# 予想させる活動を取り入れた授業の研究

埼玉県立大宮武蔵野高等学校　松﨑 由香里
太田　敏之

＜要旨＞

中学校の授業研究も参考にし、自ら学び自ら考える授業として、生徒が予想し、その予想を考察、検証する形で展開する授業とその教材について考察する。また、生徒が予想しやすくするための効果的な発問についても考察する。

## １．研究の背景

数学は、ただ解き方を覚えて答えを導けばよいというものではない。数学を学ぶことで、論理的思考力や創造性を養うというねらいもある。学習指導要領においても、数学の目標として、「数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。」とある。そのような力を身につけるためには、生徒が自ら考え、自ら発見することができるような授業を展開する必要がある。

そこで本研究では、効果的な発問によって生徒に「予想」をさせ、それについて考察させたり検証させたりする授業に注目した。

新選国語辞典（小学館）では、「予想」という用語について、「前もって結果などを想像すること」と説明している。しかし、本研究では、「未習事項や未知なことを生徒が自ら考える中で発想したり、見つけ出したりすること」をすべて「予想」として捉えることとする。

相馬氏(1995)は、「予想」について次のように述べている。『「予想」が考えることの必要性を生み出し、それが学習意欲につながるのである。』『正しい予想ができたかどうかは大きな問題ではない。予想したということが、「自分の予想は正しいだろうか」「正解や理由を聞いてみよう」「考えてみよう」という気持ちにつながるのであろう。』（抜粋）

また氏は、「予想」の意義について、次の３点を強調している。

・学習意欲を高める。
・考え方の追求を促す。
・思考の幅を広げる。

以上のことから、生徒に「予想」させる活動を取り入れることで、生徒の知的好奇心や探究心を喚起して学習意欲を高め、数学的な見方や考え方を養い、理解を深めることができると考え、「予想させる活動を取り入れた授業」について研究をすすめることとする。

## ２．研究の目的

生徒が学習意欲を高め、数学的な見方や考え方を身につけて理解を深めることができるようにすることを目標とし、以下のような研究仮説を立てた。

①生徒が予想し、考える活動を増やすことによって、生徒が主体的に数学に取り組み、学習内容の定着率を上げ、理解を深めることができるのではないか。

②生徒の予想を促す「効果的な発問」によって、生徒が主体的に数学に取り組み、学習意欲を高めることができるのではないか。

本研究では、この仮説の検証とともに、授業実践する課題を設定しやすいように、予想させる内容の分類と、予想しやすいような効果的な発問の方法に焦点をあげて研究をしていくこととする。

## ３．研究の内容

### 3.1　予想の分類

生徒に予想させる内容について、授業実践を通じて、以下のように４つに分類した。

**Ａ．結果の予想**

応用問題など現実事象を題材とした課題の解答を、実際に問題解決する前に既習事項やこれまでの経験からあらかじめ予想するもの。

**Ｂ．解法の予想**

教科書等の未習事項の問題の解法を、既習事項をもとにして予想するもの。

**Ｃ．定義の予想**

新出の定義に関して、既習事項や、教師からの概念や歴史的背景に関する発問をもとに予想するもの。

**Ｄ．定理・性質の予想**

定理や性質などに関して、既習事項との類比や類推を用いて予想するもの。

以上の４つの分類をもとに、以下に予想させる課題内容の例と、そのねらい、学習効果について表にまとめた。

| 予想の種類 | 例 | ねらい | 学習効果 |
|---|---|---|---|
| A．結果の予想 | ・紙を 20 回折ったらどのくらいの厚さになるか？<br>・給料１ヶ月１万円から毎月２倍していったら、$n$年後にはいくらになるか？（指数関数、数列）<br>・宝くじの期待値はいくらになるか？（期待値） | ・驚きや感動を与える<br>・数学のおもしろさを感じさせる<br>・授業に参加させる | ・興味や関心がもてる |
| B．解法の予想 | ・P(α)=0 となるαをどう探すか？（因数定理）<br>・(３次方程式を習った後)４次方程式はどう解けるか？（高次方程式） | ・印象に残す<br>・数学的な見方や考え方を養う | ・学習内容の定着率アップ<br>・応用力が身につく |
| C．定義の予想 | ・$a^0$（$2^0$）の値は？<br>・$a^{-1}, a^{-2}$（$2^{-1}, 2^{-2}$）の値は？　（指数の拡張）<br>・$\sin\theta$の値は 180°を超えたらどうなるか？（三角比の拡張） | ・驚きを与える<br>・数学的な見方や考え方を養う<br>・強く印象づける<br>・自らイメージさせ、頭に残させる | ・学習内容の定着率アップ<br>・理解が深まる |
| D．定理・性質の予想 | ・$ax^2+bx+c=0$の解の種類は、何で決まるか？（判別式）<br>・整式$P(x)$を１次式で割った余りを簡単に求める方法はないか？(剰余の定理)<br>・$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}$はどう計算できるか？（累乗根の積）<br>・$y=x^2$のグラフに対し、$y=x^2+2$のグラフはどのようになるか？（2 次関数の平行移動） | ・数学的な見方や考え方を養う<br>・自己解決による達成感や自信を与える | ・学習内容の定着率アップ<br>・理解が深まる |

**A．結果の予想**

応用問題など現実事象を題材にした課題に関しては、結果を予想させてから問題を解かせると、問題のイメージを深めることができてよいと考える。また、結果が予想と大きく違って驚きや感動をともなう題材は、生徒の興味をひき学習意欲を高めると考えられ、積極的に取り入れていきたい題材であると考える。

**B．解法の予想**

単元に関する定義や定理、性質等を学習した後の例題に関して展開することができる。

教科書の例題等を黒板に書き、教科書を見ないでその解答を、生徒に発問しながら作成していく。「何を求めたらよいの？」「この文からどんな条件式ができる？」「次はどのように計算する？」「どう考えたらよいの？」と、解答の一行一行を生徒に発問し、間をとりながら進めることで、生徒は一行一行の展開を自ら考えて導いたり、その意味を理解しながら進めたりすることができると考える。

生徒に実際に当てていく展開でもよいが、生徒が自ら考えているようであれば、間をとった後、当てずに教師が黒板に書いていっても効果的であると考える。

**C．定義の予想**

定義を与えるときに展開することができる。

例えば、$2^0=1$ であるという定義に関して、「$2^0$ はいくつだと予想できますか？」とまず予想させて、その後、$2^3=8$→(÷2)→$2^2=4$→(÷2)→$2^1=2$→(÷2)→$2^0=?$という発問をしていくと、$2^0=1$ という予想をすることができるようになる。他にも $2^{-1}=\frac{1}{2}$、0!=1、内分点や外分点とはどの点か？などの例が考えられる。

**D．定理・性質の予想**

定理や性質などを導くときに展開することができる。

例えば、$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2\times3}=\sqrt[3]{6}$の計算は、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$の計算と比べると、どう計算できると予想できますか？」という発問をして予想させてから、証明するなどの展開が考えられる。

また、剰余の定理「P(α)=R のとき、P(α)をｘ－αで割ったときの余りは R である」から、「R=0 になったらどうなるの？」という発問から因数定理を予想させて、「P(α)=0 のとき、P(α)をｘ－αで割ったときに割り切れる」を導くなどの展開も考えられる。

## 3.2　効果的な発問

生徒の予想を促すためには、生徒が予想しやすいような効果的な発問が不可欠である。

ここでは効果的な発問の方法について考察する。効果的な発問とは、単に計算結果を尋ねる等の発問ではなく、生徒に思考をさせるような発問であると捉える。また、生徒が予想しやすいような発問をするためには、教師にも工夫が必要である。そこで、実際に授業を行った際の反省点などを踏まえ、予想しやすいような効果的な発問や発問方法について以下にまとめた。

**①　予想しやすい発問でなければならない**

できるだけ具体的で、答えが用意しやすいものがよい。

**② 予想したい発問でなければならない**

できるだけ興味をひくような課題を設定し、考えたくなる発問にする。答えがあっと驚くものであると効果が大きい。

**③ 適切な間を取らなければならない**

発問するにあたっては、すぐに当てずに適切な間を取り、生徒全員に予想させたり考えさせたりしてから指名または検証、解答するようにする。

**④ 段階的な補助発問を用意しなければならない**

補助発問によって、できるだけ全員が予想でき、考えて発見できるようにする。

## 4．授業実践例

実践校である本校は、生徒の卒業後の進路が大学短大進学約 40%、専門学校進学約 30%、就職他約 30%の割合の中堅校である。生徒の多くは比較的落ち着いて授業を受けている。以下に、予想させる活動を取り入れた授業実践例を表にしてまとめた。

| | 発問 | 生徒の予想 | 授業のまとめかた | 生徒の反応、改善点など |
|---|---|---|---|---|
| A．結果の予想の例 | 厚さ 0.1mm の紙を 20 回折ったらどのくらいの厚さになるか？<br>ア．人の背の高さ<br>イ．サッカーゴール<br>ウ．校舎<br>エ．ソニックシティ(136m)<br>（数Ⅱ指数関数） | ウ　17 人<br>イ　5 人<br>ア　2 人<br>エ　1 人<br>（25 人中）<br>「ソニックシティはありえない！」など。 | こたえ・・・エ<br>を発表し、計算結果を示す。<br>0.1mm×$2^{20}$ は約 105m<br>実際には 20 回折れないことを補足。<br>また、結果を知った生徒の「へー！すごい！」に対し、借金・ローンの話を加え、指数関数のすごさと恐ろしさを伝えた。 | ・生徒に電卓を持参させ、実際に計算させると、よりおもしろかったのではないか。<br>・105m はソニックシティ 136m に一番近いが、もっと身近で 105m に近い建物を設定したい。 |
| | 円錐型のワイングラスに水を半分まで入れたときの量は全体の何分の 1 の量か？（数Ⅰ図形と計量） | 予想は $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$ が多い。 | 相似な立体の体積比なので、<br>$1^3:2^3=1:8$ より全体の $\frac{1}{8}$ にしかならない。 | ・生徒は予想以上の量の少なさに驚いた。結果に驚きがあると興味をひきやすい。 |
| B．解法の予想 | $P(x)=x^3-3x^2-4x+12$ を因数分解する際、$P(\alpha)=0$ となる $\alpha$ をどのように探して解くとよいか？<br>（数Ⅱ高次方程式） | ① 勘・適当<br>② 小さい数から入れてみる<br>③ 12 の約数 | まず、因数分解をさせ、<br>$P(x)=x^3-3x^2-4x+12$<br>$=(x-2)(x+2)(x+3)$<br>という結果から、どこに注目したら見つけやすいかを考察し、気づいたことをノートに書かせ、12 の約数であることを発見させた。 | ・2 と 2 と 3 に黙って線を引くと、「あっ！」という声があがった。<br>・12 の約数であることを自ら発見できなかった生徒は、感動がなかったようだ。発問としては難しかったようである。 |
| C．定義の予想 | $a^1=a$<br>$\times a$<br>$a^2=a\times a$<br>$\times a$<br>$a^3=a\times a\times a$<br>では、$a^0$ はいくつか？<br>（数Ⅱ指数関数） | ① $a^0=0$<br>② $a^0=a$<br>「1」という答えはいなかった。 | $a^0=?$<br>$\div a$<br>$a^1=a$<br>$\div a$<br>$a^2=a\times a$<br>こうなるようにするには、$a^0$ がいくつだったら都合がいいか？を考えさせ、発見させる。 | ・具体的な数である $2^0$ で実践したクラスもあったが、こちらの方が生徒は予想しやすく、$2^0=1$ と予想できている生徒が多く、よかった。具体的な数の方が予想しやすくてよい。 |
| | $\sin\theta$ の値は 180° を超えたらどうなるか。<br>（数Ⅱ三角関数） | ① わからない<br>② マイナスがつく | わからない生徒に対し、すぐに答えを言わず、「水陸両用観覧車だと思おう。水中に入ったらどうなる？」という補助発問を行い、「マイナスがつく」ことをイメージさせて発見させる。 | ・十分気づくことができる生徒もいたが、「わからない」という生徒も多く、イメージしやすい概念モデルの利用や補助発問の必要がある。 |
| D．定理・性質の予想 | $ax^2+bx+c=0$ の解の種類は、何(どこ)で決まるか？ノートに書いてみよう！<br>（数Ⅱ２次方程式） | ① √の中<br>② √の中の符号<br>③ $b^2-4ac$ が＋か－か、０か…など。 | 書かせて授業を終え、ノートを回収し、次回よい答えを紹介し、判別式Ｄについてまとめた。 | ・一人ずつ書かせたのは効果があった。<br>・①や②はなぜ不十分なのかを指摘し、また√の中であることを強調する。 |
| | $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}$ はどう計算できると思うか？<br>（数Ⅱ累乗根） | ① 計算できない<br>② $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2\times3}$<br>$=\sqrt[3]{6}$ | 間を取って全体に考えさせてから、指名して答えてもらった。予想させた後、証明した。 | ・$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$ と類比させるとすぐに予想することができた。 |

## ５．生徒のアンケートの考察

予想させる活動を取り入れた授業を行い、アンケートを実施したところ、次のような生徒の回答が得られた。

Q．「予想を取り入れた授業（現在の授業スタイル）」と「はじめから教員が何でも教えてしまう授業」のどちらがよいか？（８３人中）

| | |
|---|---|
| A．「予想を取り入れた授業がよい」　･･･６９人<br>（理由）<br>・　印象に残るから、覚えられる<br>・　自ら考えて納得できるから<br>・　おもしろいから、楽しいから<br>・　自分で頭を使わないと意味がないから<br>・　自分が主役のような感じだから、がんばれる<br>・　わかったとき、とてもうれしいから | B．「はじめから教員が何でも教えてしまう授業がよい」　･･･　１０人<br>（理由）<br>・　簡単・楽そうだから<br>・　あまり考えたくないから<br>・　考えるより、やり方を早く教えてほしいから<br>・　時間短縮<br><br>C．「どちらでもよい」　･･･３人　　（無回答１人） |

以上のアンケートにより、大部分の生徒がAと答え、「予想したほうが単に解き方を教えられるよりも理解でき、覚えられる」と実感していることがわかった。また同時に多くの生徒が、「考える力を身につけたい」と思っていることもわかった。この授業形態は、生徒とのやり取りが多く進度はどうしても遅くなってしまうが、生徒の期待に応えられている部分も大きく生徒が何らかの達成感や満足感を感じてくれているようである。

一方、Bと答えた生徒は、結果だけを求めるタイプや、学力的に苦しいタイプの生徒であった。数学が得意であるのに考えることが好きではないという生徒に対しては、今後「自ら考えることの大切さ」を伝えていきたい。

また、「難しい問題など、問題によっては、はじめから教えてほしい」という声もあった。自分の答えが用意できないような発問では、生徒はむしろ困惑し、苦手意識をもってしまう。問題や発問の仕方については、十分に吟味し、工夫しなければならない。教師側にとっても簡単ではないが、問題が解けることだけを目標にするのではなく、それに加えてもっと生徒が興味をもてるような驚きや発見ができる授業を目指し、今後も『予想させる活動を取り入れた授業』を続けていきたいと考える。

## ６．まとめと今後の課題

本研究により、予想させる活動を効果的に授業に取り入れることで、生徒に興味・関心を持たせることができ、また強く印象に残すことができれば、学習内容の定着化も図れることがわかった。さらに、生徒たちは自ら考え、自ら発見することができる授業に充実感を感じており、単に教えられるよりそのほうが自らのためになると実感していることがわかった。また、生徒が「自分で予想したり、考えて答えをみつけたりしたい」という気持ちにさせる発問をするためには、次の３点が重要であると考える。

**①　生徒が予想しやすい発問であること**

「発問が具体的である」、「概念モデル等を利用してイメージしやすくする」、「補助発問等により、既習事項と類比させたり、類推させたりする」ことなどが大切である。

**②　予想したくなる発問であること**

「現実事象に関連している（結果に驚きがあるとなおよい）」、「数学的にきれい、おもしろい」ことなどが大切である。

**③　予想しやすい環境であること**

「発問のタイミング」、「考えるために適切な間をとる」、「授業の雰囲気」などが大切である。

今後の課題としては、「予想させる活動を取り入れた授業形態」を望んでいない生徒に対し、「自ら考えることの大切さ」を伝えていくことや、アンケートで「予想することができなかった」と答えた生徒が、予想できるようにすることである。今後も深い教材研究やつまずき場面の把握、よりよい発問のしかたなど、日々の授業において努力していきたい。そして、生徒が「わくわくする」、「おもしろい」という気持ちになれるような授業をめざし、今後も「予想させる活動」を取り入れることによって、生徒の考える活動を支援していきたい。

**<参考・引用文献>**

[1]相馬一彦(1995),『「予想」を取り入れた数学授業の改善』, 明治図書出版.

[2]相馬一彦(1997),『数学科「問題解決の授業』, 明治図書出版.

[3]大竹宏二(1995),「「証明と論駁」に基づく数学教育の理論と実践」,「平成 6 年度高等学校数学研究会教育課程研究会全体発表会発表資料」.

[4]太田敏之(2004),「生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるための指導法の研究」,「平成 15 年度長期研修報告書」.