

対数プランの授業実践

浦和西高等学校 太田 敏之

《要旨》

対数などの新しい記号は、それだけで生徒に抵抗感をもたらし、記号負けしてしまう生徒も多いようである。また対数特有の性質も、指数法則からの証明だけでは生徒に理解されにくいようである。これらの解決策として「対数プラン」という授業法があるので、これを授業実践して紹介してみることにする。

1. はじめに

1999年8月に全国算数・数学教育研究秋田大会に参加した。そのとき、北海道の新川高等学校の清水貞人先生の「指数現象を見るメガネとしての対数の指導を実践して」という研究発表を拝見した。この指導法(以下「対数プラン」とする)は、以前氏家英夫先生の論文で拝見し、私も2年前に浦和西高等学校で一部実践させてもらったことがあるのだが、このたび清水先生の発表を聞き、また清水先生にお会いして話をしたところ、「ぜひこの指導法を実践して、その実践報告をして、各地にひろめたり、意見を聞いてほしい」とのことだったので、今回再び浦和西高等学校で実践をして、その結果を実践報告としてまとめて発表しようと思い、今回の発表となった。これはその報告集である。

2. 対数プランについて

①目的

この授業プランの目的は、以下の3つの問題点の解決にある。

- 1) 対数の導入段階において、多くの生徒が記号負けしてしまう。
- 2) 対数の性質・底の変換公式が指数法則から導かれるため、これらが対数の特有の性質であることが生徒に理解されにくい。
- 3) 対数を学ぶ意味や必要性を生徒に十分に伝えることができていない。

②授業内容

- 1) 対数を「指数現象を見るための便利なメガネ」として導入する。
- 2) 真数-対数の対応表(対数表)をもとに、乗法が加法にうつるという対数の最も本質的な性質を指導し、そこから対数の性質の公式に到達する。

- 3) 対数表どうしが比例していることから、底の変換を意味付け、そこから底の変換公式に到達する。
- 4) 片対数グラフの指数現象で見るうえでの有効性を指導する。

3. 授業実践

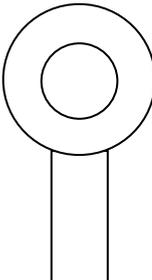
1999年9月に埼玉県立浦和西高等学校2学年で実施した授業実践を紹介する。

浦和西高等学校は、1学年約400名の男女共学校である。浦和市の北東に位置し、学校の裏には見沼たんぼが広がる緑豊かで雄大な環境の中、生徒たちは自由な校風のもとでのびのびと勉強に励んでいる。大学への進学希望率は約99%と高いが、2学年のうちはまだ学習に対し緊迫した雰囲気はなく、のんびりとしている印象を受ける。

2学年では数学IIとBを合わせて5単位でおこなっている。今回は2学年3クラスでおこなった授業についての実践を紹介していこうと思う。

① 1時間目 \log のメガネ

対数を指数関数の逆関数として導入するのは、生徒は新しい記号が出てくるためにとっても難しいことをするように思ってしまう。そこで、厚紙で作ったメガネを使って、まず対数の意味を考えさせた。



\log_2 のメガネで、

- 3 2 を見ると 5 に見える。
- 8 を見ると 3 に見える。
- 1 6 を見ると?
- 6 4 を見ると?
- 2 を見ると?
- 1 を見ると?

- ・このメガネの働きは？
(2の何乗になっているかを調べる)
- ・ \log_a のメガネの働きは？

その後、 $\log_2 32 = ?$ などの問題演習をし、最後に指数関数の逆関数という定義を与えた。

② 2時間目 対数表・対数公式

対数表を用いると数のかけ算・わり算が対数のたし算・ひき算で計算できることを示した。また次のような話をした。「対数を発見したのは、イギリスの貴族ネーピアとスイスの学者ヒュルギであった。対数はかけ算とわり算を、計算のやさしいたし算とひき算に直すので、計算がとても楽になる。とくにこの発明は桁が大きく複雑な計算をやる天文学者にありがたがられた。当時の天文学者ケプラーは『対数のおかげで天文学者の寿命は2倍になった。』とって喜んだ。計算の苦労が半減したという意味である。

またその後、指数法則からの証明だけではイメージしにくい対数の性質(対数公式)を、この対数表からの計算から成り立ちそうなことをイメージさせてから、指数法則からの証明をして理解させた。

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

かけ算 $8 \times 16 = 128$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow$
 たし算 $3 + 4 = 7$
 \downarrow log を使って表すと
 $\log_2 8 + \log_2 16 = \log_2 128$
 $= \log_2 (8 \times 16)$
 \downarrow 一般化すると
 $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

ひき算→わり算も同様…

まず、かけ算をたし算、ひき算をわり算に直して計算すると楽なことを体験させ、その後対数公式まで一般化させて、最後に指数法則からの証明を行った。その後公式を使った計算演習を行った。

③ 3時間目 底の変換公式

\log_2 のメガネと \log_8 のメガネで見た対数表を比べて、底の変換公式を導き出した。

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$\log_8 x$	-1		0		1		2		3		4		5

まず、それぞれの x に対する $\log_2 x$ 、 $\log_8 x$ の

値から $\log_8 x = \frac{1}{3} \log_2 x$ の関係を見つけさせ、 $\frac{1}{3}$ の3はいったいどこから計算できるのかを2つの底8と2から推測させる。

そこから、 $\log_8 x = \frac{\log_2 x}{3} = \frac{\log_2 x}{\log_2 8}$ の関係が

成り立ちそうなことをイメージさせてから、指数法則からの証明を示してやる。その後計算練習を行った。

④ 4時間目～8時間目

ここは対数プランから離れて、教科書等や独自の話題等を使って進めた。

- 4時間目 対数のグラフ
- 5時間目 対数方程式
- 6時間目 対数不等式
- 7時間目 常用対数
- 8時間目 桁数・複利計算

⑤ 9時間目 片対数グラフ

社会の現象では、物価指数とか経済成長率というように、もとの数値の何倍になっているかを問題にすることが多い。ここでは、片対数グラフ用紙を使って $y = 2^x$ のグラフを書き、そのグラフが直線になることなどからそのグラフ用紙のしくみを考え、また片対数グラフ用紙に「日本の自動車の保有台数の推移」のグラフを書き歴史的背景もふまえて分析した。

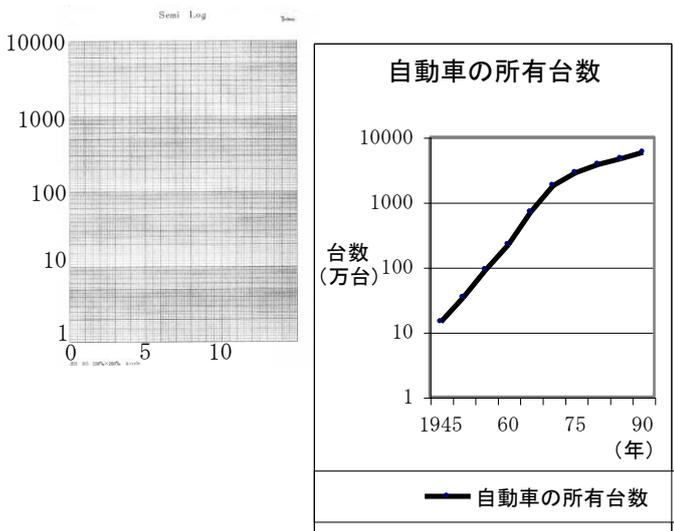
「自動車の保有台数」を片対数グラフにとると、1970年までは2倍以上の増加率で急激に伸びているが、それ以降は増加率は2倍以下になっていることが一目瞭然でわかる。歴史のことはよ

くわからないが、これには高度経済成長の収束やオイルショックなど様々な歴史的背景があると考えられる。今後の総合の授業をふまえてもおもしろい授業内容であろう。

この授業では、指数現象が世の中にどのように見られるかを伝えるとともに、指数現象をグラフにして分析するのに便利な「片対数グラフ用紙」の紹介をするのを目的とした。また、経済や歴史が好きな文系の生徒にも興味を与えることができる内容だった。

日本の自動車保有台数（万台）

1945年	14.2	1970年	1872.6
50	33.7	75	2813.9
55	90.1	80	3787.4
60	217.6	85	4616.3
65	698.3	90	5770.2



4. 実践の考察

2. の授業内容の分類の1)～4)について、それぞれ実践の考察してみることにする。

1) 対数メガネの利用について。

対数メガネによって導入する方法は、生徒に対数の意味を固定するのにとても有効のように感じた。しかし、生徒によってはメガネというたとえを幼児っぽく思う生徒もいた。今回は「このメガネで見ると私なら3に見えるが・・・」といった「裸の王様」的な話術で話をしたが、メガネに対数のメモリをふってみたい、メガネではなくブラックボックスなど入力と出力を意識した関数のようにしてみるなど、実施学校によつての工夫も考えられると思う。

ただ、このメガネの提示の時の配置が、実際の数式の配置と似ていることは長所にあげられると感じた。

2) 対数の性質（対数公式）の導入について

対数表で対数の「かけ算→たし算」の性質を導入の段階で漠然と感じさせる方法は生徒にとってもよい反応だったと思う。一般化の方法に検討の余地があるが、一般化の段階では「こういう性質があるのではないか？」といった予想くらいにとどめ、その後厳密な理論として指数法則からの証明を行えば、いきなり証明で説明するよりは生徒の抵抗感もなくよいのではないかと感じた。

3) 底の変換公式の導入について

底の変換においても同様で、一般化の段階を予想にし、その後厳密な証明を行ったので、ここは2)に比べ生徒の反応は悪かったが、それでもいきなり指数法則から証明するよりはよかったように思う。

4) 片対数グラフの利用について

片対数グラフを使わせることで、グラフ用紙の紹介はもちろん、伸び率のように数値を指数的に分析することの大切さを伝えられ、よかったのではないと思う。また対数が世の中にどう役に立っているかということ伝えるという視点でもよかったと思う。

5. 生徒のアンケートより

授業をおこなった3クラスに対して、その授業の直後にその授業に対する自己評価（AからEで、Aに行くほど理解した）と、すべての授業を終えた単元の最後に、授業に対する感想を等の選択式と記述式の無記名アンケートを実施した。以下はその結果である。

<理解度の自己評価>

1) 対数メガネを利用した対数の導入

A	B	C	D	E
26%	28%	29%	11%	6%

2)－1 対数表が便利であることについて

A	B	C	D	E
30%	18%	35%	11%	6%

2)－2 対数公式の導入について

A	B	C	D	E
16%	22%	32%	22%	7%

3) 底の変換公式の導入について

A	B	C	D	E
13%	17%	32%	23%	15%

4) 片対数グラフの利用について

A	B	C	D	E
15%	17%	20%	28%	20%

小テスト等をおこなったわけではなく、あくまで自己評価であるので、AからEの基準も個人によってまちまちなのであまり参考にはならないが、一応結果を載せておいた。片対数グラフの授業は時間不足もあって、Eの生徒も多かったが、自己評価的にもまずまずの成果はあがったようには感じている。

<単元終了後のアンケート>

1) 対数の導入に \log のメガネを使ったことについて。

- ① \log の意味がわかりやすかった。 48%
- ② 教科書どおり定義したほうがよかった。 17%
- ③ どちらでもかわらない。 35%

2) 対数表を使って対数の性質（対数公式）や底変換を導いたことについて

- ① 対数の性質や底変換のイメージがしやすかった。 56%
- ② 教科書どおり指数法則から証明するだけでよかった。 19%
- ③ どちらでもかわらない。 25%

3) 片対数グラフが指数現象を分析するのに有効であることについて。

- ① とても有効だと思い、おもしろかった。 34%
- ② あまり有効ではないと思った。 20%
- ③ どちらともいえない。 46%

4) 対数のメガネや対数表、片対数グラフなどについて感想があれば書いてください。

<抜粋>

- ・メガネを使わなくてもよいと思ったけど、使わなかったらよくわからなかったかも。ちょっと幼稚っぽかったれど…
- ・対数のメガネはわかりやすかったかもしれないけれど、小学生みたいでどうかと思う。
- ・メガネを見た時『NHKの幼児番組みたい』と思った。
- ・ \log のメガネはさして意味がない。普通に定義したところで問題はないと思う。
- ・メガネを使ってもしょうがない。なぜならばけっきょく \log とは何か説明しなければならぬ。ならば最初からそうすればよい。

- ・教科書と比べてわかりやすかったが、やはり難しかった。
- ・生徒にわかりやすくするために工夫がされていいなあと思った。
- ・いままでの授業より対数はおもしろかったような気がする。
- ・数学って何に使えるのかよくわからなくて解いているけど、実際に何に使われているのか話がきけておもしろかった。
- ・片対数グラフはよく社会の授業などでグラフを使うので、とてもためになった。
- ・片対数のグラフはめんどくさい。

対数のメガネについては意見がわかれたが、学校のレベルによっては有効度が増すであろう。本校では、「ちょっと幼稚」という意見が多かったが、わかりやすいという意見も多かった。対数表、対数公式、底変換の公式の授業については、わかりやすいという意見が多かったように思う。片対数グラフについては、1時間しか時間をかけなかったのも、よくわからなかったり、めもりがめんどくさいような意見もあったが、一風変わった授業でもあって生徒の反応はよかったように思う。

6. 参考文献

- [1] 氏家英夫, 「指数のメガネとしての対数の指導」, 数学教室, No.523
- [2] 清水貞人, 『『指数現象を見るメガネとしての対数の指導』を实践して』, 第81回全国算数・数学教育研究(秋田)大会発表原稿, 1999年