予想させる活動を生かす教材の研究

神奈川県立横浜国際高等学校　太田　敏之

１．研究の背景

高等学校の数学については、平成 24 年度から新学習指導要領が全面実施される。本年３月に告示された新学習指導要領には、指導に当たって「数学的活動を重視し、数学を学習する意義などを実感できるようにすること」とある。

この数学的活動について文部科学省は、「数学的活動とは、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営みです」と述べている。

筆者は、生徒が主体的に授業に取り組み、自ら学び自ら考える活動ができるような授業として、生徒に「予想」をさせ、それについて考察させたり検証させたりする授業に注目し、研究を進めてきた。

そこで本論では、「予想させる活動を生かす教材」に焦点をあて、様々な教材を提案する。

２．研究の仮説

相馬氏(1995)は、「予想」について、「『予想』が考えることの必要性を生み出し、それが学習意欲につながるのである。」「正しい予想ができたかどうかは大きな問題ではない。予想したということが、『自分の予想は正しいだろうか』『正解や理由を聞いてみよう』『考えてみよう』という気持ちにつながるのであろう。」と述べている。

そこで本研究では、「生徒が予想し、考える活動を増やすことによって、生徒の知的好奇心や探究心を喚起して学習意欲を高め、生徒が主体的に数学に取り組み、自ら学び自ら考える活動ができるのではないか」という仮説を立て、研究をすすめてきた。

また、新学習指導要領では、指導に当たって配慮する事項として、

①自ら課題を見いだし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること。

②学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること。

③自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること。

の３つをあげている。

そこで本論では、上記の３つの配慮すべき事項をふまえ、さらに数学の４観点である、「興味・関心・意欲・態度」「数学的見方・考え方」「表現・処理」「知識・理解」をもとに、生徒に予想させる活動を生かす教材を次の３つに分類して作成し、前述の仮説を検証し、授業の効果について考察していくこととする。

３．研究の内容

3.1　予想の分類

生徒に予想させる活動を生かす教材を作成するにあたって、予想させる内容を以下の３つに分類した。

Ａ．結果の予想

応用問題など現実事象を題材とした課題の解答を、実際に問題解決する前に既習事項やこれまでの経験からあらかじめ予想する。

Ｂ．解法の予想

教科書等の未習事項の問題の解法を、既習事項をもとにして予想する。

Ｃ．定義・定理の予想

新出の定義に関して、既習事項や、教師からの概念や歴史的背景に関する発問をもとに予想する。また、定理や性質に関して、既習事項との類比や類推を用いて予想する。

3.2　ねらいと教材例

ここではまず、前述の３つの予想の分類をもとに、予想させる活動を生かす教材のねらいとその教材例について述べる。

Ａ．結果の予想

前章で述べた配慮する事項の②「学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること」に関連し、「興味・関心・意欲・態度」の観点に対応している予想であると捉える。

応用問題など現実事象を題材にした課題に関しては、結果を予想させてから問題を解かせると、問題のイメージを深めることができてよいと考える。また、結果が予想通りである喜びも効果的であるが、結果が予想と大きく違うことによる驚きや感動がともなう教材は、さらに生徒の興味をひき学習意欲を高めると考える。このような教材は、積極的に取り入れていきたい。

例えば、「もし紙を 20 回折ったらどのくらいの厚さになるか？」という問題は、１枚の紙の厚さを 0.1mm とすると、厚さは 0.1mm×２^{20}で、約 105ｍとなり、生徒の予想よりはるかに大きくなるという驚きがあり、関心を高めると考える。

Ｂ．解法の予想

配慮する事項の①「自ら課題を見いだし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること」に関連し、「数学的見方・考え方」や「表現・処理」の観点に対応している予想であると捉える。

筆者の授業の多くは「教科書を開いて！」ではなく、「教科書を閉じて！」から始まる。そして、教科書の例題等を黒板に書き、教科書を見せずに、解答を生徒に発問しながら完成させていく。「何を求めたらよいの？」「この文からどんな条件式ができる？」「次はどのように計算する？」「どう考えたらよいの？」と、解答の一行一行を生徒に発問し、間をとりながら進めることで、生徒は次の解法を予想し、自ら考えて導いたり、その意味を理解しながら進めたりすることができ、主体的に問題に取り組むことができると考える。

生徒を実際に指名して答えてもらう展開でもよいが、生徒が自ら考えているようであれば、間をとった後、指名せずに教師が黒板に解答を書いていくだけでも効果的であると考える。

例えば、「$P(x)=x^3-5x^2-9x+45$ を因数分解する」という問題については、「$P(\alpha)=0$ となるαをどのように探して解くとよいか？」などの発問をしながら、生徒 45 の約数に着目すればよいことを予想できるようにしていけばよいと考える。

Ｃ．定義・定理の予想

配慮する事項の③「自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること」に関連し、「知識・理解」や「数学的見方・考え方」の観点に対応している予想であると捉える。

定義を与えるときに、単に「こういう定義である」というのではなく、定義した根拠を考えて、どのように定義したらよいかを予想したり、説明・議論したりするとよいと考える。

例えば、$2^0=1$という定義に関して、「2^0はいくつだと思うか？」とまず予想させて、「$2^3=8$」→「$2^2=4$」→「$2^1=2$」→「$2^0=?$」という発問をしていくと、生徒は$2^0=1$という予想をすることができるようになり、定義が定着すると考える。

また、定理や性質を導くときも、ただ証明するのではなく、既習事項との類比や類推などで定理や性質を予想させてから証明していくと、イメージがしやすく、定理や性質が定着していくと考える。

例えば、「累乗根$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}$の計算は、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$の計算と比べると、どのように計算できると予想できるだろうか？」という発問をし、性質を予想させてから、証明していくとよいと考える。

４．指導案と授業実践報告

ここでは、前章で述べた研究内容に基づいた指導案例と授業実践を紹介する。

Ａ．結果を予想させる教材例

「紙を折りたたんだときの厚さ（数学Ⅱ指数関数）」

①原理

紙１枚の厚さを 0.1ｍｍとしたとき、この紙を 20 回折りたたんだときの厚さは、$0.1\times2^{20}=$ 1,048,576ｍｍより約 105ｍ。これはだいたい 30 階建てのビル位の高さとなり、横浜みなとみらいにあるコスモクロック 21（観覧車）の高さ(112.5ｍ)とほぼ同じになる。

ただし、実際の紙は折り目の関係で７回折るのがやっとであるので不可能であるが、折ったら切ることにすれば実験は可能となる。20 回折ったとき、縦横交互に折っていくと、１辺の長さは ２^{10}分の１（1024 分の１）になるので、例えば１辺 50ｍの正方形を校庭に用意し、20 回「折って切って」を繰り返すと、１辺が約５ｃｍの正方形になる計算となる。

もし 100 回折ると、厚さは 1.27×10^{26}ｍとなり、宇宙の半径と同じ位の大きさとなる。

②学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．展開① 校庭の大きさくらいの厚さ 0.1mm の紙を 20 回折ったら、どのくらいの厚さになるだろうか？ ①人間の身長位 ②サッカーゴール位 ③学校の校舎位 ④横浜みなとみらいのコスモクロック２１（観覧車）の高さ位 ①～④のどれかを予想させ、手をあげさせて、予想の数を数える。 （予想される生徒の反応） ①と②の回答が多い。④は少ない。	イメージさせるために、プリントを少し折らせてみる。 実際には７回折るのがやっとなので、折ったら切ることにすれば実験可能であることを説明する。 サッカーゴールの高さは 2.44ｍである。コスモクロック 21 は、身近な建物に置き換えてもよい。 ２人組で議論させてから、予想させてもよい。 まず第１印象の予想を聞き、少し時間をとって計算させてから、再度予想を聞いてもおもしろい。
２．展開② 実際に一緒に計算する。厚さ 0.1mm の紙を 20 回折ったときの厚さは、$0.1\times2^{20}=1048576$ より約 105ｍ。これはだいたい 30 階建てのビル位の高さとなり、横浜みなとみらいにあるコスモクロック 21（観覧車）の高さとほぼ同じになることを話す。	校庭に１辺が 50ｍの紙を用意すれば理論的には実験可能であることを話す。
３．まとめ もし、この紙を 100 回折ると、1.27×10^{26}ｍとなり、これは宇宙の半径と同じ位の大きさであることを話し、指数の増加量のすごさを実感させて、まとめる。	生徒の驚きを引き出し、指数への興味関心を高める。

③授業実践

平成 18 年度埼玉県立大宮武蔵野高校、平成 20 年度神奈川県立横浜国際高校で実施。

横浜国際高校２学年のあるクラス 32 人の生徒の予想は、

①人間の身長・・・17 人、②サッカーゴール・・・９人

③学校の校舎・・・３人、④コスモクロック 21・・３人

となった。コスモクロック 21 はありえないだろうという声も聞こえてきた。予想の後、計算して約 105ｍという数字が出て、生徒はかなり驚いていた。生徒は驚きを伴うことで指数の増加量のすごさを実感し、指数への興味関心を高めたようである。また、現実事象を数学で分析することで、数学の有用性を実感できたように思う。

Ｂ．解法を予想させる教材例

「因数定理を利用した因数分解（数学Ⅱ因数定理）」

①原理

生徒に教科書を見せながら例題の解説をし、それを参考にして問題演習をするのではなく、生徒に教科書を見せずに、教科書の例題等を黒板に書き、解答を生徒に発問しながら完成させる。その際、生徒に解答の仕方や考え方を予想させながら授業を進めていく。

例えば、「因数定理を利用して、$x^3-5x^2-9x+45$ を因数分解せよ。」という問題については、$P(x)=x^3-5x^2-9x+45$ とおいたとき、「$P(\alpha)=0$ となる α をどのように探して解くとよいか？」などの発問をし、「生徒が 45 の約数に着目する」などの解法のポイントを予想し、発見できるようにする。

②学習過程例

学習活動	指導上の留意点
1．展開① （例題）因数定理を利用して、$x^3-5x^2-9x+45$ を因数分解せよ。 $P(x)=x^3-5x^2-9x+45$ とおく。 次にどうする？ 最初の発問をし、生徒に考えさせ、すぐ答えさせる。 （予想される生徒の反応） $P(\alpha)=0$ となる α を探す。 $P(\alpha)=0$ となる α をどうやって探す？ 実際にどうやって探すかをまず考えさせ、$P(\alpha)=0$ となる α を見つけさせる。どうやって探したかを生徒に聞く。 （予想される生徒の反応） 1から順に代入してみる。小さい数から代入してみる。0になりそうなものを考える。勘、適当。 実際に解いてみる。まず1から順番で代入していくと $P(1)\neq 0$，$P(-1)\neq 0$，$P(2)\neq 0$，$P(-2)\neq 0$ となり、$P(3)=0$ で初めて $P(\alpha)=0$ となる $\alpha=3$ が見つかる。	教科書を閉じさせて、黒板に例題を書き、生徒に問題をノートに写させる。問題によっては、生徒が解法を予想しやすいように、教科書の式と数字を変えるとよい。 ここは既習事項の因数定理から、考えることができる。 教科書の例題の解答は、いきなり「$P(3)=0$ だから」とあり、どうやって見つけたかはわかりにくいので、そこを考えさせる。 まず、$P(\alpha)=0$ となる α を、生徒を指名して答えてもらう。どうやってみつけたかについては、多くの生徒に発問して答えてもらう。この時点で「45の約数」という意見がでれば、展開③を先にしてもよい。
2．展開② $P(x)$ は $x-3$ を因数にもつことがわかるので、$P(x)$ を $x-3$ で割ると、$x^2-2x-15$ となることから、 $P(x)=(x-3)(x^2-2x-15)$ $=(x-3)(x+3)(x-5)$ と因数分解できる。	とりあえず、問題を考えさせて、解答を完成させる。
3．展開③ $P(3)=0$ を探す効果的な方法は？ （補助発問）$P(3)$ 以外に $P(\alpha)=0$ となる α はあるか？ $\rightarrow \alpha=-3,\ 5$ （補助発問）3，－3，5は45に対してどんな数か？ （予想される生徒の反応） 45の約数から探せばよい。	自ら効果的な方法や探すための法則を予想する。 少しずつ補助質問をして、多くの生徒が「45の約数から探せばよいのではないか」ということが予想できるように展開する。 ２人組で議論させてから、予想させてもよい。
4．まとめ $P(x)=(x-3)(x+3)(x-5)$ の定数部分が $(-3)\times 3\times(-5)$ であることから、45の約数から探せばよいことがわかる。 このことから、$P(2)=0$，$P(-2)=0$ は計算しなくても、ありえないことがわかるので、効率よく α を見つけることができることがわかる。	生徒自らが予想することで、解法のポイントを深く理解させる。

③授業実践

平成18年度埼玉県立大宮武蔵野高校、平成20年度神奈川県立横浜国際高校で実施。

α を見つける法則を自ら予想できた生徒は、その後の演習でもよくできていたように感じた。

自ら予想できなかった生徒も、$P(x)=(x-3)(x+3)(x-5)$ の（－3）と3と（－5）のところを線で結んだ瞬間に「あっ！」と声をあげて気づくことができ、その面白さを感じることができたのではないかと思う。生徒が自ら解法のポイントを予想してから、解法を理解していくことで、問題に対する理解度や定着度が高まったように思う。

Ｃ．定義・定理を予想させる教材例

(1)「０や負の整数の指数（数学Ⅱ指数）」

①原理

$2^0=1$という定義に関して、教科書では、「$a^0a^n=a^{0+n}=a^n$だから$a^0=1$と定義する」としていることが多い。これは指数法則が成り立つように定義しているのであるが、定義より$a^0=1$と与えるのではなく、生徒に「2^0はいくつだと思うか？」とまず予想させ、「$2^3=8$」→「$2^2=4$」→「$2^1=2$」→「$2^0=?$」という発問から、$2^0=1$という予想を導くことで、定義が定着すると考える。

②学習過程例

学習活動	指導上の留意点
１．展開① $\boxed{2^0\text{はいくつだろうか？}}$ 生徒に予想させ、すぐ答えさせる。 （予想される生徒の反応） $2^0=0$と$2^0=1$の２つの予想がでる。 $\boxed{\begin{array}{ccccccc} 2^0 & & 2^1 & & 2^2 & & 2^3 \\ \Vert & & \Vert & & \Vert & & \Vert \\ ? & \xleftarrow{\div 2} & 2 & \xleftarrow{\div 2} & 4 & \xleftarrow{\div 2} & 8 \end{array}}$ 上図をヒントとして、さらに考えてもらう。 （予想される生徒の反応） 上図を書くことで、$2^0=1$の予想が正しいのではないかという意見が増えていく。 その後、「指数法則より、$a^0=1$と定義している」という話をする。	「2^3は２を３回かける」という観点でいくと、「2^0は２を０回かけるから０」という考えが出てくる。ミスディレクションとして用意してもおもしろい。 ２つの意見が出たところで、全体でどちらがよいかを議論させたり、２人組で話しあわせてから予想させたりしてもよい。 生徒が予想した後に、指数法則で定義を説明することで理解が深まる。
２．展開② $\boxed{2^{-1}\text{はいくつだろうか？}}$ 生徒に予想させ、すぐ答えさせる。 （予想される生徒の反応） $2^{-1}=-2$と$2^{-1}=\frac{1}{2}$の２つの予想がでる。 $\boxed{\begin{array}{ccccccccc} 2^{-2} & & 2^{-1} & & 2^0 & & 2^1 & & 2^2 \\ \Vert & & \Vert & & \Vert & & \Vert & & \Vert \\ ? & \xleftarrow{\div 2} & ? & \xleftarrow{\div 2} & 1 & \xleftarrow{\div 2} & 2 & \xleftarrow{\div 2} & 4 \end{array}}$ 上図をヒントとして、さらに考えてもらう。 （予想される生徒の反応） 上図を書くことで、$2^{-1}=\frac{1}{2}$の予想が増えていく。 その後、「指数法則より、$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$と定義している」という話をする。	$2^0=1$を説明している後なので、$2^{-1}=\frac{1}{2}$が予想できる生徒も多いが、「２をマイナス１回かける」と考え、マイナスが意識に強調されると、$2^{-1}=-2$となってしまう。また、定義が定着しないと、後に$2^{-1}=-2$の誤答がとても多くなるので、授業の展開に注意が必要である。 図を書いても、÷２を意識しないと、左右対称性から、$2^{-1}=-2$、$2^{-2}=-4$と予想してしまう生徒が多くなる。 ０と負の整数の指数を同時に予想させてもよい。

3．まとめ $a\neq 0$でnが正の整数のとき、 $a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ とまとめる。	定義をあらかじめ生徒が予想することで、定義を定着させる。 間違った予想を定着させないように配慮する。

③授業実践

平成 18 年度埼玉県立大宮武蔵野高校、平成 20 年度神奈川県立横浜国際高校で実施。
最初の予想では、$2^0=0$や$2^{-1}=-2$という予想も多かったが、図やしくみを考えていくことで、正しい定義にたどり着くことができ、理解も深まったように感じた。また、その後の「有理数の指数」の単元でも同じような予想させる授業展開ができるので、そこでも理解が深めることができたと感じている。2^0ではなく、いきなりa^0で考えさせる授業も考えられるが、まずは2で考えさせた方が生徒への浸透度は高いと考える。

生徒が、指数法則の説明だけで定義を与えられて、それを覚えるのではなく、そのように定義されると都合がよいという背景も考慮に入れ、定義を与えられる前に自ら予想することで、定義の定着度が高まったように思う。

(2)「累乗根の計算（数学Ⅱ指数）」

①原理

累乗根のかけ算について、教科書では、「$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$が成り立つ」といきなり性質を紹介し、それを証明する形になっていることが多い。この性質についてもいきなり与えるのではなく、「$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}$の計算は、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$の計算と比べると、どのように計算できると予想できるか？」という発問をし、性質を予想させてから、証明していくと、性質が定着すると考える。

②学習過程例

学習活動	指導上の留意点
1．展開① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}$は、どのように計算できるだろうか？ $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$の計算と比べて、考えてみよう。 生徒に予想させ、すぐ答えさせる。 （予想される生徒の反応） $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$なので、$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2\times3}=\sqrt[3]{6}$ になるのではないか？	$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$の計算と比べることは、時間差をおき、ヒントとして与えてもよい。 既習事項と類比して考える場面は、累乗根の導入で、「面積が5の正方形の一辺の長さは$\sqrt{5}$」→「体積が5の立方体の一辺の長さはどう表す？」などもある。
2．展開② $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$の証明（左辺の2乗と右辺の2乗が等しい）から、同様にして$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2\times3}$の証明をし、$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$の性質を説明する。 同様に考えると、$\sqrt[4]{15}\div\sqrt[4]{3}$、$\left(\sqrt[4]{2}\right)^3$は、どのように計算できるだろうか？ $\sqrt[4]{15}\div\sqrt[4]{3}=\dfrac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{15}{3}}=\sqrt[4]{5}$、$\left(\sqrt[4]{2}\right)^3=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{8}$も、 $\sqrt{15}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{15}{3}}=\sqrt{5}$、$\left(\sqrt{2}\right)^3=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$ $\left(=2\sqrt{2}\right)$と 類比させて、予想させる。 同様に、$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$、$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$の性質の証明をする。	具体的な数で性質や証明を理解してから、一般的な文字での証明をする。 類比の考えを定着させる。

３．まとめ 　累乗根の性質をまとめる。	性質をノートにまとめさせる。

③授業実践

　平成 18 年度埼玉県立大宮武蔵野高校で実施。

計算慣れしている平方根の計算と比べることで、累乗根の計算も定着することができた。ただ、性質をある程度は証明してやらないと、生徒は勝手な類比で成り立たない性質を作ってしまって計算してしまうことがあるので注意が必要である。（$2\times3^n=6^n$としてしまう生徒が多い！）

　累乗根の性質をいきなり紹介して、それを覚えさせて使わせるのではなく、生徒が既習事項との類比などで定理や性質を自ら予想し、それを証明してから使うことで、理解度が深まったように思う。

５．まとめと今後の課題

「生徒が予想し、考える活動を増やすことによって、生徒の知的好奇心や探究心を喚起して学習意欲を高め、生徒が主体的に数学に取り組み、自ら学び自ら考える活動ができるのではないか」という仮説を立て、それを検証するような授業実践をしてきたが、生徒の反応や小テスト等の結果から、次のような効果が得られたと考えることができる。

①予想させる活動によって、生徒は数学の有用性を感じ、単元に興味関心をもち、主体的に数学に取り組むようになった。

②予想させる活動によって、生徒は問題の解法や定義、定理の理解度や定着度を高め、学習意欲を高めることができた。

　今後は、さらに「予想させる活動を生かす教材」について研究を深め、その効果について検証していきたいと考える。

＜参考・引用文献＞

[1]相馬一彦(1995),『「予想」を取り入れた数学授業の改善』, 明治図書出版.

[2]松﨑由香里,太田敏之(2006),「予想させる活動を取り入れた授業の研究」,「平成 18 年度埼玉県高等学校数学研究会教育課程研究会全体発表会発表資料」.

[3]太田敏之(2004),「生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるための指導法の研究」,「平成 15 年度長期研修報告書」.

※授業で使える教材をホームページで紹介しています。

　アドレスは、http://www7b.biglobe.ne.jp/~math-tota　です。

　よかったら、見てみてください。

　（もし間違いや著作権等で問題になりそうなことがありましたら、教えてください。

　　また、ご意見、ご感想、「こんな教材もあるよ！」といった話題提供もよかったらお願いします。）