言語化を意識した説明活動を取り入れた指導法について

さいたま市立浦和南高等学校　太田　敏之

＜要旨＞
解法の手順を数式の羅列として機械的に暗記するだけで，理解が深まっていない生徒が多いのが現状である．そこで，数式や解答手順を言語化することを意識し，生徒どうしペアを組んで説明活動を行うことで理解を深める指導法を実践し，誤答分析やアンケート結果から，その効果について考察する．

１．はじめに

数学の解答は意識しないとどうしても数式が多くなってしまい，解法の手順を数式の羅列として機械的に暗記するだけで深い理解ができず，少し問題が変化すると解けなくなってしまう生徒が多い．また，数式が並んでいることに圧倒されて理解できず，苦手意識を持ってしまう生徒も多い．

そこで，ここ数年実践しているアクティブラーニングとふりかえりシートを活用した主体的な学びを促す指導法に加え，数式や解答手順を言語化することを意識し，生徒どうしペアを組んで説明活動を行うことで理解を深める指導法を実践し，その効果について考察する．

２．言語化を意識した説明活動

「言語化」とは，頭の中で考えていることを言葉に変換し,さらにそれを相手が理解しやすい表現で伝えることである．本論では「数式の言語化」と「手順の言語化」について焦点をあてて述べていく．

（１）数式の言語化

数学の記号は「世界共通の言語である」と「短い表記で表現できる」という２つの役割を担っている．例えば「２＋３＝５」という表記は現在では当たり前に使われているが，「＋」や「＝」の記号が初めて使われたのは西暦 1500 年頃であり，その前は長々と言葉で表現していたといわれている．「２＋３＝５」を現在の言語で表すと，英語では「Two and three make five.」，日本語では「２たす３は５」といった具合である．つまり現在の「２＋３＝５」という記号による表現は，世界共通の言語であり，言葉で表現するより短い表記で表現しているといえる．しかし，生徒にとって記号の理解は難しく，記号や数式に拒否反応を示して深く理解しようとしない生徒も多い．そこで，授業において数式で表す意義を説明し，記号を日本語に訳して説明することによって，記号や数式の理解を深めることができると考える．

（例）$\sqrt[3]{8}=$　・・・　３乗すると８になる数は？
　　　$\log_2 8=$・・・　８は２の何乗か？

（２）手順の言語化

教科書の例題や問題集の解答に対する生徒からの質問は，「どうしてこの式がこの式になるのですか」というような計算過程についての質問が多い．しかし生徒が計算過程を理解して解答を暗記したとしても，何のためにこの式をこの式に変形するのかがわからないと，解法の手順を理解したとはいえず，少し問題が変化すると解けなくなるのが現状である．

例えば，２次関数$y=x^2-4x+3$を平方完成して$y=(x-2)^2-1$と変形できることや，因数分解して$y=(x-1)(x-3)$と変形できることだけではなく，この問題は「何のために平方完成するのか」，「何のために因数分解するのか」を理解して説明できるようにすることが大切であると考える．つまり「<u>頂点を求めたいから</u>平方完成する」，「<u>最大値最小値を求めたいから</u>平方完成する」，「<u>方程式を解きたいから</u>因数分解する」というように，式変形する理由をしっかり説明することが大切であると考える．

３．言語化を意識した指導法

(1)「思考活動」

言語化を意識して解答手順を説明する．授業では，以下の①～④のように，要点を「発問→相談→ランダム指名」の展開を意識し，なるべく生徒全員が主体的に考えるようにする．

①指名する前に答えさせる質問を最初に言う

②間をとって全員に一人で考えさせる
③情報集めタイム（相談タイム）を設定する
④ランダムに指名する（答えられなければ再度相談タイムをとり，必ず答えてもらう）

(2)「解答活動」
①演習問題を自力で解く
②まわりと答えあわせをする（わからければまわりの人にきき，わからない人がいたら説明する）

(3)「解説」
演習問題を教師が手順を言語化しながら解説する．その際，数式だけでなく，言葉での説明を大切にする．（～であるから，～したいので，～の定理より，など）

(4)「説明活動」
解説での言語化を意識して，演習問題の解説を生徒どうしが言葉でしっかり説明する．じゃんけんして勝った方が先行となり，ペアでお互いに丁寧に説明しあう．

(5)「ふりかえり活動」
言語化のアウトプットのまとめとして，「ふりかえりシート」にその授業で学んだ大切なことを自分の言葉でまとめて，週末に演習課題と一緒に提出する．

４．具体的な指導例

数学Ⅱの三角関数，指数関数，対数関数の，方程式・不等式・最大値最小値の問題を例にして，言語化を意識した指導法を提案する．

１）三角方程式の指導法

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき， 方程式 $\sin\theta - \cos 2\theta + 1 = 0$ を解け

（正答）

(a) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より，
$\sin\theta - 1 + 2\sin^2\theta + 1 = 0$
$2\sin^2\theta + \sin\theta = 0$

(b) $\sin\theta = t$ とおくと
$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

(c) $2t^2 + t = 0$
$t(2t+1) = 0$
$t = -1/2\ ,\ 0$

(d) $\sin\theta = -1/2\ ,\ 0$ より
$\theta = 0, \pi, (7/6)\pi, (11/6)\pi$

(1) 解く手順の言語化

(a) 角度をそろえ，三角比の種類をそろえる
(b) そろった三角比を文字で置き，すぐに置いた文字の新しい定義域を考える
(c) 置換によってできた２次方程式を解く
(d) 文字を元に戻して，解を求める

(2) 説明活動での言語化例

(a) 角度をそろえるために，倍角の公式を使います．また，三角比の種類を $\sin\theta$ にそろえたいので，$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ の公式を使うと，$2\sin^2\theta + \sin\theta = 0$ になります．

(b) $\sin\theta$ だけの式になったので，$\sin\theta = t$ とおきます．（$\sin\theta$ をひとまとめとして考えます）
t の定義域は，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ になります．
また，求める方程式は $2t^2 + t = 0$ になります．

(c) この２次方程式を解くために左辺を因数分解すると，$t(2t+1) = 0$ となり，これを解くと，$t = -1/2, 0$ になります．

(d) 文字を元に戻して解を求めると，解は
$\theta = 0, \pi, (7/6)\pi, (11/6)\pi$ になります．

２）指数関数の最大値・最小値の指導法

$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき， 関数 $y = 4^x - 4 \times 2^x$ の最大値と最小値， およびそのときの x の値を求めよ

（正答）

(a) $y = 4^x - 4 \times 2^x = (2^x)^2 - 4 \times 2^x$

(b) $2^x = t$ とおくと
$-1 \leqq x \leqq 2$ より　$1/2 \leqq t \leqq 4$

(c) $y = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$ より
$t = 4$ のとき，最大値 0
$t = 2$ のとき，最小値 -4

(d) $2^x = 4$ より $x = 2$，$2^x = 2$ より $x = 1$
よって，　$x = 2$ のとき，最大値 0
$x = 1$ のとき，最小値 -4

(1) 解く手順の言語化

(a) 指数部分をそろえ，底をそろえる
(b) そろった指数関数を文字で置き，すぐに置いた文字の新しい定義域を考える
(c) 置換によってできた２次関数の最大値と最小値を求める
(d) 文字を元に戻して，そのとき x の値を求める

(2) 説明活動での言語化例

(a) 指数部分はそろっているので，底をそろえると，$y = (2^x)^2 - 4 \times 2^x$ になります．

(b) 2^x だけの式になったので，$2^x = t$ とおきます．（2^x をひとまとめとして考えます）

ｔの定義域は，$-1 \leqq x \leqq 2$ より $1/2 \leqq t \leqq 4$ になります．

また，関数は $y = t^2 - 4t$ になります．

(c)　この関数の最大値と最小値を求めるために，右辺を平方完成すると $y = (t-2)^2 - 4$ になります．よって，この放物線は下に凸より，最大値となる点は軸から一番遠い点なので，$t = 4$ のときになり，このとき最大値は $y = 0$ となります．また，最小値となる点は軸から一番近い点すなわち頂点なので，$t = 1$ のときになり，このとき最小値は $y = -4$ となります．

(d)　文字を元に戻して，そのとき x の値を求めると，$x = 2$ のとき，最大値 0，$x = 1$ のとき，最小値 -4 になります．

３）対数不等式の指導法

不等式 $\log_5 x + \log_5 (x-4) < 1$ を解け

（正答）

(a)　真数は正であるから　$x > 0$，$x - 4 > 0$

よって、$x > 4$　…①

(b)　不等式から　$\log_5 x(x-4) < \log_5 5^1$

(c)　したがって　$x(x-4) < 5^1$

(d)　$x^2 - 4x - 5 < 0$

$(x+1)(x-5) < 0$

これを解くと　$-1 < x < 5$

(e)　①より　$4 < x < 5$

(1) 解く手順の言語化

(a)　真数条件を必ず最初に考える（真数は正）

(b)　対数の性質を正しく利用して，底をそろえ，左辺と右辺を同じ形にする

(c)　真数部分を比較する（底の値で場合分けする）

(d)　真数部分を抜き出すことによってできた２次不等式を解く

(e)　真数条件と合わせて解を求める

(2) 説明活動での言語化例

(a)　真数は正なので，$x > 0$，$x - 4 > 0$ より，真数条件は $x > 4$ になります．

(b)　真数部分を比較したいので，対数の底をそろえて，左辺と右辺を同じ形にするために対数の性質を利用すると，$\log_5 x(x-4) < \log_5 5^1$ になります．

(c)　底５が１より大きいので，真数部分を比較すると，不等号の向きは変わらずに抜き出して，$x(x-4) < 5^1$ になります．

(d)　この２次不等式を解くと，$-1 < x < 5$ になります．

(e)　真数条件と合わせると，解は $4 < x < 5$ になります．

５．本指導法の実践報告とその効果の考察

授業を実践したクラスは，２年次文系４０名と理系習熟度上位クラス(AD)２０名である．

生徒の「説明活動」の様子は，発表会で動画を紹介する．また，生徒の「ふりかえりシート」によるアウトプットの例は以下に紹介する．

１）項目別得点率（小テスト）

この指導法を行った後１週間以内に行った小テストの項目別得点率と誤答分析は以下の通りである．途中式もしっかり書いてもらって分析を行った．

(1) 対数方程式

$\underline{\log_2(x-2) + \log_2(x-5) = 2}$

＜文系＞　　正答率９３％（誤答３名）

誤答；真数 $x > 0$（１名），因数分解ミス（１名）

完答できず（１名）

＜理系(AD)＞ 正答率８８％（誤答２名）

誤答；真数条件忘れ（１名），因数分解ミス（１名）

(2) 対数不等式

$\underline{\log_2(x-1)+\log_2(x-3)<3}$

＜文系＞　　正答率７２％（誤答１１名）

誤答；底そろえない $(x-1)(x-3)<3$　（１名）

形そろえない $(x-1)+(x-3)<8$　（１名）

真数条件計算ミス　（２名）

２次不等式計算ミス（４名）

因数分解ミス（１名），完答できず（２名）

＜理系(AD)＞ 正答率９４％（誤答１名）

誤答；完答できず（１名）

２）項目別得点率（定期考査）

定期考査の項目別得点率と誤答分析は以下の通りである．答えのみの解答であったため，誤答分析には予想も含まれている．

(1) 対数方程式

$\underline{\log_2 x+\log_2(x-6)=3}$

＜文系＞　　正答率９２％（誤答３名）

誤答；左辺計算ミス（２名），無答（１名）

＜理系(AD)＞ 正答率１００％（誤答０名）

(2) 対数不等式

$\underline{\log_{1/2}(2x+6)>-1}$

＜文系＞　　正答率６７％（誤答１３名）

誤答；真数条件忘れ $x<-1/2$　（６名）

真数条件＋符号反転忘れ $x>-1/2$（４名）

表記ミス　$-3<x$，$x<-1/2$ など　（３名）

＜理系(AD)＞ 正答率７５％（誤答４名）

誤答；真数条件忘れ $x<-1/2$　（１名）

計算ミス（真数条件はあり）　（３名）

２次不等式計算ミス等　（１名）

これらの結果は，この指導法を実施していない授業のデータがないので正確に比較分析ができないが，この指導法を実施していない過去に担当した授業と比べると得点率は高いように感じている．ただし，説明活動から時間がたつにつれて真数条件を忘れる誤答が増えているので，もっと意識づけをする必要があると考える．

３）説明活動による理解度アンケート

「対数方程式と対数不等式」について，生徒どうしで説明活動を行うことで理解が深まりましたか？

●とても理解が深まった　４７．４％

●やや理解が深まった　４３．９％

●変わらない　８．７％

●あまり理解が深まらなかった　０％

＜感想（自由記述）＞

・自分なりに短く簡単に工程をまとめたものが今でも頭に残っている．

・家で問題を解いたときに，意外と授業内容を覚えていたことに驚いた．

・口に出して説明したから英語の音読的な感じで頭に入りやすかった．

・１人で覚えるのと比べると段違いに頭に入っているという風に思った．

・言語化することで，実際に問題を解くときに心の中で唱えながら問題を解けた．

・その計算をする理由を述べる事が多くてよかった．

・言葉で整理することでただ解くよりも理解が深まった．

・言葉にして説明することで,完璧には理解できてないところを見つけられた．

・相手と自分の説明の仕方を比較でき,説明の改善につながった．

・自分の言葉で説明することは緊張した．

・説明活動をする前に周りの人と相談しながら問題を解いたので，特別変化はなかった．

・その時はできても後には思い出せなくなっていた．

・同じ説明を聞いた後にただ音読しているだけの人もいた気がする

６．研究のまとめと今後の課題

数式や解答手順を言語化することを意識して生徒どうしの説明活動を行うことで理解を深める指導法を実践することで，生徒が主体的に考えて取り組むことができ，考査や小テストの結果およびアンケートの結果からも概ね効果的であったと考える．ただし，「時間がたつにつれて解き方を忘れてしまう」「ただ手順の暗記になっている」という感想もあったので，「思考活動」の段階での概念の意識づけがもっと必要であると感じた．今後もさらに言語化を取り入れた指導法の研究を進めていきたい．

＜引用文献＞

[1]太田敏之（2011），「言語活動を取り入れた数学の授業の研究」，「日数教全国（神奈川）大会発表論文」．

[2]太田敏之（2022），「主体的な学びを促す指導法による生徒の意識の変化」，「日数教全国（島根）大会発表論文」．