相対性理論における加速運動と座標

基準となる加速度が加わらない慣性系（基準系）S の時間・位置座標・速度を(t, x, v)、加速度が加わる系（加速系）S'の時間・位置座標・速度を(t', x', v')とし、それぞれの基準点を$t_0, x_0, v_0, t_0{}', x_0{}', v_0{}'$とする。
加速系の加速度が

$$\frac{\mathrm{d}v\prime}{\mathrm{d}t\prime} = a(t') \tag{1}$$

で表されるとすると、基準系の速度の変化は、速度の合成則

$$v + \Delta v = \frac{v + \Delta v\prime}{1 + v\Delta v\prime/c^2} = \frac{v + a(t\prime)\Delta t\prime}{1 + va(t\prime)\Delta t\prime/c^2} \tag{2}$$

より、

$$\Delta v = \frac{1 - v^2/c^2}{1 + va(t\prime)\Delta t\prime/c^2} a(t')\Delta t' \tag{3}$$

となる。よって

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t\prime} = \lim_{\Delta t\prime \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t\prime} = \lim_{\Delta t\prime \to 0} \frac{1 - v^2/c^2}{1 + va(t\prime)\Delta t\prime/c^2} a(t') = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) a(t') \tag{4}$$

の関係が成り立つ。この式を変形して

$$\frac{dv}{1 - v^2/c^2} = a(t')dt'$$

両辺を積分して

$$\int_{v_0\prime}^{v\prime} \frac{dv}{1 - v^2/c^2} = \int_{t_0\prime}^{t\prime} a(t')dt' \tag{5}$$

これを解くと

$$\frac{c}{2}\left[ln\left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right) - ln\left(\frac{1 + v_0/c}{1 - v_0/c}\right)\right] = \int_{t_0\prime}^{t\prime} a(t')dt'$$

$$\frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right) = \frac{1}{c}\int_{t_0\prime}^{t\prime} a(t')dt' + \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + v_0/c}{1 - v_0/c}\right)$$

$\frac{1}{2} ln\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right) = tanh^{-1}\frac{v}{c}$　より

$$tanh^{-1}\frac{v}{c} = \frac{1}{c}\int_{t_0\prime}^{t\prime} a(t')dt' + tanh^{-1}\frac{v_0}{c}$$　（ラピディティ Rapidity の式）

よって

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ctanh\left(\frac{1}{c}\int_{t_0\prime}^{t\prime} a(t')dt' + tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right) \tag{6a}$$

$$x(x_0', t') = \int v dt = \int \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dt' = c \int_{t_0'}^{t'} sinh\left(\frac{1}{c}\int_{t_0'}^{t'} a(t')dt' + tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right) dt' + x_0 \quad (6b)$$

$$t(x_0', t') = \int dt = \int \frac{dt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \int_{t_0'}^{t'} cosh\left(\frac{1}{c}\int_{t_0'}^{t'} a(t')dt' + tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right) dt' + t_0 \quad (6c)$$

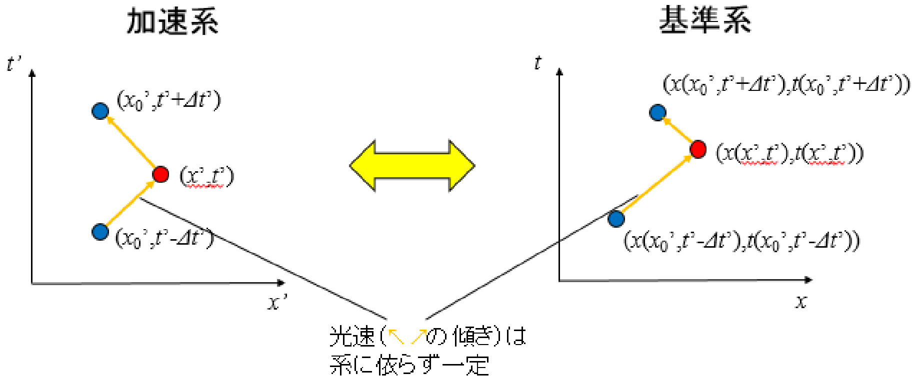
$x' \neq x_0{}'$の場合

ここでは距離・時間は光を用いた光時計によって定めるものとする。

$\left(x(x_0', t' - \Delta t'), t(x_0', t' - \Delta t')\right)$から発した光が時刻$t(x', t')$に$x(x', t')$に到達する場合、反射した光は$\left(x(x_0', t' + \Delta t'), t(x_0', t' + \Delta t')\right)$に戻る。このとき

$$\Delta t' = \frac{x' - x_0{}'}{c} \quad (7)$$

が成り立つ。



光速 c は系に依らず一定なので、基準系において

$$\Delta x_1 = x(x', t') - x(x_0', t' - \Delta t') \quad (8a)$$

$$\Delta t_1 = t(x', t') - t(x_0', t' - \Delta t') \quad (8b)$$

$$\Delta x_2 = x(x_0', t' + \Delta t') - x(x', t') \quad (8c)$$

$$\Delta t_2 = t(x_0', t' + \Delta t') - t(x', t') \quad (8d)$$

とすると、

$$\Delta x_1 = c\Delta t_1 \quad (9a)$$

$$\Delta x_2 = -c\Delta t_2 \quad (9b)$$

となる。式(8a)～(9b)より、$x(x', t')$および$t(x', t')$は、

$$x(x', t') = \frac{1}{2}\left[x(x_0', t' + \Delta t') + x(x_0', t' - \Delta t') + c\left(t(x_0', t' + \Delta t') - t(x_0', t' - \Delta t')\right)\right] \quad (10a)$$

$$t(x', t') = \frac{1}{2c}\left[x(x_0', t' + \Delta t') - x(x_0', t' - \Delta t') + c\left(t(x_0', t' + \Delta t') + t(x_0', t' - \Delta t')\right)\right] \quad (10b)$$

（おまけ）等加速度の場合（レーダー座標）

$$\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} = a = const \qquad (1')$$

の場合、

$$\int_{t_0'}^{t'} a dt' = a(t' - t_0') \qquad (11)$$

より、

$$x(x_0', t') = c\int_{t_0'}^{t'} sinh\left[\frac{a}{c}(t' - t_0') + tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right] dt' + x_0$$

$$= \frac{c^2}{a} cosh\left[\frac{a}{c}(t' - t_0') + tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right] + x_1$$

$$\left(x_1 = x_0 - \frac{c^2}{a} cosh\left(tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right) = x_0 - \frac{c^2}{a\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}\right) \qquad (12a)$$

$$t(x_0', t') = \int_{t_0'}^{t'} cosh\left[\frac{a}{c}(t' - t_0') + tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right] dt' + t_0$$

$$= \frac{c}{a} sinh\left[\frac{a}{c}(t' - t_0') + tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right] + t_1$$

$$\left(t_1 = t_0 - \frac{c}{a} sinh\left(tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right) = t_0 - \frac{v_0}{a\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}\right) \qquad (12b)$$

式(12a),(12b)よりx_0'において x と t の関係は双曲線

$$(x - x_1)^2 - c^2(t - t_1)^2 = \left(\frac{c^2}{a}\right)^2 \qquad (13)$$

となる。式(12b),(13)より x,v,t'を t で表すと

$$x = \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}(t - t_1)^2} + x_1 \qquad (14a)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{a(t - t_1)}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}(t - t_1)^2}} \qquad (14b)$$

$$t' = \frac{c}{a}\left\{sinh^{-1}\left[\frac{a}{c}(t - t_1)\right] - tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right\} + t_0' \qquad (14c)$$

となる。

$x' \neq x_0'$の場合

式(10a)に式(12a),(12b)を代入すると、

$$x(x',t')=\frac{c^2}{2a}\left\{cosh\left[\frac{a}{c}(t'+\Delta t'-t_0{}')+tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right]+cosh\left[\frac{a}{c}(t'-\Delta t'-t_0{}')+tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right]\right\}$$

$$+\frac{c^2}{2a}\left\{sinh\left[\frac{a}{c}(t'+\Delta t'-t_0{}')+tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right]-sinh\left[\frac{a}{c}(t'-\Delta t'-t_0{}')+tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right]\right\}+x_1$$

$$=\frac{c^2}{2a}\left\{exp\left[\frac{a}{c}(t'+\Delta t'-t_0{}')+tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right]+exp\left[-\frac{a}{c}(t'-\Delta t'-t_0')-tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right]\right\}+x_1$$

$$=\frac{c^2}{a}exp\left(\frac{a\Delta t'}{c}\right)cosh\left[\frac{a}{c}(t'-t_0{}')+tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right]+x_1$$

となるので、$\Delta t'$に式(7)を代入すると

$$x(x',t')=\frac{c^2}{a}exp\left[\frac{a}{c^2}(x'-x_0{}')\right]cosh\left[\frac{a}{c}(t'-t_0{}')+tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right]+x_1 \qquad (15a)$$

となる。同様に時刻 t は(10b) に式(12a),(12b),(7)を代入し、

$$\mathrm{t}(x',t')=\frac{c}{a}exp\left[\frac{a}{c^2}(x'-x_0{}')\right]sinh\left[\frac{a}{c}(t'-t_0{}')+tanh^{-1}\frac{v_0}{c}\right]+t_1 \qquad (15b)$$

となる。また式(15a),(15b)より x と t の関係は

$$(x-x_1)^2-c^2(t-t_1)^2=\left(\frac{c^2}{a}exp\left[\frac{a}{c^2}(x'-x_0{}')\right]\right)^2 \qquad (16)$$

となり$x'=x_0{}'$の双曲線と同じ漸近線

$$x-x_1=\pm c(t-t_1)$$

を持つ双曲線となる。

また、x は漸近線を越えることがない。（ブラックウォール）