公式の指導法についての考察　～公式セールスマンの活動

さいたま市立浦和南高等学校　太田　敏之

＜要旨＞

数学の問題を解くに当たって，たくさんの様々な公式をそれぞれどのように教え，定着させ，活用させるかは大きな課題である．そこで本論では，多くの公式を「公式の使用判断」「公式の暗記法」「公式の指導順」「公式の証明法」の観点でそれぞれ分類して，その指導法について考察する．

１．研究の概要

数学の問題を解くに当たって, たくさんの様々な公式をそれぞれどのように教え，定着させ，活用させるかは大きな課題である．そこで，本論では公式の指導法について分析して考察する．

授業で数学の新しい公式を指導するときには, 昨年度から「公式セールスマン」を名乗って提示し，以下のようなことに留意し，生徒に話をしている．

数学の問題を解決することは, 様々な仕事を進めることと同じ手順である場合が多いと考えている．

仕事上の目的を達成したり, 課題を解決したりするためには，なるべく速く，効率よく，かつ間違えがないように進めることが大切であり, そのために便利な機械やシステムを使うことが必要になってくる．

それと同様に，数学の問題を解くときも，なるべく速く，効率よく，かつ間違えがないように解くことが大切であり, そのために数学の公式を活用することが必要になってくる．つまり，数学の公式は，身のまわりの物に置き換えると，スマートフォンやパソコン，電卓などの便利な機械や, 仕事を進めるための便利なソフトウェアやマニュアルなどのシステムと考えることができる．

様々な機械やシステムがあれば, まず試しに使ってみて，便利と感じたものであれば使えばよいし，便利と感じなければ使わなくてもよい. 使うことを決めた機械やシステムは，取扱説明書を読むか他の人に習うかして，使い方を覚えなくてはならないが, 使い方を覚えて使えるだけでは不安である．というのは，その機械やシステムが誤作動したり, 正しくないものを使って間違った仕事をしてしまったりする危険性があるからである. そこで次の段階としては, その機械やシステムが正しいかどうかを自分の目で確かめる必要がある．さらに，仕事を組織として進めるためには，自分が正しいと確認し，便利であると考えた機械やシステムを, まわりの人にそれが正しく動作することを説明して, 使うように薦めることも必要となってくる．

そこで，数学の公式を指導するにあたって，次の３つのことを生徒に話し, 注意して指導するとよいのではないかと考える．

①数学の公式はただ問題を解けるかどうかではなく，早く効率よく解くことを重視して, 最終的には自分で使うか使わないかを判断すること．（使用判断）

②公式を丸暗記して使用するのか､導き方をふまえた上で暗記して使用するのか, 必要に応じて使用する際に導くのかを考え，分類すること．（暗記法）

③公式は，使い方を習得するだけでなく，その公式の有用性を感じさせ, 公式が正しいことを生徒が納得して使うこと．また，公式が正しいことを言葉または文章で他の人に伝えられるようになるとなおよいこと．（証明法）

公式を指導するに当たっては，この３点を意識して指導方法を考察していく必要があると考える．

そこで本論では，たくさんの様々な公式について以下の観点でそれぞれ分類して，その指導法について考察することとする．

２．研究の内容（１）

（１）使用判断

公式の暗記のしやすさ，使用のしやすさと，速さ・効率のよさを考えて，公式の使用判断をする. 最終的には生徒が使用判断を行うが, 公式セールスマンとしての見解を話して参考にしてもらうとよい．

（例１）数学Ⅰ・数学Ⅱ　展開公式

①　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

この公式は暗記しやすく使用しやすいこと, 公式を使用しないで分配法則で展開すると時間がかかり間違えやすいことから，使用を薦めるとよいと考える．

② $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

これも暗記しやすく使用しやすいため，使用を薦めるとよいと考えるが，置き換えによる工夫をしても比較的容易にできるため，暗記間違いの危険を考えると公式を使用せずに置き換えを利用する場合もあると考える．

③ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

筆者の見解ではあるが，この公式を暗記して，右辺にａ，ｂ，ｃ，ｄの値を代入しても，普通に展開しても，それほど速さに違いはなく，公式の暗記間違いの危険を考えると使用しない方がよいのではないかと考える．

（２）暗記法による考察

公式は，「（A）丸暗記する公式」「（B）導き方をふまえたうえで暗記する公式」「（C）必要に応じて導く公式」の３つに分類して整理するとよいと考える．

（例２）数学Ⅱ　三角関数

●（A）丸暗記する公式

①三角関数の加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$

加法定理は証明が難しいため，丸暗記するしかないと考える．解の公式のように唱えて覚えてもよいが、「咲いたコスモス，コスモス咲いた」「コスモスコスモス，咲かない咲かない」「一枚タンタン，タンプラタン」のような語呂合わせで覚えるのが有効であると考える．

●（B）導き方をふまえたうえで暗記する公式

②三角比の相互関係（一般角）

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ と $\tan\theta=(\sin\theta/\cos\theta)$ の公式は，底角が θ，斜辺の長さが１の直角三角形から導けるようにしておいた方がよいと考える．

$1+\tan^2\theta=(1/\cos^2\theta)$ の公式は $\tan\theta$ と $\cos\theta$ を逆にして覚えてしまうなどの間違いが多いため，そのまま暗記をさせるだけではなく，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\cos\theta$ で割り，さらに $\tan\theta=(\sin\theta/\cos\theta)$ の公式から導く方法を定着させておくとよいと考える．

③２倍角の公式，半角の公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan2\alpha=2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$

$\sin^2(\alpha/2)=(1-\cos\alpha)/2$

$\cos^2(\alpha/2)=(1+\cos\alpha)/2$

２倍角の公式は，使用頻度が高いため暗記させた方がよいが，忘れたときのために $\sin(\alpha+\alpha)$，$\cos(\alpha+\alpha)$，$\tan(\alpha+\alpha)$ から導きだせるようにしておいた方がよいと考える．また，半角の公式も２倍角の公式から導きだせるようにしておいた方がよいと考える．

●（C）必要に応じて導く公式

④ $\theta+\pi$ 等の三角比の公式

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$ や $\sin(\theta+\pi/2)=\cos\theta$ などの変換の公式は，種類も多く暗記も大変なため，暗記するのではなく，必要に応じて単位円から視覚的に導くとよいと考える．

⑤和から積，積から和の変換

$\sin\alpha\cos\beta=(1/2)\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ や，

$\sin A+\sin B=2\sin\{(A+B)/2\}\cos\{(A-B)/2\}$

などの公式は，種類も多く暗記するのも大変であるため，使用頻度等も考慮して，必要に応じて導きだせるようにしておいた方がよいと考える．

３．アンケート分析

生徒６０名に，それぞれの公式をどのように覚えて利用したかを書いてもらったアンケートの結果は以下の通りである．

（質問）数学Ⅱで学んだ次の公式の暗記法について，自分で分類するとしたら，どう分類しましたか？

それぞれの公式について，下の（A）～（C）から１つ選んでください．

（A）丸暗記した．

（B）暗記したが，忘れたときのために導き方も覚えた．

（C）暗記せず，必要な時に導いて使った．

●（A）丸暗記する公式

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

（A）98.3%　（B）1.7%　（C）0.0%

(2) $\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$

（A）96.7%　（B）1.7%　（C）1.7%

タンジェントの加法定理はサインとコサインの加法定理から導くことも可能であるが，語呂合わせが有効なのか丸暗記した生徒がほとんどであった．

●（B）導き方をふまえたうえで暗記する公式

(3) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

（A）90.0%　（B）8.3%　（C）1.7%

(4) $\tan\theta=(\sin\theta/\cos\theta)$

（A）81.7%　（B）16.7%　（C）1.7%

相互関係のこの２つの公式は，使用頻度も高く覚えやすいことから，丸暗記してしまっている生徒がほとんどであった．それでも，$\tan\theta = (\sin\theta/\cos\theta)$ の方は，（高さ）/（底辺）でイメージして導き方を覚えている生徒がいたようである．

(5)　$1+\tan^2\theta=(1/\cos^2\theta)$

　（A）81.7%　（B）18.3%　（C）0.0%

この公式は暗記し間違えやすいため，公式から導く方法を定着させておきたいところであったが，丸暗記しただけの生徒が多く，導き方を定着させることができなかったというアンケート結果となった．今後の指導方法を修正していく必要があると感じた．

(6)　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

　（A）66.7%　（B）30.0%　（C）3.3%

(7)　$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

　（A）68.3%　（B）28.3%　（C）3.3%

(8)　$\tan 2\alpha = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$

　（A）61.7%　（B）30.0%　（C）8.3%

(9)　$\sin^2(\alpha/2)=(1-\cos\alpha)/2$ など

　（A）61.7%　（B）21.7%　（C）16.7%

これらの公式は $1+\tan^2\theta=(1/\cos^2\theta)$ の公式よりは導き方をふまえて覚えている生徒が多かったが，もう少し丸暗記だけではなく導き方を覚えている生徒を増やす必要があると感じた．特にタンジェントの２倍角の公式は，使用頻度がサインやコサインの２倍角の公式より低いため，さらに導き方を覚えている生徒を増やす必要があると感じた．半角の公式は，必要に応じて２倍角の公式から導くという意識がある生徒が少し多かった．

●（C）必要に応じて導く公式

(10)　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ など

　（A）13.3%　（B）36.7%　（C）50.0%

(11)　$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$，$\sin(\theta+\pi/2)=\cos\theta$ など

　（A）5.0%　（B）40.0%　（C）55.0%

これらの公式は，暗記するのではなく，必要に応じて単位円から視覚的に導くとよいと授業で何回も話をしたため，このような結果となり，この公式の利用法をうまく伝えることができた授業が行えたのではないかと感じる．

４．研究の内容（２）

公式を暗記して利用しようとする動機を高めるには，その公式を使わないと計算が大変であることを実感させる必要がある．

例えば $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフと x 軸で囲まれる面積を求めるような問題は出題頻度が高いため，$\int_1^3 \{-2(x-1)(x-3)\}dx$ のような具体的な問題が出されるたびに，式を展開して原始関数を求め，定積分を計算していては，時間がかかり，計算も大変である．よって手間ではあるが，一度だけ文字のままで式を展開して原始関数を求め，定積分を計算していき，$\int_\alpha^\beta \{-a(x-\alpha)(x-\beta)\}dx = a(\beta-\alpha)^3/6$ の公式を作って，それを利用するとよいことを説明する．

実はこのような経験は，中学校の時の２次方程式の解の公式のときに，毎回２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の左辺を平方完成して，$x=$ に変形して求めていては大変なので，一度だけ文字のままで平方完成をして $x=$ に変形して，それを解の公式として利用するというケースで経験している．これについても例として説明する．

このような公式は，使い方を習得するだけでなく，その公式が正しいことを生徒が納得して使うことができるようにする必要があると思うので，注意が必要である．

５．研究の内容（３）

（１）指導順による考察

ここでは公式の証明，提示，使用法の指導順についての考察を行う．教科書では公式によって，公式を導いてから公式を提示する方法と，公式を提示してから証明をする方法の２種類がある．そしてその後に使用法を載せることが多い．しかし実際の授業では，生徒の実態に即して，公式の証明，提示，使用法をどの順番でやればよいかを考察する必要がある．

①公式の導出→提示→使用法

ある問題を解決するにあたり，具体的な数値で毎回最初から計算するよりは，一度一般的な文字で置いて計算をし，それを公式として認定し，公式の文字に数値を代入して計算していくと楽である．これは，その考え方の手順に従って公式を導き，それを公式として提示し，公式の文字に代入する使用法を紹介する順番である．

②公式の提示→証明→使用法

公式によっては，何の式を導きたいのかが見えないと公式を導く過程がわかりづらいものもある．これは，まずは公式を提示してから，それを証明し，使用法を紹介する順番である．

③公式の提示→使用法→証明

公式を提示しただけでは,何のための公式かがわかりづらいため,証明を考える動機が薄くなりがちな公式もある.これは,公式を提示した後,先に使用法を紹介し,演習等をして公式に慣れた後に証明を行う順番である.

（例３）数学Ⅰ　三角比

ここでは,本校が利用している新編数学Ⅰ(東京書籍)の教科書を例にし，本校での実践例を紹介する.

①三角形の面積

２辺とその間の角による三角形の面積の公式は,公式の導き方が容易であるためか,教科書では公式を導いてから公式を提示している．授業でも，公式を考えさせながら導出し,公式を提示した後,使用法と演習を行った.

②余弦定理

余弦定理は，公式の導き方が複雑なためか，教科書ではまずは公式を提示し，その後証明をしている．授業でも，公式を提示した後に証明を行った.

また余弦定理は，$a^2=$や$\cos A=$の形になっていて，正弦定理に比べて使用法がイメージしやすい公式であるため，証明をした後に使用法と演習を行った.

③正弦定理

正弦定理も,余弦定理と同様に公式の導き方が複雑なためか，教科書ではまずは公式を提示し，その後証明をしている.授業でも,公式を提示した後に証明を行った.

ただし，正弦定理は等号が３つ並ぶ形の公式なので,使用法がわかりづらい公式である．そこで授業では，公式を提示した後,先に使用法を説明し,演習を行った後,証明を行った.

（２）証明法による考察

ここでは公式の証明法についての考察を行う.教科書では，一般化から具体化で説明する方法と，具体化から一般化で説明する方法の２種類がある.

①一般化から具体化

まず文字で公式の証明を説明してから,具体的な数を代入する方法が基本的である．ただし，文字が多い場合や証明の手順や計算が複雑な場合は証明がイメージしにくくなり大変である.

②具体化から一般化

最初に具体的な数で証明の手順をイメージさせてから，一般的な文字で証明する方法である．ただし，証明の説明を具体的な数と一般的な文字と二度しなければならないのが大変である．場合によっては，一般的な文字でも成り立つ説明を省略してしまい,不完全さを残すこともある.

（例４）数学B　数列

ここでは,本校が利用している新編数学B(東京書籍)の教科書を例にし，本校での実践例を紹介する.

①等差数列・等比数列の一般項

$a_n=a+(n-1)d$，$a_n=ar^{n-1}$の公式（初項がaで，公差がd公比がr）は，文字aとd，aとrのままでも,「a_nはaにdを$n-1$回足している」「a_nはaにrを$n-1$回掛けている」ということが容易に公式を導出でき，証明を理解できるため，教科書で文字のままで証明していると思われる．実際の授業でも，文字のままで証明を行ってから，具体的な問題を解いていった.

②等差数列・等比数列の和

$S_n=(1/2)(a+\ell)$，$S_n=a(1-r^n)/(1-r)$の公式は，文字のままでは,「$a+\ell$ がそろうところ」や,「引いて$ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}$が消えるところ」はイメージしにくいので，教科書では二度手間にはなるが,初項と公差や公比が具体的な数である問題で一度イメージさせてから,文字を使って証明をしている．実際の授業でも，一度具体的な数値でイメージさせたり，考えさせたりしてから，文字で証明した.

６．研究のまとめ

公式をどう扱うかという観点をもって授業を行っていって，以下のことがわかったと考える.

①早く効率よく,かつ間違いがないように問題を解くために,問題によって公式を使った方がよいかどうかを．教師の見解を参考に生徒に考えさせ，最終的には各生徒が公式の使用判断をするとよい.

②公式を丸暗記して使用するのか､導き方をふまえた上で暗記して使用するのか,必要に応じて使用する際に導くのかの使用法を,教師の見解を参考に生徒に考えさせ，最終的には，各生徒が公式の暗記法を考える必要がある.

③公式は，使い方を習得するだけでなく，その公式の有用性を感じさせることができるように紹介し,公式が正しいことを生徒が納得して使わせる必要がある．また，公式が正しいことを言葉または文章で他の人に伝えられるようになるとなおよい.

④授業を実施する際に，扱う公式によって，公式の証明，提示，使用法の指導順や，一般化と具体化の証明法をどうするか考察したほうがよい.

今後も研究を重ね，より有効な公式の指導法について考察していきたい.