小・中学校との関連を意識した２次関数の授業

埼玉県立大宮武蔵野高等学校　太田　敏之

＜要旨＞

学力低下問題を改善するためには、小・中・高等学校の教材の関連を教師が把握し、ていねいに指導していくことが必要であると考える。そこで本論では、2 次関数の単元を例にして、系統図を作成し、小・中学校での既習内容との関連を意識し、生徒のつまずきを補うような指導法を提案する。

１．研究動機

近年、数学の学力低下が叫ばれている。

国立教育政策研究所が 2002 年 11 月に高校 3 年生を対象に実施した「平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査」によると、数学Ｉの正答率は文部科学省が設定した予想平均点を 11 点も下回る結果となった。また、2002 年 1 月から 2 月にかけて実施した小・中学生の学力調査においても、1994 年から 3 ヵ年かけて行われたものと同一問題における算数・数学の正答率は、前回に比べて下回った結果がでている。これらの結果からも、数学の学力低下が起こっているのではないかと推測することができる。

筆者は、このような学力低下問題を改善するためには、小・中・高等学校の教材の関連を教師が把握し、ていねいに指導していくことが必要であると考える。また生徒自身も、高等学校の内容が、小・中学校のどの教材と関連し、どの教材を発展した内容なのかを把握することが必要であると考える。

そこで本論では、小・中・高等学校の教材の関連性を考察するとともに、高等学校数学Ｉの 2 次関数の単元において、小・中学校との関連を意識した授業について考察する。

２．研究方法

数学は他の教科に比べて系統性の強い教科であると思う。そのため、ある単元につまずくとそれに関連する次の内容を理解することは容易ではないと考える。しかし、戦後の学習指導要領の変遷を見ると、学習指導要領は 1970 年に改訂された「現代化」と呼ばれる学習指導要領をピークに、ゆとり教育や週 5 日制による授業時数の削減、教育内容の多様化などを理由に、系統性が薄れてきていると思う。よって、各単元の内容や概念が、それ以前の学習内容や概念とどのように関連しているのかを明らかにした系統図を作成し、それを基に教師が系統性をふまえた授業を行う必要があると考える。また、その系統図から生徒のつまずき場面を明らかにし、それを補う説明を行う必要があると考える。さらに、生徒に既習内容との関連を意識させ、振り返らせることで、学習内容の理解を支援し、自ら学ぶ意欲を促すことができると考える。また、系統図に、今後の学習内容への関連を示し、それを生徒に提示することで、今後この内容がどのように発展していくかを伝えることができ、生徒の発展的に考える力を促し、学習意欲を高めることができると考える。

以上のことから、本論では、2 次関数の単元を例にして、系統図を作成し、小・中学校での既習内容との関連を意識し、生徒のつまずきを補い、発展的に考える力を培うような指導法を提案する。

３．概念マップの作成

本論では、町田氏(2003b)の考えを基に、作成する系統図を、単元だけではなくその内容にある概念の結びつきもとらえて作成することとし、それを「概念マップ」と表現することにする。

ここでは、2 次関数の中の、「制限された定義域での最大・最小」の授業を展開するために作成した概念マップを紹介する。

ここで扱うのは次のような問題である。

2 次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

このような問題を解くために最低限必要な概念として、以下の 5 つの部分に分けて、概念マップを作成した。

① 平方完成
② グラフの完成
③ 変域（定義域・値域）
④ 代入計算（最大値・最小値を求める）
⑤ グラフの特徴（増加と減少）

①の平方完成の概念は、$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ の因数分解(中 3)、分配法則(中 1)、2 次方程式の平方根による解法(中 3)、共通因数でくくる(中 3)、最大公約数(小 6)、累乗計算(中１)、かっこを含む計算のじゅんじょ(小 4)といった概念に関連する。

②のグラフの完成の概念は、1 次関数のグラフ(中 2)、比例のグラフ(小 6)、折れ線グラフ(小 4)といった概念に関連する。

③の変域の概念は、ｘの変域とｙの変域(中 3)、変域と不等号(中 1)、数直線(小 4)といった概念に関連する。

④の代入計算の概念は、$y=ax^2$ のグラフの表作成の代入計算(中 3)、文字と式(中 1)、体積や面積の公式(小 6)、比例する 2 つの量(小 6)、累乗計算(中 1)、かっこを含む計算のじゅんじょ(小 4)といった概念に関連する。

⑤のグラフの特徴の概念は、$y=ax^2$ のグラフ(中 3)、1 次関数のグラフ(中 2)、比例のグラフ(中 1)、折れ線グラフ(小 4)といった概念に関連する。

また発展としては、数学Ⅱや数学Ⅲの微分・積分の概念に関連してくる。

このことから作成した概念マップは 4 ページの通りである。

このように作成した概念マップを利用することによって、教師が系統性をふまえることができ、生徒のつまずき場面を明らかにし、それを補う授業や、発展を意識した授業を展開することができると考える。

４．既習内容との関連

ここでは、作成した概念マップを参考にし、既習内容との関連を意識した授業展開例について以下の 3 つの例を提案する。

(1)2 次関数の制限された定義域での最大・最小

３．で例示した問題において、普通の指導法で授業をした場合、授業後の定期テストにおいても多くの生徒は、グラフを書かずに、定義域の両端だけを計算して、「$x=-1$ のときが最大値 6」、「$x=3$ のときが最小値-2」と解答していることが多かった。

よって、このつまずきを補うために、この題材を、1 次関数の変域との関連を意識して、次のステップで指導することを提案する。

①中学 2 年で学習する「$y=2x+3(-1\leqq x\leqq 3)$ の最大値・最小値を求めよ。また、そのときのｘの値を求めよ。」(中学 2 年では「ｙの変域を求めよ。」という形で登場する。）という問題を解かせる。ほとんどの生徒は、グラフは書かず、定義域の両端である $x=-1$ のときの値と $x=3$ のときの値だけを計算して解答している。

②３．で例示した「$y=x^2-4x+1$ $(-1\leqq x\leqq 3)$ の最大値・最小値を求めよ。また、そのときのｘの値を求めよ。」という問題に変えて、生徒に考えさせる。ほとんどの生徒はこの時点では、1 次関数の問題の解法から類推し、定義域の両端の値だけを代入し、「$x=-1$ のときが最大値 6」、「$x=3$ のときが最小値-2」と解答する。

③上記の解答が間違いであることを示し、生徒にその理由と正答を考えさせる。そして、1 次関数の問題と内容を比較し、2 次関数で定義域に頂点を含む場合は、グラフの形から、1 次関数の問題のように定義域の両端がそれぞれ最大値と最小値にはならず、頂点が最大値か最小値になることに気づかせる。

以上のような展開から、生徒は 1 次関数の問題と比較することでその関連を意識し、さらに生徒に誤答を強く印象づけることで生徒はつまずき場面を意識し、それを乗り越えることで次は正しく解答できるようになると考える。

(2)2 次関数のグラフの平行移動

2 次関数のグラフの授業展開において、$y=2x^2$ から $y=2x^2+4$、$y=2(x-3)^2$ のグラフを考えていく流れが一般的であるが、どうしてそのような式のグラフを考えるかは、生徒にとってわかりづらく、生徒は受動的にグラフに取り組むのではないかと考える。よってここでは、この題材を、1 次関数のグラフとの関連を意識して、次のステップで指導することを提案する。

①中学 2 年で学習する「$y=2x+4$ のグラフが、$y=2x$ のグラフをｙ軸の方向に 4 だけ平行移動している」という内容から、$y=2x^2+4$ のグラフが、$y=2x^2$ のグラフをｙ軸の方向に 4 だけ平行移動することを予想させ、実際にグラフを書いて検証させる。

②$y=2x-4$を、$y+4=2x$と見ることができることを説明した後、$y=2x-4$を $y=2(x-2)$と見ることもできることから、$y=2x-4$ のグラフが、$y=2x$のグラフを y 軸の方向に-4 だけ平行移動しているだけではなく、x 軸の方向に 2 だけ平行移動しているとも捉え、このことから、$y=2(x-3)^2$のグラフが、$y=2x^2$のグラフを x 軸の方向に 3 だけ平行移動することを予想させ、実際にグラフを書いて検証させる。

③$y=2(x-3)^2+4$のグラフがどのような形になるかを考察させる。

以上のような展開から、生徒は、グラフを予想してから書くことでグラフを書く意欲が高まり、1 次関数のグラフの平行移動との関連を意識し、平行移動の理解を深めることができると考える。さらに、既習内容である反比例のグラフ、$y=\frac{1}{x}$から、$y-4=\frac{1}{x-3}$のグラフを考察させる発展を取り入れることで、数学Ⅱでの三角関数、指数・対数関数の平行移動の概念へと関連させることができると考える。

(3)2 次関数の決定（3 点を通る放物線）

2 次関数の決定問題については､2 次関数の問題単独で解法を捉えるのではなく、関数の決定問題のパターンとして広く捉えた方がよいと考える。よって、この題材を、1 次関数の決定問題との関連を意識して、次のステップで指導することを提案する。

①中学 2 年で学習する 2 点を通る直線の式を求める問題を、傾きを求める解法でなく、直線を$y=ax+b$とおいて、2 点を代入し、連立方程式を利用する解法で解答させる。

②直線を決定する条件のひとつが、「通る 2 点が決まる」であることを述べ、放物線は、通る 2 点がわかったら決まるかについて、グラフを書いて考えさせ、決まらないことを確かめさせる。求める変数の数について説明し、放物線が決定する条件のひとつは、「通る 3 点が決まる」であることを説明する。

③3 点を通る放物線の式を求める問題へと変える。直線の式を求める問題の解法から類推させて、放物線を$y=ax^2+bx+c$とおいて、3 点を代入し、連立方程式を解く解法を自ら導かせる。直線の式を求める問題と解法を比較しながら、求める定数の数が 2 つから 3 つへと変わったために必要な条件の数（通る点の数）も変わったが、解法は類似していることを理解させる。

以上のような展開から、生徒は 1 次関数の決定問題との関連を意識し、自ら解法を導くことができ、理解を深めることができると考える。また、既習内容のつまずきを補いながら、問題が解けるようになると考える。

５．まとめと今後の課題

高等学校の学習内容を教えるにあたって、作成した概念マップを基にし、既習内容である小・中学校の単元との関連をふまえて、内容を比較したり、拡張したりして、既習内容との関連を意識させ、生徒のつまずきを補うような授業をしていくことで、生徒の理解を促進できると考え､以上のような指導内容で授業を行った。授業後に行った小テストや定期テストなどの結果によると、このような授業によって、生徒の理解が深まり、つまずきを減らすことができたのではないかと考える。

今後は、以上のような授業展開の成果についての詳しい分析を行うとともに、2 次関数以外の単元においても概念マップを作成し、それに基づいて小・中学校での既習内容との関連を意識した授業を行って、その成果を分析していきたいと考える。

参考・引用文献

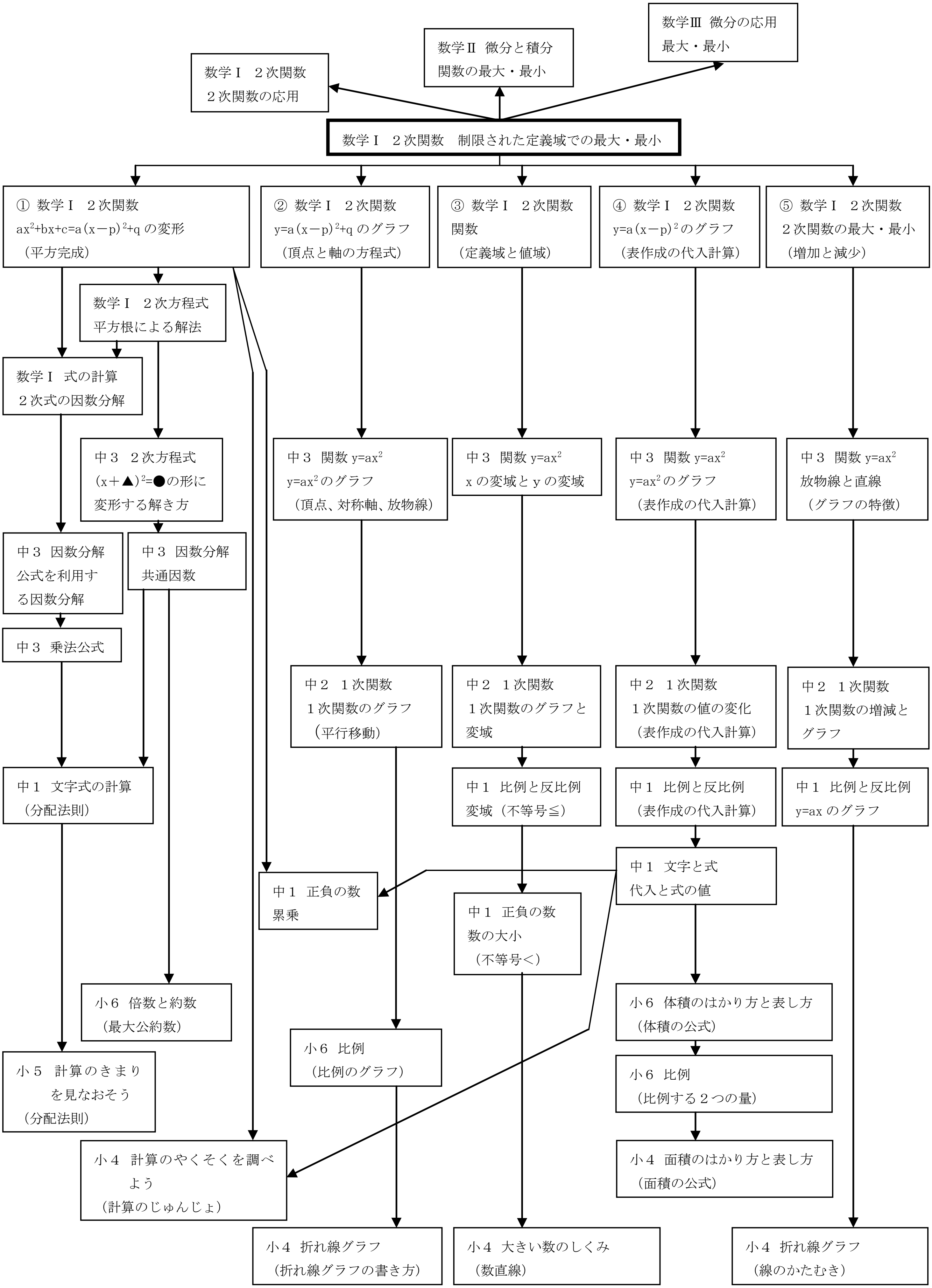
[1]町田彰一郎(2003a),「情報通信社会における数学教育の課題とその解決の方向に向けた提案(2)」,「数学教育学会夏季研究会発表論文集」.

[2]町田彰一郎(2003b), 埼玉大学教育学部数学教育学特論Ａ.

[3]中里孝(2004),「生徒が興味をもち自ら学ぶ力を育てる数学科指導法の研究」,「平成 15 年度長期研修報告書」.

[4]太田敏之(2004),「生徒が数学に興味をもち学習意欲を高めるための指導法の研究」,「平成 15 年度長期研修報告書」.

[5]市川京ほか平成 15 年度小中高の系統的指導法開発実践講座算数・数学研究委員(2003),「平成 15 年度小中高の系統的指導法開発実践講座算数・数学報告書」.


数学Ⅲ 微分の応用
最大・最小
数学Ⅱ 微分と積分
関数の最大・最小
数学Ⅰ ２次関数
２次関数の応用
数学Ⅰ ２次関数 制限された定義域での最大・最小
① 数学Ⅰ ２次関数
$ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ の変形
（平方完成）
② 数学Ⅰ ２次関数
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ
（頂点と軸の方程式）
③ 数学Ⅰ ２次関数
関数
（定義域と値域）
④ 数学Ⅰ ２次関数
$y=a(x-p)^2$ のグラフ
（表作成の代入計算）
⑤ 数学Ⅰ ２次関数
２次関数の最大・最小
（増加と減少）
数学Ⅰ ２次方程式
平方根による解法
数学Ⅰ 式の計算
２次式の因数分解
中３ ２次方程式
$(x+▲)^2=●$ の形に
変形する解き方
中３ 関数 $y=ax^2$
$y=ax^2$ のグラフ
（頂点、対称軸、放物線）
中３ 関数 $y=ax^2$
x の変域と y の変域
中３ 関数 $y=ax^2$
$y=ax^2$ のグラフ
（表作成の代入計算）
中３ 関数 $y=ax^2$
放物線と直線
（グラフの特徴）
中３ 因数分解
公式を利用する因数分解
中３ 因数分解
共通因数
中３ 乗法公式
中２ １次関数
１次関数のグラフ
（平行移動）
中２ １次関数
１次関数のグラフと変域
中２ １次関数
１次関数の値の変化
（表作成の代入計算）
中２ １次関数
１次関数の増減とグラフ
中１ 文字式の計算
（分配法則）
中１ 比例と反比例
変域（不等号≦）
中１ 比例と反比例
（表作成の代入計算）
中１ 比例と反比例
y=ax のグラフ
中１ 文字と式
代入と式の値
中１ 正負の数
累乗
中１ 正負の数
数の大小
（不等号＜）
小６ 倍数と約数
（最大公約数）
小６ 体積のはかり方と表し方
（体積の公式）
小６ 比例
（比例のグラフ）
小６ 比例
（比例する２つの量）
小５ 計算のきまりを見なおそう
（分配法則）
小４ 計算のやくそくを調べよう
（計算のじゅんじょ）
小４ 面積のはかり方と表し方
（面積の公式）
小４ 折れ線グラフ
（折れ線グラフの書き方）
小４ 大きい数のしくみ
（数直線）
小４ 折れ線グラフ
（線のかたむき）