探究型授業実践例（最大容積の箱を作ろう）

さいたま市立浦和南高等学校　太田　敏之

１．はじめに

浦和南高校では，スクールポリシーとして，「探究的な学びを積極的に組み込み，新たな価値を創造する生徒を育成する」を掲げている．そこで，探究型授業を実践したので報告をしたいと思う．

２．授業実践

＜課題＞
３０ｃｍ×３０ｃｍの厚紙を使って，容積が最大になるようなふた付きの箱を作りましょう

（条件）
①直方体であること
②１つの展開図であること
（展開図は切り貼りしない）
③展開図を組み立てるとき，辺の部分だけでなく，面の部分でつないでもよいとする

(1) 授業展開

１．５時間分（本校は５５分授業なので５５分＋３０分＝８５分）で授業を行った．

（手順）
①生徒を５～７人の班に分け，準備をする（５分）
②生徒一人ずつにプリントを配り，最初に一人一人で考えて課題に取り組む（１０分）
②意見を出し合って、どんな展開図にするか相談して決める（１０分）
③みんなで計算して最大値を求める（５分）
④分担して発表の準備をする（１０分）
・実際に作ってみる
（配布した厚紙をはさみで切ってセロテープで貼り，箱を完成させる）
・クラッシーノートに発表用資料をまとめる
・発表者を決めて発表の準備をする．
⑤各班で発表する（１５分＋１５分）
⑥発表内容をふまえて，教師が解説する（１０分）
⑦プリントの感想欄に感想を書いて提出（５分）

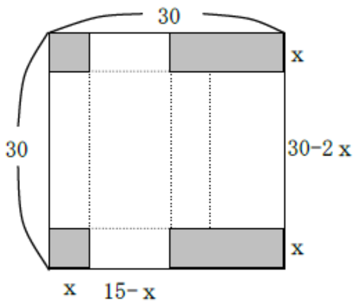
(2) 課題のねらい

一般的な普通の展開図を考える生徒が多いと考えられるので，まずはその展開図から作られた箱の容積の最大値を求めるのに微分を使うことで，微分の有用性と最大値を求めることの習熟が１つ目のねらいとなる．一般的な普通の展開図で計算すると容積の最大が１０００ｃｍ^{3}となるが，厚紙の使い方の工夫によってはさらに大きな容積の箱を作ることができるので，どう工夫したらより大きな容積の箱を作ることができるのかを探究することが２つ目のねらいとなる．

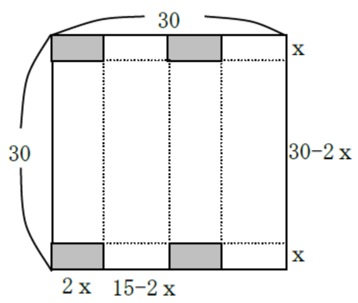
(3) 課題の原理

（予想される展開図と最大容積）
Ａ）普通の展開図
最大容積　１０００ｃｍ^3（５×１０×２０）
Ｂ）段ボール型展開図
最大容積　７５０√３（約１２９９）ｃｍ^3
（（１５－５√３）×５√３×（１５＋５√３））
Ｃ）お菓子の箱型
最大容積　１０００√２（約１４１４）ｃｍ^3
（１０√２×１０√２×５√２）

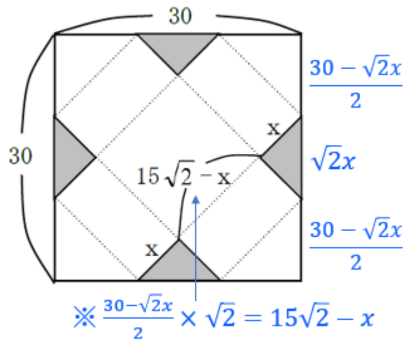
Ａ）普通の展開図



Ｂ）段ボール型展開図



Ｃ）お菓子の箱型展開図



A）普通の展開図

$V=x(15-x)(30-2x)$

$=2x^3-60x^2+450x$

$V'=6x^2-120x+450$

$=6(x-5)(x-15)$

Ｖの最大値は、$x=5$のとき

$V=5\times 10\times 20=1000cm^3$

B）段ボール型展開図

$V=2x(15-2x)(30-2x)$

$=8x^3-180x^2+900x$

$V'=24x^2-360x+900$

$=12(2x^2-30x+75)$

Ｖの最大値は、$x=(15-5\sqrt{3})/2$のとき

$V=(15-5\sqrt{3})\times 10\times(15+5\sqrt{3})$

$=750\sqrt{3}\fallingdotseq 1299cm^3$

C）お菓子の箱型展開図

$V=x(15\sqrt{2}-x)^2$

$=x^3-30\sqrt{2}x^2+450x$

$V'=3x^3-60\sqrt{2}x^2+450x$

$=3(x^2-20\sqrt{2}x+150)$

$=3(x-5\sqrt{2})(x-15\sqrt{2})$

Ｖの最大値は、$x=5\sqrt{2}$のとき

$V=5\sqrt{2}\times 10\sqrt{2}\times 20\sqrt{2}$

$=1000\sqrt{2}\fallingdotseq 1414cm^3$

⑷授業実践結果

実施クラス；浦和南高等学校２年次（数学Ⅱ）

１組（文系４０人，６つの班）

６組（理系数学Ⅲ選択者２２人，４つの班）

発表は，１組は１日目に２つの班，２日目に完成しなかった残り４つの班，６組は１日目に３つの班，２日目に完成しなかった残り１つの班が行った．

（１組文系）

１日目発表班　２班と６班

「普通の展開図」の最大　$1000cm^3$

２日目発表班　４班と５班

「普通の展開図」の最大　$1000cm^3$

「段ボール型展開図」

３班　$7.5\times 7.5\times 22.5\fallingdotseq 1266cm^3$

１班　$6.5\times 8.5\times 23.5\fallingdotseq 1298cm^3$

（６組理系数学Ⅲ選択者）

１日目発表班　１班と２班と４班

「普通の展開図」の最大　$1000cm^3$

２日目発表班　３班

「お菓子の箱型」の最大　$1000\sqrt{2}cm^3$

３．考察

時間の関係で，発表を１日目の最後と２日目の最初に分けて行った．１日目は製作が制限時間に間に合った班に発表してもらったが，発表した班すべて「普通の展開図」の最大の箱を作ることができた．

２日目は発表した班のうち，１組（文系）の２つの班は１日目に発表した班と同じ「普通の展開図」の最大の箱を発表したが，クラッシーノートの発表資料や発表は少しアップグレードしていた．

２日目に発表した１組（文系）の残りの２つの班は，「段ボール型展開図」を発想することができた．そのうち３班は，式を立てることができず，「底面が正方形になる箱が容積が大きくなるのではないか」という考えで長さを決めていた．また１班は，式を立てることはできたが，極値となるｘの値が無理数になるために求めることができず，ｘに適当に６と６．５と７を代入してｙが最大になった値６．５に設定して箱を作っていた．どちらの班も「段ボール型展開図」の最大値を求めることはできなかったが，この展開図を発想した発想力と，最大値を求めようとするアプローチはよかったと思う．また，１班の中には厚紙を斜めに使う「お菓子の箱型展開図」に近い発想をしていた生徒もいた．この発想を他の班員に伝えてもっと議論できていれば，違った展開になったのではないかと感じた．

２日目に発表した６組（理系）の残りの１つの班は，制限時間である１日目に間に合わなかったが，「お菓子の箱型展開図」を発想することができ，最大のものを作ることができて素晴らしかった．

また，生徒の感想によると，生徒の中には「使う厚紙の面積を最も大きくする」，すなわち「厚紙を切り取る面積を最も少なくするにはどうしたらよいか」と考える生徒が多かったようである．このことにも解説で取り上げて考察した方がよいと思う．

４．生徒の感想

★「普通の展開図」

・微分や増減表などをいつ使うのだろうと思ったこともあったので，今回実際に使うことができてよかったです．１人だけでは絶対に答えに辿り着かなかったと思うので，皆で協力してやって理解できて嬉しかったです．皆でやることでより記憶が定着したように感じました．

・文字において式をたてれば正しい最大値を求めることができるとわかりました．

・切り取る部分が小さいからといって容積が最大になるわけではないと知れておもしろいと感じました．
・紙をたくさん使えば容積も大きくなるという私の考え方がくつがえされたのでおもしろかったです．
・展開図が１つしか思いつかなかったので，もっと頭をやわらかくして，色々な方法を試したいです．
・箱の展開図と言われ，すぐに普通の展開図が思いついてそれに合わせて問題を解いてしまった．箱の面を組み合わせる発想がなかったので，１つの考え方にとらわれずに考えるのが大事だと思った．
・斜めに切るという発想に驚きでした．
・発表するときに自分の考えを言語化するのが難しかったです．記述のテストでも部分点がもらえるようにもっと練習しようと思いました．
・ｘの範囲など細かい条件を見落とさないようにしたいです．
・ｘの範囲が設定できなかったので，次に面積や体積を求めるときはｘの範囲に注意して解きたい．
・他の図形でも利用できておもしろいと思ったので，調べてみたいです．例えば，表面積が一定の円柱の体積の最大値を考えてみました．（以下略）

★「段ボール型展開図」底面が正方形（１組３班）

・いろいろなアイディアが出たのがおもしろかった．ｘを使って式をつくることができなかったのが残念だった．だけど，正方形という分かりやすい形にすることによって，最大ではなかったが見やすい図になったと思うのでよかった．
・立体になると平面よりもさらに難しく感じたけど，複雑になったときこそ何を求めたいかをしっかり考えらえるようにしたい．分かっていないことを文字で置くという初歩的なこともすごく大切だとわかった．
・みんなで相談しながら答えを導き出すのが，自分にはないアイディアや考えを知ることができて興味深かったです．

★「段ボール型展開図」最大に近い（１組１班）

・自分で考え，きちんと図にして説明までできてよかった．正解との差が１ｃｍ^{3}だけで驚きだった．式をたてることはできたので，あとは微分などもして正確な解を求められるようになりたい．
・地道に代入して求めていく方法も大切だと思いました．
・アイディアが出ていても，それを実際計算したり式をたてたりすることが難しかったです．色々な班でそれぞれの発想があっておもしろいなと思いました．

★「お菓子の箱型展開図」（６組３班）

・班の中で斜めにするという案は出たけど，それを時間内に終わらすことができず惜しかったです．しかし翌日に１０００ｃｍ^{3}を超えることができたのでよかったです．
・最初この課題で微分を使うという発想が自分の中にはなく，自分の中で考えたたくさんのパターンをどんどん潰していくだけになってしまった．数学を活用できず，式をすぐに構築できなかった．
・他の班が考えていたものを思いつかなかったのでとても残念でしたが，結果的にそれとはまた違う考えを思いつくことができたのでよかったです．

５．まとめ

「探究的な学びを積極的に組み込み，新たな価値を創造する生徒を育成する」という目標を達成するために，数学の授業でも積極的に探究型の授業を実践していく必要があると考える．また，共通テストでも出題されている探究型の問題（太郎さんと花子さん問題）に対応するためにも，探究型の授業実践は必要であると考える．しかし，授業の進度を考えると，多くの時間を割くことはできないのも現状である．

今回実践した「最大容積の箱を作ろう」という探究型の授業は，授業の様子や生徒の感想を見ると，とても効果的な授業であると思う．このような効果的な授業を集めて精査し，各単元に１回ずつでもよいから実践事例を集めて，実施していきたいと考えている．