称ゲージ理論の説明が不可欠になり長くなるので、補遺 A に回しました。本稿では、関係式 (1) の根拠から出発するのではなく、むしろこの関係式そのものから出発することにします。それは以下の理由からです：

1. 現時点では、関係式 (1) は完全に正当化できるわけではありません (補遺 A 参照)。
2. この関係式を説明する上や実際に使って計算する上では、補遺 A のような議論はそれほど必要になるわけではありません。と言うのも、
 - (a) 本稿で特に注目する低エネルギー極限では、ゲージ理論側で必要になる知識は、微視的理論の詳細よりも、むしろ対称性や低エネルギー理論の定式化 (流体力学) で規定されます。
 - (b) 一方、重力理論で必要となる知識も、large- N 極限では一般相対論で十分であり、量子重力理論としての超弦理論が必要になるわけではありません。
3. 読者にとっても、本稿のような構成の方が超弦理論の説明からはじめるよりもハードルが低いと思われます。計算法を学んだ上で、改めてこの関係式の根拠に戻れば十分だと思います。

なお、本稿では以下の convention を使います：

- インデックス：
 - ギリシャ文字の足 μ, ν, \dots は 4 次元の境界時空上、 $0, \dots, 3$ まで走るものとします。
 - 一方、5 次元バルク時空の足としては a, b, \dots を使います。
- 境界時空の座標としては、 $x^\mu = (t, \vec{x}) = (t, x, y, z)$ を使います。また、しばしば $\phi(t, z) \propto e^{-i\omega t + iqz}$ という形の摂動を考えます。
- 脚注のうち、*がついているものはより進んだ読者への注です。初心者はあまり気にする必要はありません。

2.1 GKP-Witten 関係式の左辺 (場の理論)

◆ AdS/CFT になじみのない読者のために、まずは GKP-Witten 関係式の左辺、場の理論側からみていくことにしましょう。したがって、ところどころ AdS/CFT との関係にも触れますが、この 2.1 節の内容は単に場の理論の話です。

GKP-Witten 関係式の左辺は、

$$Z_{\text{QFT}}[\phi_{(0)}] = \left\langle \exp \left(i \int_{\partial M} \phi_{(0)} \mathcal{O} \right) \right\rangle \quad (2)$$

場の理論の生成汎関数にほかなりません。通常場の理論と違う点は、ソース $\phi_{(0)}$ が 5 次元重力理論の場 ϕ に起源を持つという点です。すなわち、AdS/CFT は場の理論のソース項に 5 次元の意味を持たせられると主張しており、これが GKP-Witten 関係式の一つのポイントです。または、

バルクの場は、境界の場のソースとして働く

いずれにせよ、生成汎関数なので、ソース $\phi_{(0)}$ で汎関数微分を取ることにより、相関関数（とくに一点および二点相関関数）が得られます。たとえば一点関数は

$$\langle \mathcal{O} \rangle = -i \frac{\delta Z_{\text{QFT}}[\phi_{(0)}]}{\delta \phi_{(0)}} \Big|_{\phi_{(0)}=0} \quad (3)$$

ですが、強結合のとき場の理論で相関関数を計算するのは極めて困難です。そこで AdS/CFT は重力理論を使ってこれを計算します。場の理論での相関関数の重要性については言うまでもないですが、今考えているような問題で実際にどう使われるのか簡単にみることにしましょう。

2.1.1 線形応答理論

実験においては、しばしば外場 $\phi_{(0)}$ を加えて、(その外場と結合する) オペレーター \mathcal{O} への応答 $\delta \langle \mathcal{O} \rangle$ をみます。具体例としては、

	外場 $\phi_{(0)}$	応答 \mathcal{O}
磁性体：	磁場 H	磁化 m
誘電体：	化学ポテンシャル μ	電荷密度 ρ
伝導体：	外部ゲージ場 $A_i^{(0)}$	カレント J^i
流体力学：	時空のゆらぎ $h_{\mu\nu}^{(0)}$	エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$

などが挙げられます (流体力学の場合は 2.1.3 節 で詳しくみます)。線形応答理論は、このような応答を調べることを目的とします。

オペレーターへの応答は、量子力学の時間依存する摂動の手法を使って求めることができます。今、式 (2) と同じ

$$\delta H(t) = - \int d^3x \phi_{(0)}(t, \vec{x}) \mathcal{O}(\vec{x}) \quad (4)$$

という摂動ハミルトニアンを与えたとしましょう。オペレーターの時間発展は、

$$\langle \mathcal{O}(t, \vec{x}) \rangle = \text{tr} [\rho(t) \mathcal{O}(\vec{x})] \quad (5)$$

$$= \text{tr} [\rho(t_0) U^{-1}(t, t_0) \mathcal{O}_I(t, \vec{x}) U(t, t_0)] . \quad (6)$$

2行目では密度行列 $\rho(t)$ を初期値 $\rho(t_0)$ と時間発展のオペレーター $U(t, t_0)$ を使って書きました。また、 \mathcal{O}_I は相互作用表示をあらわし、もとのハミルトニアンによる時間発展はオペレーターに入れました。 $U(t, t_0)$ は

$$U(t, t_0) = T \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \delta H_I(t') \right] . \quad (7)$$

T は時間順序積をあらわします（線形レベルでは無関係ですが⁴）。ソース $\phi_{(0)}$ の一次までのオーダーを取り、 $t_0 \rightarrow -\infty$ とすると、

$$\delta \langle \mathcal{O}(t, \vec{x}) \rangle = \langle \mathcal{O}(t, \vec{x}) \rangle - \langle \mathcal{O}(t, \vec{x}) \rangle_0 \quad (8)$$

$$= i \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d^3 x' \langle [\mathcal{O}(t, \vec{x}), \mathcal{O}(t', \vec{x}')] \rangle \phi_{(0)}(t', \vec{x}') . \quad (9)$$

ここで $\langle \mathcal{O} \rangle_0$ はソースを加える前の熱平衡値をあらわします。

$k_\mu = (\omega, \vec{k})$ とし、この式を運動量空間で書くと

$$\delta \langle \mathcal{O}(k) \rangle = -G_R^{\mathcal{O}\mathcal{O}}(k) \phi_{(0)}(k) \quad (10)$$

となります。 $G_R^{\mathcal{O}\mathcal{O}}(k)$ は遅延グリーン関数です：

$$G_R^{\mathcal{O}\mathcal{O}}(k) = -i \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x e^{-ik \cdot x} \theta(t) \langle [\mathcal{O}(t, \vec{x}), \mathcal{O}(0, \vec{0})] \rangle . \quad (11)$$

このグリーン関数 G_R を決めるのが AdS/CFT です。なお物性では、 $\chi := -G_R$ を**応答関数**と呼びます⁴。

具体例をいくつか挙げておきましょう：

1. 流体力学の場合は、たとえば $\delta \mathcal{L} = h_{xy}^{(0)}(t) T^{xy}(x)$ に対して、

$$\delta \langle T^{xy} \rangle = -G_R^{xy, xy} h_{xy}^{(0)} , \quad G_R^{xy, xy} = -i \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x e^{-ik \cdot x} \theta(t) \langle [T^{xy}(t, \vec{x}), T^{xy}(0, \vec{0})] \rangle . \quad (12)$$

2. 系に保存カレント J^μ が存在する場合：

- (a) たとえば誘電体では $\delta \mathcal{L} = A_0^{(0)}(t) J^0(x)$ に対し、

$$\delta \langle \rho \rangle = -G_R^{\rho\rho} \mu , \quad G_R^{\rho\rho} = -i \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x e^{-ik \cdot x} \theta(t) \langle [\rho(t, \vec{x}), \rho(0, \vec{0})] \rangle . \quad (13)$$

ここで、 $\rho = J^0$ は電荷密度、 $\mu = A_0^{(0)}$ は ρ に対する化学ポテンシャルです。

- (b) また伝導体であれば、 $\delta \mathcal{L} = A_x^{(0)}(t) J^x(x)$ に対し、

$$\delta \langle J^x \rangle = -G_R^{xx} A_x^{(0)} , \quad G_R^{xx} = -i \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x e^{-ik \cdot x} \theta(t) \langle [J^x(t, \vec{x}), J^x(0, \vec{0})] \rangle . \quad (14)$$

⁴グリーン関数と応答関数には、伝統的に符号の分の違いがあります。符号以外の両者の微妙な違いについては、たとえば文献 [5] を参照。

2.1.2 輸送係数の例：伝導率

グリーン関数 G_R は**輸送係数**と関係づけることができます。簡単な例として、まず伝導率 σ についてみてみましょう。

カレントについての線形応答関係式は、式 (14) でした：

$$\delta\langle J^x \rangle = -G_R^{xx} A_x^{(0)} .$$

$A_x^{(0)}$ はカレントに結合する外部ゲージ場です。そこで、外部電場を $E_x^{(0)} = -\partial_t A_x^{(0)} \rightarrow i\omega A_x^{(0)}$ として導入すると、

$$\delta\langle J^x \rangle = -\frac{G_R^{xx}}{i\omega} E_x^{(0)} \quad (15)$$

と書き替えることができます。これはオームの法則 $\delta\langle J^x \rangle = \sigma E_x^{(0)}$ にほかなりません。したがって、

$$\sigma(\omega) = -\frac{G_R^{xx}}{i\omega} . \quad (16)$$

つぎに流体力学を考え、 $G_R^{xy,xy}$ と粘性を関係づけましょう。

2.1.3 流体力学の場合

流体力学は、系の巨視的振るまいを記述する有効理論です。主たる興味は保存量で、なぜなら保存量は低エネルギー $\omega \rightarrow 0$ 、長波長 $q \rightarrow 0$ で生き残ることが保証されている変数だからです。ただし、有効理論のパラメーターは微視的理論の詳細によるため、有効理論の枠内では決まりません。流体力学の場合、これらのパラメーターは輸送係数と呼ばれます。AdS/CFT は、微視的理論の計算を重力理論を用いて行なえるため、これらの輸送係数を決定できます。

どんな場の理論にも共通する保存量としては、エネルギー運動量テンソルが挙げられるので、これを考えましょう。エネルギー運動量テンソルに対する流体力学方程式は

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad (17)$$

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu + P\eta^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu} . \quad (18)$$

(ϵ : エネルギー密度、 P : 圧力、 u^μ : 流体の速度場) 最初の式は保存則ですが、次の式は**構成方程式**として知られているもので、現象論的に導入された式です。 $\tau^{\mu\nu}$ が散逸をあらわす部分で

$$\tau^{\mu\nu} = -\eta \left(\partial^\mu u^\nu + \partial^\nu u^\mu - \frac{2}{3} \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha u^\alpha \right) - \zeta \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha u^\alpha \quad (19)$$

として、輸送係数であるずり粘性率 η 、体積粘性率 ζ が現象論的に導入されます。

線形応答理論の考えに従い、

1. 境界時空で重力の摂動を考えることで $\delta\langle T^{xy} \rangle$ をもたらす。
2. 私たちが最終的に求めたいのは輸送係数なので、この期待値を輸送係数で表現しておく。

以下では η だけを考えます。 η は現象論的には構成方程式で定義されますが、式 (19) は平坦な時空のものなので、重力の摂動を考えるには適切ではありません。まず曲がった時空の場合に構成方程式を拡張しましょう：

$$\tau^{\mu\nu} = -P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} \left\{ \eta \left(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha - \frac{2}{3} g_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla \cdot u \right) + \zeta g_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla \cdot u \right\}. \quad (20)$$

∇_μ は曲がった時空での共変微分をあらわします。なお $P^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ は空間方向への射影テンソルで、これにより構成方程式は座標不変な形式で書かれます。

◇ ここでは曲がった時空といっても、AdS/CFT のように 5 次元の曲がった時空ではなく、曲がった 4 次元境界時空 $g_{\mu\nu}^{(0)}$ を想定していることに注意してください。もちろん AdS/CFT によると、 $g_{\mu\nu}^{(0)}$ は 5 次元に起源を持つわけですが、この議論自体は AdS/CFT とは無関係です。この点混乱しやすいので注意してください。

式 (20) で $g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}^{(0)}$ と展開し、流体静止系 $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ を取ると、たとえば $\delta\langle\tau^{xy}\rangle$ は

$$\delta\langle\tau^{xy}\rangle = -2\eta\Gamma_{xy}^0 = -\eta\partial_t h_{xy}^{(0)} \rightarrow i\omega\eta h_{xy}^{(0)}. \quad (21)$$

これがほしい結果です。これは線形応答関係式 (12) と同じ形をしています。(12) と (21) を組み合わせたものが、 η についてのいわゆる**久保公式**です：

$$\eta = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} G_R^{xy,xy}. \quad (22)$$

同様の考察から、 ζ をはじめとする輸送係数に対する式も導出することができます。その結果を用いることで、AdS/CFT でこれらの輸送係数を決めることもできます。

2.2 GKP-Witten 関係式の右辺 (重力理論)

GKP-Witten 関係式の右辺

$$Z_{\text{AdS}}[\phi_{(0)}] = e^{iS_{\text{on-shell}}[\phi_{(0)}]} \quad (23)$$

は以下のことを意味しますが、言葉で説明するより、実際に簡単な例でやってみた方がわかりやすいと思います (2.2.1 節)：

- 場の理論側と違い、 $S_{\text{on-shell}}[\phi_{(0)}]$ は on-shell 作用です。すなわち ϕ の運動方程式を解いて、境界での値を $\phi_{(0)}$ と書きます。そうやって得られた解を作用に代入したものです。
- ϕ は運動方程式を満たすので、on-shell 作用は (境界での) 表面項のみに帰着します。このようにして、5次元から4次元の量が出てきます。この表面項を境界の作用と同定します。

on-shell 作用の評価に使う作用 S は、5次元の一般相対論の作用です：

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_{\text{matter}}. \quad (24)$$

第二項の「 2Λ 」は宇宙定数と呼ばれる定数項です。AdS/CFT では負の宇宙項を考えます。その際、 $2\Lambda =: -12/L^2$ として、長さの次元をもつ量 L であらわすのが便利です。物質場の作用 S_{matter} は典型的にはマクスウェル場やスカラー場を含みます：

$$S_{\text{matter}} = \int d^5x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4}F_{ab}^2 - \frac{1}{2}(\nabla_a\phi)^2 - V(\phi) \right\}. \quad (25)$$

作用 (24) の解として、漸近的⁵AdS 時空があります：

$$ds^2 \sim \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + d\vec{x}^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (26)$$

$$= \left(\frac{L}{u}\right)^2 (-dt^2 + d\vec{x}^2 + du^2), \quad (u \rightarrow 0) \quad (27)$$

($u := L^2/r$). 境界は $r \rightarrow \infty$ ないしは $u = 0$ に位置します。この節ではこのような時空を背景場として考え、物質場は摂動として扱います。

メトリック (26) について、いくつかコメントをしておきます：

- この時空は、 (t, \vec{x}) -方向に対して、ローレンツ不変性 $SO(1,3)$ や並進不変性を持ちます。これは平坦な時空中の境界理論を考えることに相当します。さらに、この時空は以下のスケール不変性も持ちます：

$$x^\mu \rightarrow ax^\mu, \quad r \rightarrow \frac{1}{a}r. \quad (28)$$

ただしメトリック (26) の形は漸近形なので、この不変性は漸近的にのみ成立しています。この AdS 時空のスケール不変性に対応して、AdS/CFT で考える場の理論にもスケール不変性があります。

- また r は境界時空の立場ではエネルギーと同じ変換性を持ちます。場の理論の時空が4次元で、重力理論の時空が5次元なのは、これが理由です。場の理論もスケール不変性を持ちますが、重力理論ではこれを幾何的に実現しています。したがって、場の理論の高エネルギーは r が大きい領域に相当します。この領域でスケール不変性 (28) があるということは、AdS/CFT であらわれる場の理論は、高エネルギーでスケール不変性が回復する理論だということです（この点、QCD とは高エネルギーでの振るまいが大きく違います。）
- さらにこの時空はより大きな対称性、コンフォーマル対称性を持ちます。したがって、場の理論でもそうなっているはずですが。実際、しばしば相対論的な場の理論では、ローレンツ不変性とスケール不変性が合わさって、より大きな対称性、コンフォーマル対称性へと拡張されます [6]。AdS/CFT という名前に CFT (conformal field theory) という言葉が出ているのは、この事情からです。ただし、AdS/CFT で議論されるゲージ理論・重力理論では、コンフォーマル対称性を持たない系の方がふつうです。たとえば、相転移が起こる系も知られているので、この場合明らかにスケール不変性はありません。したがって、AdS/CFT という名前には語弊があり、歴史的な意味合いしかありません⁶。

⁵ $u \rightarrow 0$ 極限という意味。物質場がないときは、式 (26) は厳密解の一つです。

⁶AdS/CFT という名前が不都合だということで、さまざまな代替案が提案されてきました。一番有力なものとして「ゲージ・重力双対性」がありましたが、AdS/CFT が QCD に限らず場の理論にも応用されるようになって、この名前も具合が悪くなってきました。「バルク/境界双対性」や「場の理論・重力双対性」にかえてもいいですが、AdS/CFT の応用がど

- なお、今考えている量が、スケーリングの下で r のように振るまう場合を **コンフォーマル次元 1** とします。境界時空の変換性から、境界時空の立場では場の理論でのコンフォーマル次元に一致し、大雑把には質量次元になります。

私たちが求めたいのは、ゲージ理論の生成汎関数でしたが、GKP-Witten 関係式はこれが重力理論の作用を評価することで求められると主張します。GKP-Witten 関係式の両辺をソース $\phi_{(0)}$ で汎関数微分すると、例えば一点関数が得られます：

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\delta S_{\text{on-shell}}[\phi_{(0)}]}{\delta \phi_{(0)}}. \quad (29)$$

以下では、さまざまな例を通して、この量を計算します。

2.2.1 スカラー場の例

この 2.2.1 節は注意深く読んでください。AdS/CFT での計算の典型例だからです。結局のところ、我々が AdS/CFT でおこなう計算はこの例と大差ありません。

まず例として massless スカラー場を考えます：

$$S = -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} (\nabla_a \phi)^2. \quad (30)$$

これは例なので、スカラー場に結合する境界理論のオペレーターを具体的に指定する必要はありません。単に \mathcal{O} とします。

式 (30) の on-shell 作用を評価するわけですが、以下の議論では境界 $u \rightarrow 0$ での漸近形のみを問題にします。このため、メトリック (27) を使えば十分です (式中の「 \sim 」は漸近的に成立することを示す。) $\sqrt{-g} \sim u^{-5}$, $g^{uu} \sim u^2$ を使い⁷、式 (30) を部分積分すると、

$$S \sim \int d^4x du -\frac{1}{2u^3} \phi'^2 \quad (':= \partial_u) \quad (31)$$

$$= \int d^4x \int_0^1 du \left(-\frac{1}{2u^3} \phi' \phi \right)' + \left(\frac{1}{2u^3} \phi' \right)' \phi \quad (32)$$

$$= \int d^4x \frac{1}{2u^3} \phi' \phi \Big|_{u=0} + \int d^4x du \left(\frac{1}{2u^3} \phi' \right)' \phi. \quad (33)$$

式 (33) の第二項目は、単に運動方程式

$$\left(\frac{1}{2u^3} \phi' \right)' \sim 0. \quad (34)$$

です。運動方程式は二階なので、二つの独立解があります。これらの漸近形は

$$\phi \sim \phi_{(0)} (1 + \phi_{(1)} u^4), \quad (u \rightarrow 0) \quad (35)$$

ここまで広がるか読めない現時点では、むやみに名前を作らず、もとの AdS/CFT を使い続けるのが無難です。余談ですが、AdS/CFT は名前に悩まされてきました。もともとは “Maldacena conjecture” と呼ばれましたが、そもそも conjecture でない双対性はないのですたれました。

⁷この 2.2.1 節では $L = 1$ とします。

となるのが、式 (34) に代入することでわかります。

さて、運動方程式より、作用 (33) は on-shell では表面積分のみになります：

$$S_{\text{on-shell}} \sim \int d^4x \frac{1}{2u^3} \phi' \phi \Big|_{u=0} . \quad (36)$$

したがって、漸近形 (35) を代入することで、

$$S_{\text{on-shell}}[\phi_{(0)}] = \int d^4x 2\phi_{(0)}^2 \phi_{(1)} . \quad (37)$$

この結果を GKP-Witten 関係式に代入することで、一点関数は

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\delta S_{\text{on-shell}}[\phi_{(0)}]}{\delta \phi_{(0)}} = 4\phi_{(1)} \phi_{(0)} . \quad (38)$$

以上得られた結果をまとめると⁸、

$$\phi \sim \phi_{(0)} + \frac{1}{4} \langle \mathcal{O} \rangle u^4 , \quad (u \rightarrow 0) \quad (39)$$

あるいは

バルク場の遅く落ちる項	→	ソース
バルク場の早く落ちる項	→	応答 (オペレーターの期待値)

これはスカラー場での例ですが、以下でみるように、マクスウェル場や重力場でも同様の関係が成立します⁹。やや複雑になるだけで、やることは同じです。なお、スケール変換 (28) の下でスカラー場 ϕ は不変なので (作用 (30) が不変)、 $\phi_{(0)}$ はコンフォーマル次元 0、 $\langle \mathcal{O} \rangle$ はコンフォーマル次元 4 をもつことがわかります。

この段階で、 $O(1)$ と $O(u^4)$ の項は独立解です。しかし、これらの間には線形応答関係式が成り立つはずですが、AdS/CFT の立場では、AdS 時空内部 (ブラックホールのホライズン) に境界条件を課すことに相当します (3.2 節を参照)。すると、線形摂動の場合、 $O(1)$ と $O(u^4)$ の項は全体の係数 $\phi_{(0)}$ を除きユニークに決まります ($\phi_{(1)}$ がユニークに決まる)。それを先取りして書いたのが、式 (35) の漸近形です。

その点を考慮に入れると、式 (38) は線形応答関係式 (10) に他なりません¹⁰。遅延グリーン関数は $\phi_{(1)}$ を計算することで求められます。ここでは例なので、実際に $\phi_{(1)}$ は求めませんが、実質 3.2 節で計算することになります。なお、最終的に必要なのは境界での量ですが、バルク時空内部で境界条件を課す必要があるため、バルク時空全域で解を求める必要があることに注意してください。これは AdS/CFT での典型的な事情です。

⁸* バルク場の早く落ちる項、遅く落ちる項というのは、正確には場が規格化可能か (normalizable) どうかという意味です。規格化可能条件としては、作用の有限性 (Euclidean) やエネルギーの有限性 (Lorentzian) を取ります。規格化可能な場は量子化でき、一方できない場はむしろ外場として考えるべきです。そのように考えると、遅く落ちる項であっても、規格化可能というケースがありえます。これは実際みられる現象で、この場合ソースとオペレーターの意味づけを逆転することもできます [7]。そのことも勘案してはじめて場の理論との対応がうまくつくようになっていきます (5 節の問 2 を参照)。

⁹* 重力場の場合、この関係は正確には成り立ちません。ここでは詳細は述べませんが、この関係に修正が加わることではじめて、流体力学とうまく対応がつくという構造になっています (5 節の問 4 を参照)。

¹⁰* 本来、線形応答関係式に出ているのは $\delta \langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle_0$ です。しかし、以下多くの例では、 $\langle \mathcal{O} \rangle_0 = 0$ なので、 $\delta \langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle$ となります。バルクの立場では、 ϕ の摂動のみを考え、 ϕ の背景場がないことに相当します。

2.2.2 AdS/CFT 「辞書」

実際に境界理論のどのオペレーターが、バルク理論のどの場に対応するのでしょうか。流体力学の主たる興味は保存量、 $T^{\mu\nu}$ やカレント J^μ です。そこで、これらのオペレーターを考えましょう。これまでの議論から明らかなように、これらのオペレーターが対応するバルク理論の場は、ソース $h_{\mu\nu}^{(0)}$ 等を5次元に格上げしたものです：

境界理論のオペレーター		バルク理論の場
$T^{\mu\nu}$	\leftrightarrow	重力の摂動 h_{ab}
J^μ	\leftrightarrow	マクスウェル場 A_a

⚠️ 混乱しやすいのですが、上の表のマクスウェル場はバルクの場です。境界理論のゲージ場ではありません（たとえば以下に出てくる $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論のような）。

具体的に、どの境界理論がどのバルク理論に対応するのかを知るには、超弦理論とそれに出てくる D ブレーンの知識が不可欠です。ここでは紹介は割愛し、結果だけを天下一的に与えることにします（詳しくは 補遺 A を参照）。もっとも単純な AdS/CFT では、

$$\mathcal{N} = 4 \text{ SU}(N_c) \text{ 超対称ゲージ理論の large-}N_c \text{ 極限}$$

↓

$$\text{負の宇宙項をもった 5次元の pure gravity}$$

という対応です。 $\mathcal{N} = 4$ は、このゲージ理論がもつ超対称性の数をあらわします。large- N_c 極限は、't Hooft 結合定数 $\lambda := g_{\text{YM}}^2 N_c$ を固定して、ゲージ理論の結合定数 $g_{\text{YM}} \rightarrow 0$ 、 $N_c \rightarrow \infty$ とした極限です¹¹。

ブラックホールの結果をゲージ理論の結果に焼き直すには、ゲージ理論と重力理論のパラメーターがどう結びつくのかを知っておく必要があります。この「辞書」は

$$\begin{aligned} N_c^2 &= \frac{\pi L^3}{2 G_5} \\ \lambda &= \left(\frac{L}{l_s}\right)^4 \end{aligned} \tag{40}$$

ここで、左辺がゲージ理論のパラメーター、右辺が重力理論のパラメーターです。 l_s はストリング長さと呼ばれる超弦理論の基礎的なスケールです。この辞書もやはり D ブレーンから作ることができます（補遺 A）。

2.2.3 カレントの場合

もう一つ例として、今度は境界理論が $U(1)$ カレント J^μ をもつ場合を考えましょう。この段階では、カレントを具体的には特定しません。通常の電磁気学的なカレントかもしれませんが、それに限

¹¹以下では、簡単化のためさらに $\lambda \rightarrow \infty$ だけを考えます。

定されるわけではありません (4.1 節 のホログラフィック超伝導では、「超伝導」を考えるので、こう解釈しますが、同じ系を「超流動」として解釈するのなら流体の回転に相当します。) たとえば、QCD ではバリオン数保存則に伴う $U(1)_B$ カレントが存在します。また、 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論の場合、これは R-対称性に伴う R-カレントと呼ばれるものです。

いずれにせよ、 $\langle J^0 \rangle = \rho$ はこの $U(1)$ の下での「粒子数」密度、あるいは「電荷」密度とでも呼ぶべきものです。また、 ρ に対する化学ポテンシャルを μ とします。辞書 (2.2.2 節) よりこのような場合は、バルクのマクスウェル場 A_0 に相当します。マクスウェル場の場合、漸近的な振るまいは式 (35) のかわりに、

$$A_0 \sim A_0^{(0)} \left(1 + A_0^{(1)} u^2 \right), \quad (u \rightarrow 0) \quad (41)$$

となります (5 節 問 3)。これらの振るまいの物理的意味は明らかです。遅く落ちる項が定数になるのは、ゲージ・ポテンシャルが F_{ab} のように微分でしか入っていないためです (すなわちゲージ不変性から来る)。一方、早く落ちる項のベキは、単にバルク 5 次元のクーロンの法則をあらわしています。

スカラー場の議論同様、実際にマクスウェル場の作用を評価することで

$$\mu = A_0^{(0)}, \quad (42)$$

$$\langle J^0 \rangle \sim A_0^{(1)} A_0^{(0)}, \quad (43)$$

と解釈されます。後者は J^0 に対する線形応答関係式 (13) にほかなりません。

もちろん、 A_x についても同様の式が成り立ちます：

$$\langle J^x \rangle \sim A_x^{(1)} A_x^{(0)}. \quad (44)$$

こちらは、式 (14) にほかなりません。2.1.2 節の議論から、

$$\sigma(\omega) = \frac{A_x^{(1)}}{i\omega}. \quad (45)$$

したがって、バルクの立場では、 A_x を解き $A_x^{(1)}$ を決めることで伝導率 σ を決めることができます。4.1 節 のホログラフィック超伝導では、この計算をすることで伝導率の発散を示します。

3 輸送係数の具体計算：流体力学

3.1 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論：熱力学量

これまでスカラー・オペレーター \mathcal{O} 、カレント J^μ の例を考えましたが、いよいよ流体力学の場合を考えましょう。また、実際に輸送係数を求めるために、特定の理論を考えることにします。もっとも簡単な AdS/CFT として、 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論の場合を考えましょう。これは、バルク理論としては物質場がない pure gravity に相当します。

この系のブラックホールとしては、シュワルツシルド-AdS₅ ブラックホール解があり、ここでは以下の座標系を使います：

$$ds^2 = \left(\frac{r}{L} \right)^2 (-f dt^2 + d\vec{x}^2) + L^2 \frac{dr^2}{fr^2}, \quad f = 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4, \quad (46)$$

$$= \left(\frac{r_0}{L} \right)^2 \frac{1}{u^2} (-f dt^2 + d\vec{x}^2) + L^2 \frac{du^2}{fu^2}, \quad f = 1 - u^4, \quad (47)$$

($u := r_0/r$). 座標系 r では、ブラックホールのホライズンは $r = r_0$ に位置しています。一方、座標系 u では、ホライズンは $u = 1$ 、境界は $u = 0$ に位置します。以下ではこの時空を背景場として考えます。

教科書で習うような球状のブラックホールとは違い、このブラックホールではホライズンが (x, y, z) -方向に無限に伸びています。このようなホライズンを “planar horizon” と呼びます。球状のホライズンを持つブラックホールを考えることもできますが、ここで planar horizon を考えるのは以下の理由からです：

1. バルクの境界がゲージ理論の空間に対応するので、ブラックホールのトポロジーとゲージ理論がある空間のトポロジーは一致します。したがって、planar horizon が通常の \mathbb{R}^3 上のゲージ理論に対応します。一方、コンパクトなホライズンを持つブラックホールは、コンパクトな空間上のゲージ理論に対応します。
2. 流体力学や物性では、おもに低エネルギー、長波長極限を考えます。ブラックホール時空上で ϕ という摂動を考えたとすると、planar horizon の場合は平面波で分解します： $\phi \propto e^{-i\omega t + iqz}$ 。この場合、($\omega \rightarrow 0, q \rightarrow 0$) 極限を取るのに問題ありません。一方、球状のホライズンの場合は球面調和関数で分解しますが $\phi \propto Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 、その結果スペクトルが離散的になるので、このような極限操作ができません。

このブラックホールの熱力学量の求め方は文献 [1] に説明があるので、簡単な説明にとどめておくと、

- 温度は時空 (47) をユークリッド化して ($\tau := it$)、(τ, u) 平面がなめらかになるという要請から決まります：

$$T = \frac{1}{\pi} \frac{r_0}{L^2}. \quad (48)$$

これがゲージ理論の温度に対応します。

- ブラックホールのエントロピー密度は、

$$s = \frac{a}{4G_5} \quad (49)$$

から求められます。ここで a はホライズンが広がっている (x, y, z) -方向の単位長さあたりの面積です。ちなみに、この式はなにも今考えているブラックホールだけではなく、重力作用が式 (24) の形をしている限り常に成り立つ結果です。今の場合、 $a = (r_0/L)^3$ なので辞書 (40) を使うと

$$s = \frac{1}{4G_5} \left(\frac{r_0}{L}\right)^3 = \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^3. \quad (50)$$

エントロピー密度が $O(N_c^2)$ であることは、ゲージ理論が非閉じ込めのプラズマ相にあることを意味します。閉じ込め相では $SU(N_c)$ 一重項がエントロピー密度に寄与するため、自由度は N_c の関数になるわけではないからです。じつは、 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論はスケール不変な理論であるため、プラズマ相しか存在しません。実際、メトリック (47) は、変換 (28) の下で不変です ($r_0 \rightarrow r_0/a$ という変換もあわせると)。

3.2 ずり粘性率の計算

では実際に $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論の場合で輸送係数を求めてみましょう。 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論はスケール不変な理論なので、対称性から

$$\text{体積粘性率 } \zeta = 0, \quad \text{音速 } v_s^2 := \frac{\partial p}{\partial \epsilon} = \frac{1}{3}. \quad (51)$$

がただちに決まってしまう。したがって、非自明な量はずり粘性率 η だけです。(もちろん ζ, v_s が上記の値通りかどうかを確かめるのも大切な consistency check であり、これは η 同様計算できます。)

2.1.3 節の議論から、境界時空に $h_{xy}^{(0)}$ の摂動を与え、 T^{xy} への応答をみてやれば、 η を決めることができます。したがって、5次元の重力摂動 h_{xy} を考えることになります。

運動方程式を書き下すと、 $(u^2 h_{xy})$ は massless スカラーと同じ運動方程式を満たします。したがって、2.2.1 節のスカラー場と同じように、

$$(u^2 h_{xy}) \sim h_{xy}^{(0)} \left\{ 1 + h_{xy}^{(1)} u^4 \right\}, \quad (u \rightarrow 0) \quad (52)$$

と振るまいます。スカラー場と同様、早く落ちる項は期待値をあらわし、AdS/CFT によれば、

$$\langle \tau^{xy} \rangle = \frac{1}{4\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} h_{xy}^{(1)} h_{xy}^{(0)} \quad (53)$$

と解釈されます (5 節 問4)。ここで式 (21) と式 (53) を比べ、また温度 (48)、エントロピー密度 (50) を使うと

$$h_{xy}^{(1)} = \frac{\eta}{s} i\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} := \frac{\omega}{T} \quad (54)$$

と書き替えることができます。

$h_{xy}^{(1)}$ を決めるには実際に運動方程式を解く必要があります (補遺 B)。この際注意すべき点として、

- この例では、結局 massless スカラーに帰着するので、運動方程式を解くのは簡単そうに見えますが、実はこの例ですら運動方程式 (96) は解けません。微分方程式が確定特異点を3つより多く含むためです。これはブラックホールの問題では典型的に現れる事情で、その結果、ブラックホールでの摂動問題には数値計算が不可欠です。

幸いなことに、今おもに興味があるのは流体極限 ($\omega \rightarrow 0, q \rightarrow 0$) です。したがって、運動方程式を (ω, q) で展開して、低次が解ければ十分です。この場合はしばしば運動方程式が解けます。

- また2.2.1 節で議論したように、5次元時空内部で境界条件を一つ課す必要があります。この境界条件として、ホライズンで場が吸収される一方であるという条件を課します (“incoming-wave” 境界条件)。ホライズンからは何も逃れられないので、場が吸収される一方というこの境界条件は自然です。

じつは輸送係数を計算する際、この境界条件が散逸の起源に本質的な役割を果たします。そもそも、一般相対論は時間反転対称な系です。その一般相対論から散逸のような非可逆性が生まれるのは、この境界条件が理由です。

このようにして摂動方程式を解いたものが式 (103) で、

$$h_{xy}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} i\mathbf{w} + O(\omega^2, q^2). \quad (55)$$

式 (54) と式 (55) を比べると、

$$\boxed{\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}} \quad (56)$$

η の値自体は、辞書 (40) とエントロピー密度 (50) を使えば求めることができます：

$$\eta = \frac{1}{16\pi G_5} \left(\frac{r_0}{L}\right)^3 = \frac{\pi}{8} N_c^2 T^3. \quad (57)$$

式 (49) にあるように、エントロピー密度はホライズンの単位面積 a に比例するので、 η も a に比例していることに注意してください。次にみるように、この点は $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論だけではなく、一般に成り立ちます。

3.3 η/s の普遍性

今の計算は、もっとも簡単なシュワルツシルド-AdS ブラックホール、 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論に対応するものです。しかし、ほかにも様々な理論で同様の計算がされていて、既知の例では常に $\eta/s = 1/(4\pi)$ が成り立っています。おもな例としては [8]

- (i) コンフォーマルな場合（以下、すべてゲージ理論の非閉じ込めのプラズマ相での計算です）
- (ii) 非コンフォーマルな場合：スケールを持った理論、または QCD のようなダイナミカルなスケールが出る理論のことです。
- (iii) 4次元時空以外の場合
- (iv) 有限密度の場合
- (v) (クォークのような) 基本表現を含む場合：上記のケースではフェルミオンやスカラーがあっても随伴表現になっている場合ですが、基本表現を含む場合でも成立します。
- (vi) 時間発展する $\mathcal{N} = 4$ プラズマ

このうち、(vi) の場合以外を示すには、重力理論にさまざまなゲージ場やスカラー場を加えた理論を考えます。この場合でも、摂動方程式を同様に解くことができ、同じ結果が導かれます [9]。この際に普遍性が成り立つ技術的な理由は、

1. 境界時空の座標を $x^\mu = (t, x, y, z)$ として、いま z 方向を伝搬する摂動を考えていました： $k_\mu = (\omega, 0, 0, q)$ 。すると k_μ を不変に保つ little group として、 (x, y) -方向の $SO(2)$ が存在します。エネルギー運動量テンソルも重力の摂動も、この little group の変換性の下で分類することができます。結果、スカラー、ベクトル、テンソルの各モードに分けられます。スカラーは longitudinal 成分、ベクトルは transverse 成分のことです。このように分類するのは、各モードが違う変換性を持つため、各モードの運動方程式が結合しないためです。

さて、いま考えていた摂動 h_{xy} はこの分類の下でテンソルモードです。たとえ重力理論にマクスウェル場やスカラー場があったとしても、それらはテンソルとして変換しないので、テンソルモードとは結合しません。

一般的にこのテンソルモードの運動方程式は、massless スカラーの形をしていることを確かめることができます。この運動方程式は一般的に解くことができ、 η はホライズンの単位面積 a に比例します。

2. 一方、エントロピー密度の方も、式 (49) で触れたように、広いクラスのブラックホールに対して、 a に比例します。
3. したがって、 η/s と比をとると、 a がキャンセルしあい定数だけが残り、式 (56) が一般に成立します。

これらの結果から、 η/s の普遍性は、強結合の large- N ゲージ理論に共通した性質ではないかと考えられます。large- N ゲージ理論が QCD の良い近似になっているのであれば、クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) に対しても同様の結果が成り立つのではないかと想像されます。

実際 RHIC 実験によると、QGP は極めて小さな粘性をもった流体として振るまうとされ、その値は式 (56) に近いと見積もられています (文献 [10] をはじめとする論文)。また、 η/s の値は、格子数値計算でも調べられており、やはり式 (56) に極めて近いようです [11] (初期の仕事については、文献 [12]。) この例は、pure $SU(3)$ ゲージ理論に対する結果だということにも注意してください。AdS/CFT の結果は、超対称ゲージ理論についての結果です¹²。しかし、文献 [11] の結果は、超対称性がなく、かつ large- N 極限でないゲージ理論に対しても、普遍性はいい近似で成り立っていることを示唆します。

3.4 補正と因果的流体力学

さきにブラックホールへの摂動を解いた際、厳密には解けなかったので低エネルギー極限で解きました。しかし、式 (55) をみればわかるように、 $h_{xy}^{(1)}$ に対して $O(\omega^2, q^2)$ の補正があるはずですが、これは $T^{\mu\nu}$ に対する補正のはずですが、場の理論側でどう解釈されるのでしょうか？

場の理論的にみた場合、流体力学は有効理論の低次にほかなりません。流体力学には有効理論の意味での補正が加わるはずですが、このような補正を加えた理論を、**因果的流体力学**、**二次流体力学** (second-order hydrodynamics) などと呼び、その代表的な理論に **Israel-Stewart 理論** があります。これらの理論については、原子核のコミュニティでも盛んに議論されています。

これらの理論では、有効理論の高次の項から新しいパラメーター、新しい輸送係数が出てきます。しかし、上記の理論は流体力学同様、枠組みにすぎないので、それらのパラメーターを決めることはできません。しかし、AdS/CFT でさきほど無視した $O(\omega^2, q^2)$ の補正をきちんと計算することができます [13, 14, 15]。AdS/CFT で得られた結果は、数カ月もしないうちにクォーク・グルーオン・プラズマの流体シミュレーションで使われました。

高次の補正はどのように出てくるのでしょうか？ 流体力学の基礎方程式は、保存則 (17) と構成方程式 (18), (19) でした。このうち、構成方程式は現象論的な方程式として課せられたものです。有効理論の高次は、構成方程式に微分展開の高次項を加えることに相当します。その結果、式 (19) に $O(\omega^2, q^2)$ の補正があらわれます。たとえば式 (21) は、文献 [13] によると因果的流体力学では以下

¹²有限温度では超対称性は破れるので、ここで言う超対称ゲージ理論とは、ゼロ温度で超対称性をもつゲージ理論という意味です。

のように変更されます ($d \geq 4$ の場合) :

$$\delta\langle\tau^{xy}\rangle = \left[i\omega\eta - \eta\tau_\pi\omega^2 + \frac{\kappa}{2}\{(d-3)\omega^2 + q^2\} \right] h_{xy}^{(0)}. \quad (58)$$

ここで τ_π, κ が因果的流体力学に出てくる新しい輸送係数 (のうちの二つ) です。バルクの立場では、これが $h_{xy}^{(1)}$ に対する $O(\omega^2, q^2)$ の補正に他なりません。

また、AdS/CFT は単にこれらの輸送係数を決めるだけではありません。AdS/CFT の結果と、上記のような枠組みは無矛盾になっていなければいけません。実は、因果的流体力学の研究には長い歴史があり、非相対論的な場合も含めると 100 年以上議論されています。しかし、いまだに枠組みは一つに収束していません。したがって、AdS/CFT の結果を矛盾なく解釈できるか考えることで、それらの枠組みが妥当なものかどうか判断できるかもしれません。事実、AdS/CFT の結果を矛盾なく解釈するために、Israel-Stewart 理論では欠けていた高次項が存在することが指摘されました。それに伴って、これまで議論されたことのなかった新たな輸送係数が生じました。たとえば式 (58) の κ がそうです。(これらの発展についての詳しいレビュー、およびそもそもなぜそのような補正が重要なのかについては、文献 [16] を参照)

4 輸送係数の具体計算：ホログラフィック超伝導

これまでおもに QCD への応用を見据えてきましたが、物性でもしばしば強相関系があらわれます (たとえば高温超伝導など)。こういった場合にも双対な重力的記述がほしいところです。AdS/CFT による η/s の導出の「成功」を受けて (3.3 節)、近年 AdS/CFT を物性に応用しようという多くの研究がされています。その一例として、**ホログラフィック超伝導/超流動**を紹介しましょう [17, 18, 19]。 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論は重力場だけの系でしたが、ホログラフィック超伝導はスカラー場とマクスウェル場が登場する例になっています。

4.1 ホログラフィック超伝導

AdS/CFT を物性に応用する場合、ただちに思いつく問題があります。AdS₅ は $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論に対応していました。これは QCD とは違う系ですが、ヤン・ミルズ理論という点でそう遠いわけではありません。しかし、そもそも物性での強相関系に何か large- N ゲージ理論が関わっているかどうかはつきりしません。そこで、一端実際の物性系との対応、場の理論との対応は保留にして、とにかく large- N ゲージ理論の枠内でたとえば「超伝導」を実現することを考えましょう。そして、超伝導を実現するために必要な材料を重力理論側で集めることにしましょう。

AdS/CFT の枠内で超伝導を実現するには、どんな材料が必要でしょうか。まず場の理論を使うので、 $T^{\mu\nu}$ が存在するはずですが、また超伝導に特徴的な現象として伝導率の発散が挙げられるので、それをみるために $U(1)$ カレント J^μ が必要です。さらに、超伝導は二次相転移に伴ってあらわれる現象ですが、相転移のオーダーパラメーターは荷電スカラー・オペレーター $\langle\mathcal{O}\rangle$ です。 $\langle\mathcal{O}\rangle$ は、超伝導のギンツブルグ-ランダウ理論での「擬波動関数」に相当します。

すると AdS/CFT の辞書 (2.2.2 節) から、バルクに必要な場を決めることができます。境界の $T^{\mu\nu}, J^\mu, \langle\mathcal{O}\rangle$ に対応して、それぞれメトリック g_{ab} , マクスウェル場 A_a , 複素スカラー場 Ψ が必要で

す。したがって、ホログラフィック超伝導の系として、さまざまなものが知られていますが、典型的には以下のようなアインシュタイン-マクスウェル-複素スカラーの系を考えることになります：

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - \frac{1}{4} F_{ab}^2 - |(\nabla_a - iqA_a)\Psi|^2 - V(|\Psi|) \right]. \quad (59)$$

この系の解としては、 $\Psi = 0$ のよく知られた荷電ブラックホール（ライスナー-ノルドストリウム-AdS ブラックホール）があります。これは常伝導相に対応します。しかし低温 $T < T_c$ では、この解は不安定となり、二次相転移を起こします。その結果 $\Psi \neq 0$ のブラックホールに置き換わります。 Ψ は相転移を特徴づけるので、 Ψ に対応するオペレーター $\langle O \rangle$ が確かに場の理論側でのオーダーパラメーターと解釈できます。

もともと、この理論に対応する場の理論ははっきりしてはいません。というのも、式 (59) は $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論と違い、補遺 A の議論を経由して求められたものではなく、むしろ超伝導を再現するために最低限必要な材料を集めてきたにすぎないからです。しかし、この低温相がある種の超伝導／超流動に対応しているというのが主張です。その根拠として、以下では伝導率の発散やエネルギーギャップの存在を議論しましょう。

ただし、重力に物質場が複数結合したこのような系の解析は容易ではなく、低温相（超伝導相）での解析解は知られていません。したがって、しばしば数値計算や近似を使います。そのような近似の一種として、以下では「プローブ近似」を使います。物質場を $\Psi \rightarrow \Psi/q$, $A_a \rightarrow A_a/q$ と再定義し、

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda + \frac{1}{q^2} \left\{ -\frac{1}{4} F_{ab}^2 - |(\nabla_a - iA_a)\Psi|^2 - V(|\Psi|) \right\} \right] \quad (60)$$

スカラー場の電荷 $q \rightarrow \infty$ とするのがプローブ近似です。作用をみればわかるように、この極限ではマクスウェル場およびスカラー場は重力と結合しません。物質場の影響が無視できるので、メトリックとしてはこれまでと同じシュワルツシルド-AdS 解 (47) で十分です（以下 $d = 4$ の場合を考えます）。

ただし、シュワルツシルド-AdS 解自体はスケール不変なので、そのままでは相転移は起こりません。温度とは違うスケールを導入する必要があります。そこで化学ポテンシャル μ を導入します。このメトリックの下での物質場の解としては、式 (41) の形のものがあります¹³：

$$A_0 = \mu(1 - u^2), \quad A_i = 0, \quad \Psi = 0. \quad (61)$$

そこで式 (47) と式 (61) を背景場として、 Ψ, A_μ の摂動方程式を解きます。ただし、この場合でも数値計算が必要です。

この系で相転移が起こる原因は、スカラー場の質量がマクスウェル場のせいで effective に tachyonic になり、解が不安定になるためです。作用 (60) よりスカラー場の二次部分は

$$m_{\text{eff}}^2 = m^2 - A_0^2(-g^{00}) \sim m^2 - \frac{1}{(\pi L)^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \frac{u^2(1 - u^2)}{1 + u^2}. \quad (62)$$

したがって、十分低温で Ψ は tachyonic になります。

¹³* A_0 の解が μ を除いて決まるのは、 A_0 が規格化可能という境界条件を通常置くこと（ホライズンで発散しないように）から来ています。ただし、このようなゲージ不変でない条件を置くことに意味があるのか、個人的にはよくわかりません。

4.2 ホログラフィック超伝導の臨界現象

プローブ近似の下で、 $\Psi(u)$ の方程式を数値的に解いたものが図 2a です。転移点 T_c 近傍では、

$$\langle \mathcal{O} \rangle \propto (T_c - T)^{1/2} \quad (63)$$

になりますが、これは二次相転移近傍でのギンツブルグ-ランダウ理論の振るまいです。

そこで、簡単にギンツブルグ-ランダウ理論についておさらいしておきましょう。一例として、強磁性体では転移温度 T_c 以下で自発磁化 m があらわれ、 $T = T_c$ で $m = 0$ になります。したがって、 m はこの相転移のオーダーパラメーターです。また、 m が相転移点で連続だということは、二次相転移を意味します。

$T \sim T_c$ では m は小さいので、自由エネルギー f は m でベキ展開できます：

$$f = c(\partial_i m)^2 + am^2 + \frac{1}{2}bm^4 + \dots - mh. \quad (64)$$

これは通常のヒッグス型のポテンシャルで、 $a > 0$ のときは原点 $m = 0$ で f が最小になります。これは高温での振るまいと一致します。一方、 $a < 0$ のときは対称性の破れが起き、 $m \neq 0$ の自発磁化をもちます。これは低温での振るまいです。したがって、

$$a = a_0(T - T_c) + \dots \quad (a_0 > 0), \quad b = b_0 + \dots \quad (b_0 > 0), \quad (65)$$

という形を仮定します。式 (64) の (空間的に) 一様な解は、 $\partial_m f|_{h=0} \sim am + bm^3 = 0$ より $m \propto \sqrt{-a/b} \propto \sqrt{T_c - T}$ となります。これは式 (63) と同じ振るまいです。

超伝導/超流動も式 (64) と同じ形の自由エネルギーをもちます：

$$f = \frac{1}{2m} |(-i\hbar\partial_i - qA_i)\Psi_{\text{GL}}|^2 + a|\Psi_{\text{GL}}|^2 + \frac{1}{2}b|\Psi_{\text{GL}}|^4 + \dots. \quad (66)$$

ここで Ψ_{GL} は擬波動関数、 A_i は超伝導の場合は電磁場、超流動の場合は流体の回転をあらわします。

いまはオーダーパラメーターの振るまいだけをみていますが、ほかのさまざまな物理量も同様のベキ則に従うので、一連の指数 (静的臨界指数) を定義することができます。これらの指数は、対称性や空間次元などだけで決まり、個々の系の詳細にはよりません (ユニバーサリティ)。ホログラフィック超伝導に対して、これらの静的臨界指数も計算できて、その値はギンツブルグ-ランダウ理論と一致します [21]¹⁴。

ギンツブルグ-ランダウ理論は平均場理論の一種ですが、平均場理論に一致するのは、large- N 極限を考えているためでしょう。この極限ではゆらぎが抑えられ、平均場の結果が厳密に成り立つからです。ホログラフィック超伝導の臨界指数は、空間次元の数によらないことも確認されていますが、これも平均場理論の特徴です¹⁵。臨界指数の値がギンツブルグ-ランダウ理論に一致することは物性系としては自然ですが、これは当たり前結果ではありません。

第一に、今考えているのは、重力理論としてはブラックホールの二次相転移です。そもそも一般に重力の存在下では、熱平衡が存在しないため通常の統計力学は成立しません。たとえばシュワルツシ

¹⁴標準的な convention で書くと、 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta) = (0, \frac{1}{2}, 1, 3, \frac{1}{2}, 0)$ という意味。 [β が式 (63) のオーダーパラメーターのベキ]

¹⁵とくに境界理論が $(2+1)$ 次元でも相転移が起きますが、Coleman - Mermin - Wagner の定理に抵触するわけではありません [22, 23]。

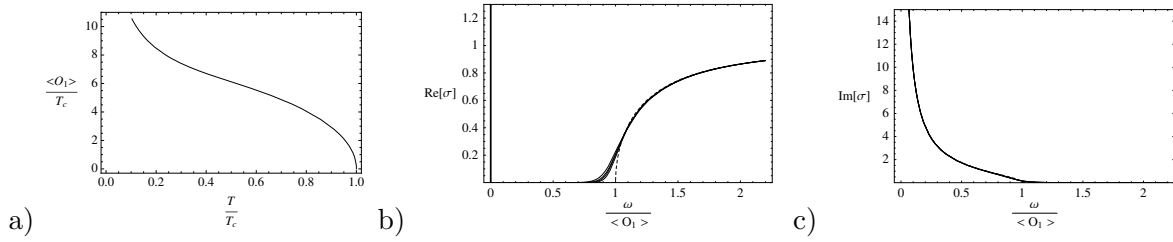


図 2: (a), (b), (c) はそれぞれホログラフィック超伝導に対する $\langle O \rangle$, $\text{Re}[\sigma(\omega)]$, $\text{Im}[\sigma(\omega)]$ をあらわす ($d = 3$ で、スカラー場 Ψ の質量 $m^2 = -2/L^2$ の場合)。文献 [18] より。

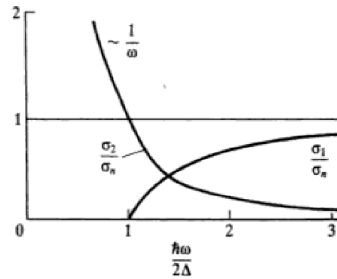


図 3: 超伝導体での典型的な複素伝導率。 σ_1 が実部、 σ_2 が虚部をあらわす。文献 [20] より。

ルド・ブラックホールは負の比熱をもちます。これは何もこのブラックホールに限らず、一般に重力系の特徴です。重力系では、平衡から少しゆらぎがあると、そのゆらぎは緩和するどころかますます成長し、さらに平衡から外れていきます。もちろん、これこそ私たちの宇宙が熱平衡にはない理由の一つです。したがって、通常のブラックホールに単純に統計力学を当てはめることはできません。ちなみに、これが AdS/CFT では AdS ブラックホールを考える一つの理由です。ゲージ理論と対応がつくことからわかるように、AdS ブラックホールには熱平衡が存在します。

ともあれ、一般に重力の存在下では通常の統計力学が成立しないので、ブラックホールに通常の臨界現象の理論が成立するかは必ずしも自明ではありません。(もちろん、AdS/CFT 双対性は重力理論と場の理論が等価であることを主張するので、通常の臨界現象の理論が成立するはずですが。)

第二に、この場合は臨界指数の値としてギンツブルグ-ランダウ理論の値が出てきましたが、いつでもそうなるわけではありません。違う種類のブラックホールを考えると、平均場の臨界指数であっても通常議論されないような値の指数が出てきます。これは、式 (64) とは違って極めて変わった平均場の自由エネルギーをもつ系と考えられます。この意味で、ブラックホールの二次相転移は平均場理論の枠内でさえ、通常の臨界現象より豊かな内容を持つようであり、興味深く思われます。

4.3 ホログラフィック超伝導の伝導率

今度はマクスウェル場 $A_x \propto e^{-i\omega t}$ を解きます。2.2.3 節の方法で、このモデルでの伝導率 $\sigma(\omega)$ が計算でき、通常の超伝導体と同様の二つの振るまいがみられます (図 2, 3) :

1. 直流伝導率 $\text{Re}[\sigma(\omega \rightarrow 0)]$ の発散 (図 2b)。この振るまいは $\text{Im}[\sigma(\omega)]$ から確認できます (図 2c)。

σ の実部と虚部の間には、クラマース-クローニツヒの関係式が成り立つからです：

$$\text{Im}[\sigma(\omega)] = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[\sigma(\omega')] d\omega'}{\omega' - \omega} \quad (67)$$

(\mathcal{P} は主値をあらわす) この式より、 $\text{Re}[\sigma]$ のデルタ関数的振るまいは $\text{Im}[\sigma]$ の $1/\omega$ の極として反映されます。

2. 交流伝導率 $\text{Re}[\sigma(\omega)]$ は周波数 $\omega < \omega_g$ でほぼゼロになり、電磁波吸収が起りません (図 2b)。ただし、 $\omega_g/T_c \sim 3.5$ が BCS 理論の予言ですが、このモデルでは $\omega_g/T_c \sim 8$ が得られています。また、エネルギー・ギャップ Δ を見積ると、プローブ近似では BCS 同様 $\omega = 2\Delta$ ですが、一般には $\omega > 2\Delta$ になるようです。現時点では、これらの結果が強結合による効果なのかどうか、はっきりしていません。

4.4 コメント

1. このモデルが何をあらわしているのかを理解するために、このモデルが何をあらわしていないのか確認しておきましょう。

まず、 $U(1)$ カレント J^μ を考えているため、ここで議論している超伝導はカラー超伝導ではありません。そもそも large- N ゲージ理論ではカラー超伝導は起りません [24]。

第二に、このモデルは超伝導と言うにはやや語弊があります。境界のゲージ場 $A_\mu^{(0)}$ はあくまで外場なので、境界理論にダイナミカルなゲージ場は存在しません。したがって、ゲージ場が massive になるヒッグス・メカニズムも起りません¹⁶。

この事情からこのモデルは超伝導というより、むしろ超流動と考えるのが自然です (ここでダイナミカルなゲージ場が存在するかどうかで二つを区別しています。どちらもギンツブルグ-ランダウ理論 (66) であらわされますが、超伝導の場合は $-F_{\mu\nu}^2/4$ を加えることになります。)

2. 超伝導体は磁場への反応の違いによって、第 I 種と第 II 種に分けられます¹⁷。通常の超伝導では、ヒッグス・メカニズムにより超伝導体内部への磁気侵入が妨げられます (マイスナー効果)。しかし、第 II 種超伝導では、全体として超伝導状態を保ちつつ磁気侵入が起ります。ホログラフィック超伝導の場合、ダイナミカルなゲージ場が存在しないため、磁気侵入は妨げられません。したがって、ホログラフィック超伝導は磁気侵入長の長い「極端な第 II 種超伝導体」¹⁸に相当します。磁気侵入は渦糸の生成という形で起りますが、このモデルで渦糸や渦糸格子も構成されています [25]。渦糸格子の場合、ギンツブルグ-ランダウ理論同様、三角格子がもっとも安定な配位です。
3. プローブ近似、シュワルツシルド-AdS 時空でも相転移がみられるということは、ホログラフィック超伝導では物質場の不安定性こそがカギであることを示唆します。重力場は、背景場を提供するといった比較的マイナーな役割しか果たさないように思えます。この意味で、重力の現象

¹⁶この結果、 $U(1)$ の破れに伴う南部-ゴールドストーン・モードが存在します。南部-ゴールドストーン・モードが存在するにも関わらず、エネルギーギャップが存在するのは不思議な点で、large- N 効果によるものではないかと推測されています。

¹⁷相関長 ξ と磁気侵入長 λ に対して、 $\lambda < \xi$ が第 I 種超伝導体、 $\lambda > \xi$ が第 II 種超伝導体。

¹⁸超流動もしばしばそう呼ばれます。

としてどれだけ興味深いのか疑問が残ります。式 (62) のような議論が成り立つ幅広いモデルで同様の現象がみられるでしょう。

もつとも、この事情を逆手に取れば、ホログラフィック超伝導はロバストな現象だと言うこともできるでしょう。さまざまな重力理論で同様の現象がみられる可能性が示唆されるからです。超伝導は低温での典型的な振るまいなので、これは自然かもしれません。

4. ホログラフィック超伝導の問題の一つは、オーダーパラメーター $\langle O \rangle$ の微視的描像に欠けている点です。つまり、BCS 理論と違い、 O がどのようなコンポジット・オペレーターなのかわかりません。対応する場の理論側の知識なしに、この点を解決するのは難しいように思われます。このような事情から、ホログラフィック超伝導は「AdS/BCS」というより、むしろ「AdS/ギンツブルグ-ランダウ」とでも呼ぶべきものです。しかし、超伝導を記述する上でギンツブルグ-ランダウ理論は徹底的に調べられ十分成功を取っており、いまさら AdS/CFT で新しいことがわかるか不明です。さらに、ギンツブルグ-ランダウ理論の計算は比較的容易なものの、対応する AdS/CFT での計算は通常かなり困難です。重力理論を使えばいつも物事が簡単になるわけではありません。

もつとも、微視的描像がよくわからないという点は、なにもホログラフィック超伝導に限ったものではありません。たとえば、3.3 節の η/s にも共通することで、普遍性は示せても、どういったメカニズムで普遍性が成り立っているのか場の理論的な描像に欠けています。

結局は、AdS/CFT を使ってどのような量を計算してみせるかという点にかかっているのだと思います。その意味で、現在のところホログラフィック超伝導には η/s のような “killer application” に欠けているように思います。

5 練習問題

問 1. 一般のスカラー場：ソースとオペレーターのコンフォーマル次元 (難易度*)

$(d+1)$ 次元の漸近的に AdS であるような時空 (27) で、質量があるスカラー場を考えよ: $(\nabla^2 - m^2)\phi = 0$ 。このとき式 (35) は変更を受ける。漸近的な振るまいを

$$\phi \sim \phi_{(0)} \left\{ \left(\frac{u}{L} \right)^{\Delta_-} + \phi_{(1)} \left(\frac{u}{L} \right)^{\Delta_+} \right\}, \quad (u \rightarrow 0) \quad (68)$$

とすると、

$$\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + (Lm)^2} \quad (69)$$

となることを示せ。すなわち、ソースとオペレーターのコンフォーマル次元は、それぞれ Δ_- , Δ_+ である [$d=4, m=0$ で $(\Delta_-, \Delta_+) = (0, 4)$ であり、式 (35) の例に帰着する]。

なお、上式は AdS 時空の場合、 $m^2 < 0$ であっても $m^2 \geq -d^2/(4L^2)$ であれば理論が安定であることを示す (“Breitenlohner-Freedman bound”)。

問2. 一般のスカラー場：オペレーターの期待値（難易度*）

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \{(\nabla_a \phi)^2 + m^2 \phi^2\} \quad (70)$$

から出発して、一般のスカラー場では式 (38) が

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{2\Delta_+ - d}{L} \phi_{(1)} \phi_{(0)} \quad (71)$$

となることを示せ。この際、massless の場合と違い、境界作用には $1/u$ のように $u \rightarrow 0$ で発散する項が生じる。この発散部分を処理する方法はよく知られており、「ホログラフィック繰り込み」と呼ばれる。いまの場合は発散を消すために

$$S_{\text{CT}} = \frac{\Delta_+ - d}{2L} \int d^d x \sqrt{-\gamma} \phi^2 \Big|_{u \rightarrow 0} \quad (72)$$

という境界項を加えればよい ($m = 0$ のときに $S_{\text{CT}} = 0$ であることに注)。ここで $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu}|_{u \rightarrow 0}$ であり、 $g_{\mu\nu}^{(0)}$ とは $\gamma_{\mu\nu} = (L/u)^2 g_{\mu\nu}^{(0)}$ の関係にある。

なお、遅く落ちる項 Δ_- は

$$\frac{d}{2} > \Delta_- > \frac{d-2}{2}, \quad \text{あるいは} \quad -\frac{d^2}{4} < L^2 m^2 < -\frac{d^2}{4} + 1 \quad (73)$$

のときに規格化可能であり（適当なホログラフィック繰り込みのもとで）、そのときはオペレーターとして解釈できる。これはちょうど、ユニタリーな CFT では $\Delta > (d-2)/2$ であるスカラーオペレーターが許されるという制限と一致する（一方、 $\Delta_+ > d/2$ ）。

問3. マクスウェル場（難易度*）

漸近的に AdS である時空 (27) で、マクスウェル場

$$S = -\frac{1}{4} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} F_{ab}^2 \quad (74)$$

を考える。

$$A_0 \sim A_0^{(0)} \left\{ 1 + A_0^{(1)} \left(\frac{u}{L} \right)^{d-2} \right\}, \quad (u \rightarrow 0) \quad (75)$$

$$\langle J^0 \rangle = -\frac{d-2}{L} A_0^{(1)} A_0^{(0)} \quad (76)$$

を確かめよ（ホログラフィック繰りこみは不要である）。 A_0 はコンフォーマル次元 1 なので、 $\langle J^0 \rangle$ のコンフォーマル次元は $d-1$ となる。実際、式 (71) で $\Delta_+ = d-1$ としたものが、式 (76) の係数にあたる。

問4. 重力場（難易度**）

式 (53) を導出する。実際にバルク作用

$$S_{\text{AdS}} = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (77)$$

$$2\Lambda = -\frac{d(d-1)}{L^2}, \quad (78)$$

をシュワルツシルド-AdS 時空 (47) 上で摂動展開して、 h_{xy} の作用を求めよ。重力の場合、バルク作用以外にギボンズ-ホーキング項 S_{GH} , 相殺項 S_{CT} からの寄与を考慮に入れる必要がある。 $d \leq 4$ の場合、これは

$$S_{\text{GH}} = \frac{2}{16\pi G_{d+1}} \int d^d x \sqrt{-\gamma} K, \quad (79)$$

$$S_{\text{CT}} = -\frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^d x \sqrt{-\gamma} \left\{ \frac{2(d-1)}{L} + \frac{L}{d-2} \mathcal{R} + \dots \right\}. \quad (80)$$

ここで、

- K : 境界での外部曲率 (extrinsic curvature) のトレース。 $N^2 := g_{uu}$ で定義したラプス関数 N を用いると $K = -\partial_u \sqrt{-\gamma} / (N \sqrt{-\gamma})$ 。
- \mathcal{R} : $\gamma_{\mu\nu}$ から作ったりッチ・スカラー。 η を評価するには $O(\omega)$ で十分なので、二階微分を含む \mathcal{R} は実際には不要である。

このようにして求めた h_{xy} の on-shell 作用から、 $\langle T^{xy} \rangle$ を求めよ。スカラー場との違いは何か。2.1.3 節に戻って、その違いは流体力学的にどう解釈されるか考えよ。最終的に式 (53) を導出せよ。

重力場の場合、オペレーター $\langle T^{xy} \rangle$ は単に早く落ちる項だけから来るわけではない。このため、式 (53) で早く落ちる項は $\langle T^{xy} \rangle$ ではなく $\langle \tau^{xy} \rangle$ 部分だけに対応する。

問5. 因果的流体力学 (難易度***)

文献 [13] によれば、 $O(\omega^2, q^2)$ で式 (21) は式 (58) のように変更を受ける。

1. まず、問4に従い、境界での作用を $O(\omega^2, q^2)$ で求めよ。今度は式 (80) の \mathcal{R} の項も加味しなければいけない。
2. 補遺 B に従い、 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論の場合で h_{xy} の解を $O(\omega^2, q^2)$ で求めよ¹⁹。
3. 1 と 2 の結果を使い τ_π, κ を評価せよ。(読者が2007年にこれをできていれば、論文が書けたであろう [13, 14, 15]。)

謝辞

本稿の内容に有益なコメントを下された板倉数記氏、太田昌宏氏、岡村隆氏、中村真氏、初田哲男氏に感謝します。また、レクチャー・ノートのもととなった Summer Institute 2009, 東北大学天文学教室での集中講義の参加者の皆様に感謝します。

¹⁹解の形を

$$\phi = (1 - u^4)^{-i\omega/(4\pi)} \{ F_{00} + (\mathfrak{w} F_{10} + \mathfrak{q} F_{01}) + (\mathfrak{w}^2 F_{20} + \mathfrak{w}\mathfrak{q} F_{11} + \mathfrak{q}^2 F_{02}) + \dots \} \quad (81)$$

とおき摂動的に F_{00} 等を解くと、積分定数が二つずつ出てくるが、 $F_{00}(u=1) = \text{有限}$ という条件等を置くことにより、実質 incoming-wave だけが選ばれる。

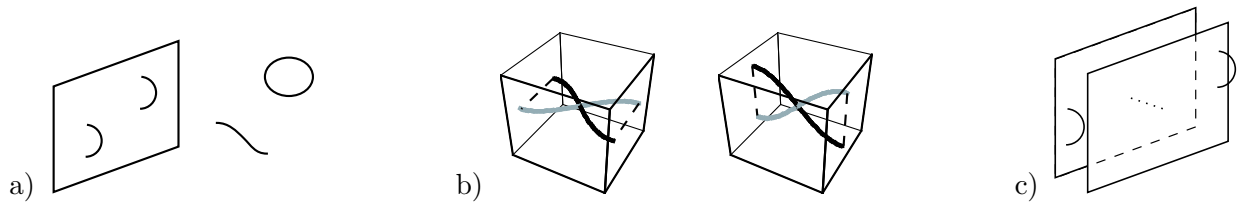


図 4: (a) 超弦理論のおもな登場人物。開弦と閉弦。開弦は、D ブレーンと呼ばれる物体上に端点をもつこともできる。(b) 開弦のもっとも単純な振動。(c) D ブレーンが N_c 枚あると、 $SU(N_c)$ ゲージ理論になる。図示する都合上、ブレーンを離して描いているが、実際には重なったものを考える。

A D3 ブレーンと AdS/CFT

A.1 D3 ブレーンとゲージ理論

はじめに注意しておきます。D ブレーンから AdS/CFT へと至る以下の議論は厳密に正当化されたものではありません。むしろ AdS/CFT 自体から出発して、(両者の結果を比べることにより) AdS/CFT を正当化すべきものです。したがって、以下ではなるべく直感的に議論を進めていきます。しかし、以下の議論にはいくつかの利点があります：(1) どの重力理論がどのゲージ理論と対応するかがわかる (2) それぞれの理論のパラメーター間関係を導ける (3) 超対称性の議論をあまり使わずに $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論を説明できる。

図 4a は超弦理論のおもな登場人物を描いたものです。超弦理論での基本的な物体は、伸び縮みする小さいストリングです。ストリングには、端点をもった開弦と、端点をもたない閉弦の二種類があります。開弦はゲージ理論をあらわし、一方閉弦は重力をあらわします。開弦がゲージ理論をあらわすことをみるもっとも簡単な方法は、このストリングがどう振動するかを見ることです。図 4b は開弦の一番単純な振動を描いたものです (4次元時空の場合)。ストリングは振動していますが、振動する方向には二つあります。これは光子の二つの偏光状態をあらわします。この意味で、開弦はゲージ理論をあらわします。

超弦理論にはDブレーンと呼ばれる物体も存在します。開弦はこのDブレーン上に端点をもつこともできます。以下で考える開弦はいつもこのタイプです。端点が固定されていてもこれは開弦なので、やはりゲージ理論をあらわします。ただ、開弦はDブレーン上に端点をもっているため、このゲージ理論はDブレーン上に局在しています。

Dブレーンは、何枚か重なりあうこともできます。すると、開弦はDブレーン上に端点をもちますが、端点を別々のDブレーン上に置くことができます (図 4c で、実線のもの二種類と点線のもの)。このあらたな自由度は、この場合のゲージ理論が $U(1)$ ゲージ理論ではなく、 $SU(N_c)$ ゲージ理論をあらわすことを意味します (N_c はブレーンの枚数)。

さまざまな次元のDブレーンが存在します。 p -次元の空間的広がりをもったDブレーンのことを Dp ブレーンと呼びます。したがって、 Dp ブレーンは $(p+1)$ -次元のゲージ理論をあらわします。我々は4次元時空でのゲージ理論に興味があるので、QCD に似た理論を考えるにはD3ブレーンを考えれば良いということになります。

これまでの議論で一つ注意すべき点があります。超弦理論は実際には無矛盾性のためには10次元時空を要求します。開弦はDブレーン上に拘束されており、したがってD3ブレーンは4次元ゲージ

理論をあらわしますが、これらの開弦は依然として 10 次元時空中で振動するはずでず。すなわち、一番単純な開弦の振動は上で議論した自由度 2 ではなく、自由度 8 をもつこととなります。これらの自由度は何でしょう？ 別の言葉で言えば、D3 ブレーンがあらわすゲージ理論はどのようなゲージ理論なのでしょう？

この点を理解するために、ストリングの振動には二種類あることに注意してください。一つはブレーン内での振動で、もう一つはブレーンに垂直方向の振動です。4 次元の立場では（すなわち $SO(1,3)$ の表現では）、前者はゲージ場をあらわし、後者はスカラー場をあらわします。ブレーンに垂直な空間次元は 6 次元なので、6 個のスカラー場があることとなります。つまり、D3 ブレーンによってあらわされるゲージ理論は、必然的にスカラー場を伴うことがわかります。このようなゲージ理論は $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論として知られています（ $\mathcal{N} = 4$ は理論が 4 つの supercharge をもつことを示す）。

$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論に含まれる場は、ゲージ場 A_μ 、スカラー場 ϕ_i 、そして超弦理論がもつ超対称性に由来する 4 つのフェルミオン λ_I です（簡単化のため、 $SU(N_c)$ およびスピノルのインデックスは省きます。）ローレンツ変換の下での変換性は違いますが、これらの場は同じようなストリングの振動から来ています。その結果、これらの場はすべてゲージ群の随伴表現として変換します。つまり、この理論にはクォークのような基本表現は含まれません。

今考えているように D3 ブレーンしかない場合は、ブレーンに垂直な方向は等方的です。これらの方向はスカラー場に対応するので、等方性は ϕ_i が $SO(6)$ 大域的対称性をもつことを意味します。この大域対称性は R-対称性と呼ばれます。

$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論の作用は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} (D_\mu \phi_i)^2 - \frac{i}{2} \bar{\lambda}_I \gamma^\mu D_\mu \lambda^I + O(\phi^4) + O(\lambda\lambda\phi) \right\} \quad (82)$$

で与えられます。最初の 3 項は、ゲージ場、スカラー場、フェルミオンに対する通常の運動項です。くわえて、作用には ϕ^4 および湯川相互作用もありますが、ここでは形式的にのみ書いてあります。ゲージ場とスカラー場は質量次元 1、フェルミオンは質量次元 3/2 なので、作用のすべての項が質量次元 4 をもっています。つまり、理論には次元をもったパラメーターは出現せず、スケール不変になっています。じつは、しばしば相対論的な場の理論では、ローレンツ不変性 $SO(1,3)$ とスケール不変性が合わさって、より大きな対称性、コンフォーマル不変性 $SO(2,4)$ へと拡張されます。したがって、 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論は $SO(2,4) \times SO(6)_R$ 大域的対称性をもっています。

A.2 D3 ブレーンと重力

このようにして D ブレーンからゲージ理論が出ることをみましたが、D ブレーンが単にゲージ理論であらわされるか、この段階ではまだ明らかではありません。というのも、超弦理論は単なるゲージ理論ではないからです。超弦理論は統一理論なので、とくに重力を含むはずでず。また、ゲージ理論に対応するのは、図 4b でみたように開弦の最も低い振動ですが、より高い励起状態もあるはずでず。これらは massive 粒子に相当します。これまでの議論では、これらの効果が無視できるかどうかはつきりしません。

まず重力を考えましょう。ニュートン・ポテンシャルは

$$\phi_{\text{Newton}} \sim \frac{GM}{r}, \quad (83)$$

であらわされるので、重力の強さを GM で測ることができます。ニュートン定数 G と D ブレーンの質量 M は、超弦理論ではそれぞれ

$$G \sim g_s^2 l_s^2, \quad (84)$$

$$M \sim N/(g_s l_s), \quad (85)$$

になることが知られています (g_s : ストリング同士の相互作用の強さをあらわす結合定数, l_s : ストリング長さ)。したがって、 $GM \sim g_s N c l_s$ となります。一方、ゲージ理論の有効結合定数は 't Hooft 結合定数 $\lambda := g_{\text{YM}}^2 N_c$ です。超弦理論では $g_s \sim g_{\text{YM}}^2$ なので、 $\lambda \sim g_s N_c$ です。ゲージ理論に対して摂動論が使えるように、 $g_s N_c \ll 1$ ととることにします。まとめると、

$$\text{重力理論の有効結合定数: } GM \sim g_s N_c l_s, \quad (86)$$

$$\text{ゲージ理論の有効結合定数: } \lambda \sim g_s N_c. \quad (87)$$

したがって、ゲージ理論として非自明なダイナミクスを残しつつ、重力の効果が無視できるためには $l_s \rightarrow 0$ という極限を取れば良いことがわかります (“decoupling limit”)。

一方、弦の massive 状態は $M \sim 1/l_s$ 程度の質量をもちます。したがって、やはり $l_s \rightarrow 0$ という極限で理論から decouple することがわかります。

以上より、10次元時空中の D3 ブレーンから得られたのは、

弱結合の $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論と

それと decouple した平坦な 10次元時空中の重力理論 (超重重力理論)

です。

ところが $g_s N_c \gg 1$ のときは、上の結果は成立しません。D ブレーンは時空を大きく曲げてしまうからです。ニュートン・ポテンシャルに戻ればわかるように、 $GM \rightarrow 0$ 極限を取ることで、重力の効果が消えるようにしましたが、これは原点 $r \rightarrow 0$ 近傍では成立しません。その結果、原点近傍 ($r < g_s N_c l_s$) では曲がった時空があらわれます。もっとも、 $g_s N_c \ll 1$ 極限では、その領域は無視できる程度で、単に平坦な時空に D ブレーンをあらわすソースがあると考えて構いません。これが上で考えた場合です (いずれにせよ、この場合時空の曲率が大きすぎて、この領域は単純に超重重力理論ではあらわせません)。しかし、 $g_s N_c \gg 1$ 極限ではマクロな大きさの曲がった時空があらわれてしまいます。

D3 ブレーンが時空を曲げる様子、つまり超重重力理論の解はよく知られています：

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{L}{r} \right)^4 \right]^{-1/2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \left[1 + \left(\frac{L}{r} \right)^4 \right]^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2). \quad L^4 \sim g_s N_c l_s^4 \quad (88)$$

(上では $g_s N_c l_s$ というスケールが出ましたが、これは簡単のために空間3次元で考えたためです。実際には D3 ブレーンに垂直な空間次元は6次元です。また、ニュートン定数も実際には4次元の G_4 ではなく、10次元の G_{10} を使う必要があります。これらの点を考慮に入れると、この L のスケールになります。) いま、D ブレーンが原点近くでどう時空を曲げるのかに興味があるので、 $r \rightarrow 0$ 極限をとると (“near-horizon limit”)、

$$ds^2 = \left(\frac{r}{L} \right)^2 (-dt^2 + d\vec{x}^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2} + L^2 d\Omega_5^2. \quad (89)$$

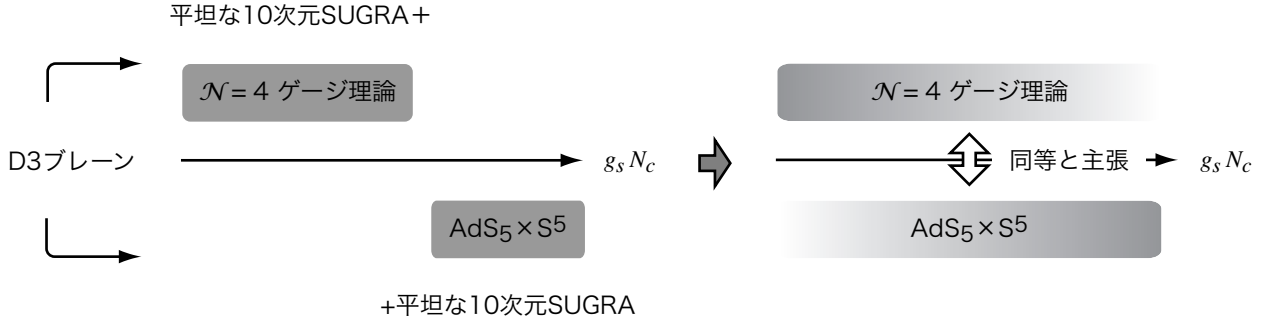


図 5: (左) D3 ブレーンから $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論と AdS_5 が得られた。(右) どちらの理論も $g_s N_c$ の全領域で存在し、AdS/CFT はこの両者が同等だと主張する。

最後の $L^2 d\Omega_5^2$ の部分は、半径 L の S^5 をあらわします。残りは 5 次元反ド・ジッター時空 (AdS_5) をあらわします。 AdS_5 は負の宇宙項をもつアインシュタイン方程式の解です。 L は AdS_5 時空の特徴的な長さのスケールもあらわしています。そこで、時空を大雑把に $r \rightarrow 0$ 近くの $\text{AdS}_5 \times S^5$ とその周りの平坦な時空にわけることにしましょう。

A.3 ゲージ理論と重力

これまでの議論をまとめると (図 5)、D3 ブレーンから $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論と $\text{AdS}_5 \times S^5$ の 2 つの系が得られました。また、平坦な 10 次元時空上の超重力理論部分が共通してあらわれました。この部分は共通しているので、残りの部分、 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論と $\text{AdS}_5 \times S^5$ がある意味対応していることになります。

ところで、どちらの理論も $g_s N_c$ の全領域で存在します。ただし、もとの領域以外は解析が容易でない部分です (その事情を色が薄くなることであらわしました)。AdS/CFT はこの両者の理論が同等であると主張します。だとすると、一方の理論での非摂動領域でも、もう一方の理論の摂動論を使って計算することができます。

これは論理的な帰結というわけではありません。これまでの議論を認めたとしても、それは図 5 (左) の対応であって、図 5 (右) の対応ではないからです。したがって、この主張を確かめるには、同じ $g_s N_c$ で両方の結果を比べることが必要です。超対称性が存在する状況下では、多くの状況証拠がえられています。

いくつかコメントをしておきます：

1. S^5 は $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論の立場では R-対称性に相当し理論の重要な一部ですが、しばしば S^5 をコンパクト化して、実質 5 次元の重力理論を考えます。本文で考える 5 次元の重力理論は、このような意味です。 S^5 の半径は L なので、コンパクト化によって

$$\frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g_{10}} R_{10} \sim \frac{L^5}{16\pi G_{10}} \int d^5x \sqrt{-g_5} (R_5 + \dots) . \quad (90)$$

したがって、5 次元のニュートン定数は $G_5 \sim G_{10}/L^5$ となります。

2. これまでに登場した式をまとめると

$$L^4 \sim g_s N_c l_s^4, \quad (91)$$

$$G_{10} \sim G_5 L^5 \sim g_s^2 l_s^8, \quad (92)$$

$$g_s \sim g_{\text{YM}}^2. \quad (93)$$

係数まで注意してまとめたものが本文中の式 (40) です。

3. 式 (88) は D3 ブレーンのゼロ温度の解 (極限ブラックホール) であり、ゼロ温度の $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論に相当します。有限温度を考えるには、D3 ブレーンの有限温度解を使い、上と同様の near-horizon 極限を考えます。その場合は、メトリック (89) はシュワルツシルド-AdS₅ ブラックホール (47) に置きかわります。

4. AdS₅ 時空は、

$$ds_6^2 = -dX_0^2 - dX_5^2 + dX_1^2 + \dots + dX_4^2 \quad (94)$$

という 6 次元の平坦な時空中の超曲面としてあらわされます：

$$X_0^2 + X_5^2 - X_1^2 - \dots - X_4^2 = L^2. \quad (95)$$

この形 (95) では AdS₅ が $\mathcal{N} = 4$ コンフォーマル対称性と同じ $SO(2, 4)$ 対称性をもつのは明らかです。くわえて、メトリック (89) は S^5 を含むので、 $\mathcal{N} = 4$ R-対称性と同じ $SO(6)$ 対称性をもちます。したがって、重力側も $SO(2, 4) \times SO(6)$ 大域的対称性をもっています。

B 解 (55) の求め方

いま $h_{xy} \propto e^{-i\omega t + iqz}$ という形の摂動を考えるものとします。 $\phi := u^2 h_{xy}$ とすると、 ϕ は massless スカラーの運動方程式を満たします：

$$\phi'' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{3}{u} \right) \phi' + \frac{(4\pi)^2 (\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 f)}{f^2} \phi = 0. \quad (96)$$

ここで

$$\mathfrak{w} = \frac{\omega}{T}, \quad \mathfrak{q} = \frac{q}{T}. \quad (97)$$

ホライズン近傍では運動方程式 (96) は簡単に解け、

$$\phi \sim (1 - u^4)^{\pm i\mathfrak{w}/(4\pi)}, \quad (u \rightarrow 1) \quad (98)$$

これは見慣れない形をしているかもしれませんが、“tortoise 座標”を使うことで自然に解釈ができます。tortoise 座標とは、一般にメトリックが

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} = f(r)(-dt^2 + dr_*^2) \quad (99)$$

となるような座標 r_* です (メトリックがコンフォーマルに平坦になるような座標)。この座標系では、ラプラシアンを通常の平坦な時空のものに帰着させることができるので ($\Delta \propto -\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2$)、ホライズン近傍の物理的解釈に適しています。いまの場合 tortoise 座標は

$$(4\pi T) r_* \sim \ln(1 - u^4), \quad (u \rightarrow 1) \quad (100)$$

となります。ホライズン $u = 1$ は $r_* \rightarrow -\infty$ に相当します。これは重力の赤方偏移による効果です。よくものの本に書いてあるように、ブラックホールから遠方にいる観測者にとっては、ホライズン近傍では時間が止まるように見え、モノがホライズンに到達するのに無限の時間（遠方の観測者にとっての時間）がかかります。tortoise 座標は、この効果をホライズンが無限遠方にあるからだと解釈します。 $ds^2 \propto -dt^2 + dr_*^2$ なので、 r_* で無限距離とならないと、無限の時間にはならないからです。

この座標を使い、時間依存性とあわせると、ホライズン近傍での解は

$$\phi \sim e^{-i\omega t}(1 - u^4)^{\pm i\omega/(4\pi)} \sim e^{-i\omega(t \mp r_*)}. \quad (101)$$

すなわち解は通常の平面波に他ならず、二種類の解はホライズンに “incoming” か “outgoing” かという意味を持っています。本文で触れたように境界条件として “incoming-wave” を課すので、 $\phi \sim (1 - u^4)^{-i\omega/(4\pi)}$ を選びます。

この境界条件を下に u の全域で運動方程式を解くと、このオーダーでは結局ホライズン近傍の解がそのまま解になります：

$$\phi = h_{xy}^{(0)}(1 - u^4)^{-i\omega/(4\pi)} + O(\omega^2, q^2), \quad (0 \leq u \leq 1). \quad (102)$$

$$\sim h_{xy}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{4\pi} i\omega u^4 + \dots \right), \quad (u \rightarrow 0). \quad (103)$$

この $1/(4\pi)$ がそのまま η/s の値となって出てきます。

参考文献

- [1] 夏梅 誠, “ブラックホールとゲージ理論プラズマ,” 『ハドロン物理と超弦理論の再会』, 原子核研究 52 巻 Suppl. 1 (2007).
<http://genshikaku.jp/backnumber52sp1.html>
- [2] D. T. Son and A. O. Starinets, “Minkowski-space correlators in AdS/CFT correspondence: Recipe and applications,” JHEP **0209** (2002) 042 [arXiv:hep-th/0205051].
- [3] C. P. Herzog and D. T. Son, “Schwinger-Keldysh propagators from AdS/CFT correspondence,” JHEP **0303** (2003) 046 [arXiv:hep-th/0212072].
- [4] K. Skenderis and B. C. van Rees, “Real-time gauge/gravity duality,” Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 081601 [arXiv:0805.0150 [hep-th]].
- [5] K. Maeda, M. Natsuume and T. Okamura, “On two pieces of folklore in the AdS/CFT duality,” arXiv:1005.2431 [hep-th].
- [6] J. Polchinski, “Scale and conformal invariance in quantum field theory,” Nucl. Phys. B **303** (1988) 226.
- [7] I. R. Klebanov and E. Witten, “AdS/CFT correspondence and symmetry breaking,” Nucl. Phys. B **556** (1999) 89 [arXiv:hep-th/9905104].

- [8] これらの仕事についての原論文については、
M. Natsuume, “String theory and quark-gluon plasma,” arXiv:hep-ph/0701201 の文献リストを参照.
- [9] P. Benincasa, A. Buchel and R. Naryshkin, “The shear viscosity of gauge theory plasma with chemical potentials,” *Phys. Lett. B* **645** (2007) 309 [arXiv:hep-th/0610145].
- [10] D. Teaney, “Effect of shear viscosity on spectra, elliptic flow, and Hanbury Brown-Twiss radii,” *Phys. Rev. C* **68** (2003) 034913 [arXiv:nucl-th/0301099].
- [11] H. B. Meyer, “A calculation of the shear viscosity in SU(3) gluodynamics,” *Phys. Rev. D* **76** (2007) 101701 [arXiv:0704.1801 [hep-lat]].
- [12] A. Nakamura and S. Sakai, “Transport coefficients of gluon plasma,” *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 072305 [arXiv:hep-lat/0406009].
- [13] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, “Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography,” *JHEP* **0804** (2008) 100 [arXiv:0712.2451 [hep-th]].
- [14] M. Natsuume and T. Okamura, “Causal hydrodynamics of gauge theory plasmas from AdS/CFT duality,” *Phys. Rev. D* **77** (2008) 066014 [Erratum-ibid. *D* **78** (2008) 089902] [arXiv:0712.2916 [hep-th]].
- [15] M. Natsuume and T. Okamura, “A note on causal hydrodynamics for M-theory branes,” *Prog. Theor. Phys.* **120** (2008) 1217 [arXiv:0801.1797 [hep-th]].
- [16] M. Natsuume, “String theory implications on causal hydrodynamics,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **174** (2008) 286 [arXiv:0807.1394 [nucl-th]].
- [17] S. S. Gubser, “Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 065034 [arXiv:0801.2977 [hep-th]].
- [18] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, “Building a Holographic Superconductor,” *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 031601 [arXiv:0803.3295 [hep-th]].
- [19] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, “Holographic Superconductors,” *JHEP* **0812** (2008) 015 [arXiv:0810.1563 [hep-th]].
- [20] ティンカム, 超伝導入門 (吉岡書店, 2004) .
- [21] K. Maeda, M. Natsuume and T. Okamura, “Universality class of holographic superconductors,” *Phys. Rev. D* **79** (2009) 126004 [arXiv:0904.1914 [hep-th]].
- [22] S. R. Coleman, “There are no Goldstone bosons in two-dimensions,” *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 259.

- [23] N. D. Mermin and H. Wagner, “Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-dimensional or two-dimensional isotropic Heisenberg models,” *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 1133.
- [24] D. V. Deryagin, D. Y. Grigoriev and V. A. Rubakov, “Standing wave ground state in high density, zero temperature QCD at large N_c ,” *Int. J. Mod. Phys. A* **7** (1992) 659.
- [25] K. Maeda, M. Natsuume and T. Okamura, “Vortex lattice for a holographic superconductor,” arXiv:0910.4475 [hep-th].