

数学的モデリングを取り入れた授業実践 －黄金比とシルバー比－

埼玉県立大宮武蔵野高等学校 太田 敏之

＜要旨＞

筆者は、生徒が数学に興味をもち学習意欲を高め、主体的に学ぶ力を育むための指導法のひとつとして、数学的モデリングを取り入れた指導法を研究しているが、本論では、その教材例の中から、「黄金比とシルバー比」を題材にした教材の提案とその授業実践を報告する。

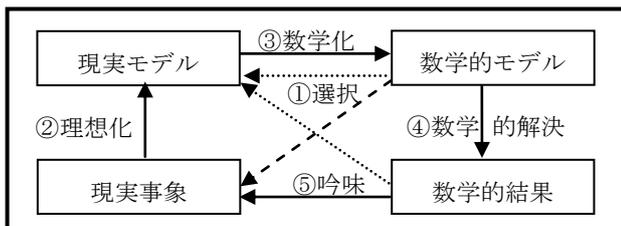
1. はじめに

筆者は昨年度から、「現実事象を分析して数理的に考察していく数学的モデリングを取り入れた学習は、生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるだけでなく、主体的に学ぶ力を育むことができる。」と考え、その教材例を研究してきた。ここではその教材例の中から「黄金比とシルバー比」を題材にした教材の提案と、その教材の授業実践を報告する。

2. 本論における数学的モデリング

筆者は、高等学校における数学的モデリングを取り入れた授業を、「現実事象を扱うことで生徒が数学に興味をもち、学習意欲を高め、高等学校数学の各単元の中に実生活への有用性を感じ、その内容の理解を深める授業」と考える。そこで数学的モデリングの過程を、以下のように、次の5つの過程と考える。

- ① 授業者または生徒がその単元を理解するような現実事象または現実モデルを選択する。
- ② 現実事象を分析し、理想化して現実モデルを作成する。
- ③ 現実モデルを数学的内容に数学化して数学的モデルを作成する。
- ④ 数学的モデルを単元内容に沿って数学的解決をし、数学的結果を得る。
- ⑤ 数学的結果を現実事象または現実モデルに適用し吟味する。



3. 数学的モデリングを取り入れた教材

数学的モデリングを取り入れた教材の中から、

ここでは「黄金比とシルバー比」を題材にした教材を提案する。

生徒が身のまわりから形が決まっている長方形を探してきて、その長方形の縦と横の長さの比について考察する。黄金比やシルバー比 ($1 : \sqrt{2}$) について説明し、2次方程式を利用して比を求め、探してきた長方形を分類する。

(1) シルバー比

長方形	短い辺の長さ	長い辺の長さ	比
教科書	14.8	21.0	1:1.42
ノート	17.8	25.2	1:1.42
文庫本	10.5	15.0	1:1.43
A3	29.7	42.0	1:1.41
A4	21.0	29.7	1:1.41
B4	25.7	36.4	1:1.41
B5	18.3	25.7	1:1.41

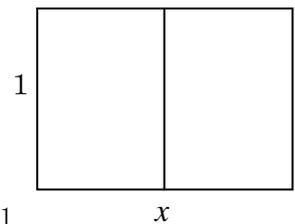
$$1 : x = \frac{x}{2} : 1 \text{より、}$$

$$\frac{x}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x > 0 \text{より } x = \sqrt{2} \approx 1.41$$



(2) 黄金比

長方形	短い辺の長さ	長い辺の長さ	比
名刺	5.5	9.1	1:1.65
スイカ	5.4	8.7	1:1.61
新書本	10.5	17.1	1:1.63

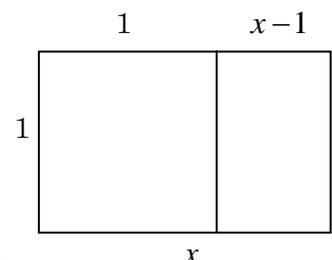
$$1 : x = x - 1 : 1 \text{より、}$$

$$x(x-1) = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x > 0 \text{より}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.62$$



4. 授業実践における学習指導案

(1) 単元名 2次方程式の応用

(2) 指導計画

2章 方程式と不等式 (13時間)

1節 1次不等式 (5時間)

2節 2次方程式

1 2次方程式の解法 2時間

2 解の公式 2時間

3 2次方程式の実数解の個数 2時間

4 2次方程式の応用 2時間

(本時 2/2)

(3) 本時のねらい

①身のまわりの長方形に興味・関心をもち、主体的に実験に取り組むことができ、2次方程式の有用性を感じることができるようにする。

(関心・意欲・態度)

②身のまわりの長方形の縦と横の長さの比を分類し、相似比や2次方程式を用いて考察できるようにする。(数学的な見方・考え方)

③xに範囲がある2次方程式の応用問題を解くことができるようにする。(表現・処理)

④2次方程式の解法やxの範囲について理解できるようにする。(知識・理解)

(4) 学習展開

4. 課題2	
1) 古代から伝わる最も美しい長方形に見られる、黄金比について説明する。	パルテノン宮殿、ミロのビーナスなどの話をする。
2) 長方形から正方形を切り取って残った長方形が元の長方形と相似である黄金比の性質について説明し、その比を2次方程式を利用して求めさせる。	課題1を参考にし、自分で式を立てさせて、比を計算させる。 黄金比が生物の成長や人間の感覚(株式)、正五角形の対角線などに見られることなどの話をする。
3) 黄金比についてまとめる。	

4. 生徒の感想

大宮武蔵野高校の1学年4クラス(1クラス約23人)で授業を行った。大宮武蔵野高校1学年は7クラス募集280人定員のところをホームルーム8クラス展開で行い、1クラス36人程度で授業展開を行っている。数学においては、それをさらに2クラス3展開にした少人数授業を実施し、1クラス23人程度での授業展開を行っている。生徒の学力の幅は大きく、数学的思考力にすぐれている生徒から、基礎計算がおぼつかない生徒までいる。授業実施直後の生徒の感想を載せる。

(1) 現実事象を数理的に分析したことについて

- ・ おもしろかった。黄金比が様々な分野で利用されていて、まさか株式にも使われているとは思わなかった。新書本は黄金比にして、売り上げを少しでも伸ばしたいんだと思う。
- ・ 紙のサイズがぜんぜんちがっても辺の比はすべて同じということがわかった。
- ・ 長さが全然違っても、辺の比が同じなのに驚いた!!!なんでそうなるのか不思議に思ったけど、いろいろなことがわかったからよかったです。楽しかったあ。
- ・ きちんと数字が決まっていますごくと思った。紙が無駄にならないので頭いいなと思った。
- ・ B4のサイズとかがちゃんと考えられてたんだなあーって思った。
- ・ ノートにきまりがあるなんてびっくりした。

(2) 現実事象と数学とのつながりについて

- ・ 方程式は実用性がないものだと思っていたが、たくさん使われていることを知り驚いた。
- ・ 数学は、たし、ひき、かけ、わりが出来ればいいと思っていたけど、すごい身近にかんじ

学習活動	指導上の留意点
1. 導入 前の授業で、身のまわりにある形が決まっている長方形を探してくるようにしておく。	名刺、スイカ(JR)など、身のまわりの長方形の例をあげておく。
2. 実験 1) 用意してきた長方形の辺の長さを定規で測らせて、その辺の比を求めさせる。 2) 測定結果を発表させる。	教科書とノートは共通題材として測るように指示する。 測定結果の誤差が大きい場合には、他の人の意見も聞き多数のものを採用する。
3. 課題1 紙を半分に折っても形が変わらない(相似)であるというシルバー比の原理について説明し、その比について求めさせる。	立式については、考えさせながら黒板に書いていく。 xの範囲が正であることについて注意させる。

て、見なおしたっ！

- ・ おもしろい形がいろいろきけてすごい楽しかった。今日の実験をして、どんな所で黄金比がつかわれているのか、もっといろいろ知りたいと思った。生物の成長や人間の感覚までに黄金比があるなんてすごいふしぎだ！
- ・ 黄金比はすごいなあと思いました。昔からある形なのに、人に親しまれているのはすごいと思います。
- ・ 黄金比は自分のまわりにたくさんあることにびっくりした。
- ・ 昔から黄金比が使われていたことにびっくりした。
- ・ 身のまわりには決まった比があるなんて知らなかった。けっこうためになる授業だったと思う。
- ・ シルバー比、黄金比ということを知ったけど、自分の周りにもたくさんのシルバー比、黄金比があることに驚いた。不思議な比だと思った。

(3) 数学的面白さについて

- ・ 名刺の実験がおもしろかった。何回おっても同じ長方形ができてびっくり。黄金比ってすごいと思った。
- ・ 名刺を切っても同じ形になるなんてびっくりした。紙にも不思議な性質があって楽しかった。
- ・ シルバー比は、半分にしても大きさが変わっているだけで、形は変わらないなんてびっくりした。黄金比は、正方形をどんどん切っていくと、同じ形ができるなんてすごい。
- ・ 長さはちがっても、辺の比は同じでおもしろいなあと思った。

(4) 関心・意欲・態度の向上について

- ・ 他の長方形も調べてみようと思った。
- ・ 黄金比についてもっと知りたいと思った。またやりたいです。
- ・ 長方形は不思議だなーと思いました。実験的な事が好きなので、楽しかったです。またおもしろい実験をやりたいです！
- ・ 黄金比が色々な物に使われているという事が分かって、1つ知識が増えて良かった。またこういう授業がしたい。
- ・ 黄金比がいろいろなところにあっておどろいた。すごく興味があって楽しかった。
- ・ 自分が測ったものの比がバラバラであせった。

よくわからなかった。でも確かに比がやっぱり同じだった！！けっこう楽しかった。

- ・ 楽しい実験だった。すごい、黄金比とシルバー比！

5. 考察と今後の課題

筆者は、2次方程式の応用の単元において、教科書の例だけでは、その有用性を感じづらく、興味をもちづらいつと考へた。そこで、数学的モデリングの指導法を用い、身のまわりの長方形を2次方程式を用いて分析する授業を行った。

つまり、「2次方程式を利用して分析できる黄金比とシルバー比の題材を用い、生徒が身のまわりから探してきた長方形のものを題材にし(①選択)、それを正確な長方形に近似して(②理想化)、長方形の図形とし(③数学化)、辺の長さを測って、短い方の辺の長さとし(④数学的解決)、それを実験結果と照らし合わせて吟味する。(⑤吟味)」といった数学的モデリングの過程に基づく授業を展開した。

筆者は、生徒の感想や授業中の反応を分析し、この授業によって以下の4つの効果が得られたと考へた。

- ① 生徒が、身のまわりと数学とのつながりを感じるによって、数学に興味・関心をもつことができた。
- ② 生徒が、身のまわりの長方形を2次方程式で分析することで、2次方程式の有用性を感得することができた。
- ③ 生徒が、身のまわりの長方形を数学化して数学的に見て考へることによって、数学的な見方、考へ方を培うことができた。
- ④ 生徒が、2次方程式の応用問題を、学習意欲を高めながら解くことができた。

今後は、このような授業を継続的に実施することによって、さらに生徒の学習意欲を高めることができるかどうかについて考へていきたい。

6. 引用・参考文献

- [1] 太田敏之(2004), 「生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるための指導法の研究」, 「平成15年度長期研修報告書」.
- [2] 数研出版 編(2003), 『楽しく学ぶ数学基礎』, 高校数学基礎教科書, 数研出版.