チャネル乱流直接数値シミュレーションプログラムの説明

概要

このプログラムはチャネル乱流（平行平板間乱流）の直接数値シミュレーション（Direct Numerical Simulation, DNS）を行うものです。
DNS は主に流体の基礎研究に用いられる手法で、乱流のシミュレーションで通常用いられる乱流モデルを使用せず、非圧縮性流体（密度があまり変化しない流体）の基礎方程式である連続の式・Navier-Stokes の式を直接計算します。

乱流とレイノルズ数について

DNS について説明する前に、その対象となる乱流について説明します。水や空気などの流体の流れは、大きく層流と乱流に分けられます。流速が遅い場合には流れが均一で真っ直ぐ流れる層流になりますが、流速が速くなると乱れて渦が発生するようになります。これが乱流です。
下の写真は潜水艦が水上を航行している様子ですが、両脇に渦ができて空気が混ざり白くなっているのが見て取れます。この部分が乱流です。

水上を航行しているロサンゼルス級原子力潜水艦
両脇の白い部分が乱流になっている

層流か乱流かを識別するパラメータとして、レイノルズ数があります。流体に主に働く力として慣性力と粘性力があり、慣性力は流れの勢いを表し渦・乱れを生み出す源となり、粘性力は粘りで渦・乱れを抑え込む作用があります。レイノルズ数は慣性力と粘性力の比で、大きいほど慣性の影響が大きくなり、流れが乱れて乱流になり易い状態であると言えます。レ

イノルズ数は流速に比例するので流れが速いほど大きくなります。また同じ乱流でもレイノルズ数が比較的小さい乱流になったばかりの状態では大きな渦が発生しますが、レイノルズ数がさらに大きくなると細かい渦も同時に発生するようになり、より細かく入り乱れた流れになります。

レイノルズ数：$Re = \frac{\rho U L}{\mu}$

ρ：密度　U：代表速度（平均流速など）　L：代表長さ（管径など）　μ：粘性係数

乱流モデルと DNS について

乱流のシミュレーションを行う場合、実際に情報が欲しいのは大まかな流れであることが多いのですが、細かい渦が大きな流れに与える影響が無視できないためこれも計算しないと流れの再現ができません。かと言って例えば上記の潜水艦のような大きな物体の流れを計算するのにミクロサイズの流れまで計算するのはコンピューターの計算能力の面からも現実的ではありません。そこで通常乱流の計算をする場合、乱流モデルという近似式を用います。乱流モデルには各種レイノルズ平均モデル（RANS）や LES などがあり、細かい乱れを近似式で置き換え大まかな流れの部分のみを計算します。一方、乱流の基礎研究ではモデル＝近似式を用いない直接数値シミュレーション（Direct Numerical Simulation，DNS）が用いられることがあります。実際に計算可能なのはあまりレイノルズ数が大きくない流れに限定されますが、近似ではない本来の式を解くため、細かい流れまでより正確な計算結果が期待できます。

流体の基礎方程式

熱や電磁気・密度変化などを考慮しない非圧縮性ニュートン流体※の基礎方程式は、連続の式（質量保存則）と Navier-Stokes の式（運動量保存則）になります。3 次元では方程式は４つ、未定定数も速度 3 成分と圧力の計４つになります。このシミュレーションで解く方程式は、無次元化した以下の式です。

※ニュートン流体：粘性力が速度勾配に比例する流体

連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Navier-Stokes の式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re_\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re_\tau}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re_\tau}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

レイノルズ数： $Re_\tau=\frac{u_\tau\delta}{\nu}$

壁面摩擦速度：$u_\tau=\sqrt{\tau_w/\rho}$,　壁面摩擦応力：$\tau_w$,　密度：$\rho$,
チャネル半幅：δ,　動粘性係数：ν

基礎方程式の解き方

これらの基礎方程式は解析的な解き方（中高生の数学の問題のような普通の解き方）で解くことができないため、数値解法を用いて数値の羅列として解くことになります。数値解法を用いる際に必要な処理が連続変数を数値の羅列に置き換える離散化です。このプログラムでは離散化手法として以下の手法を用いています。

・時間離散化
　・2 次 Adams-Bashforth 法（対流項）
　・Crank-Nicolson 法（粘性項）
・空間離散化－スペクトル法
　・Fourier-Galerkin 法（x 軸＝主流方向，z 軸＝スパン方向）
　・Chebyshev-Tau 法（y 軸＝壁垂直方向）

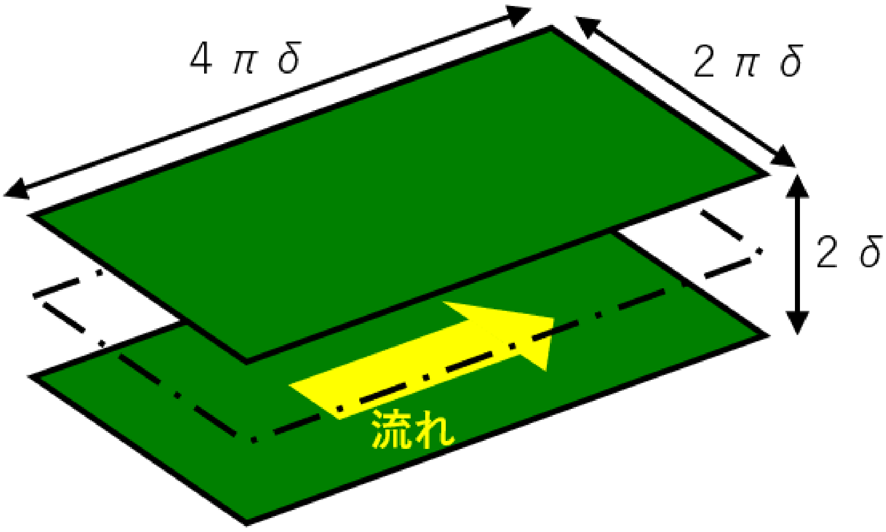
※スパン方向は流れに垂直かつ壁に沿った方向

スペクトル法

スペクトル法は微分方程式の離散化手法の 1 つで、離散フーリエ変換などの波数空間への変換を用いる手法です。この手法は差分法など他の手法と比べて計算精度が極めて高い反面、直交格子以外の形状に適用しにくく応用が利かないという欠点もあり、主に基礎研究分野のシミュレーションに用いられています。
具体的な計算方法はプログラムの添付ファイルを参照してください。

サンプルデータの計算条件

サンプルは以下の条件で計算しました。



レイノルズ数	Re_τ=100
計算領域	$L_x \times L_y \times L_z$　4πδ×2δ×2πδ
領域分割数	$N_x \times N_y \times N_z$　64×65×64
時間ステップ	$\Delta t^+ \times N$　0.08×30000 ステップ
境界条件	周期境界条件（x 軸＝主流方向，z 軸＝スパン方向の出入り口）
	No-Slip 条件（上下壁面）

レイノルズ数 Re_τ=100 は乱流が発生する下限に近い値になります。よってこのサンプルは乱流になりたての流れをシミュレートすることになります。

最低限必要な領域分割数はレイノルズ数で決まり、レイノルズ数を大きくすると細かい渦が発生するためより細かく分割する必要があり、必要な計算コストが増加することになります。

時間ステップの刻み幅は領域分割と流速によって決まり、以下の CFL 条件（クーラン条件）を満たす必要があります。

$$C \equiv \Delta t\left(\left|\frac{u}{\Delta x}\right|+\left|\frac{v}{\Delta y}\right|+\left|\frac{w}{\Delta z}\right|\right)_{max} < 1$$

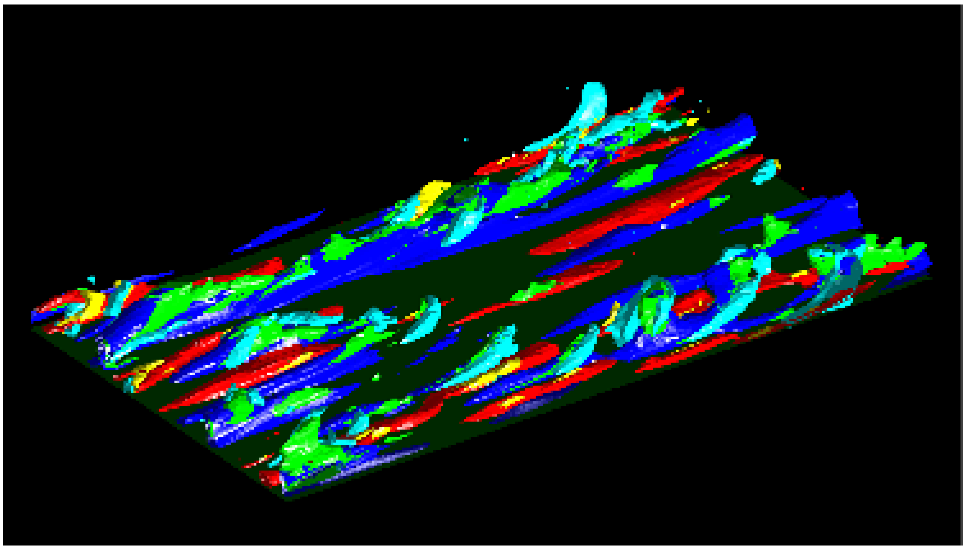
これは 1 ステップで流れる距離が計算格子のサイズより小さくないと計算が安定しないという条件です。実際には余裕を見てクーラン数 C が 0.5 未満になるようΔt を設定しています。

初期条件は、流速を正規分布乱数で与えています。その際、主流方向・壁垂直方向速度の平均と標準偏差はチャネル乱流のデータベースを参照し、スパン方向速度は連続の式から算出しました。

※参照：旧笠木研データベース　https://thtlab.jp/index-j.html

計算結果の表示について

流体シミュレーションの計算結果の表示方法は断面コンター図や流線など様々な手法がありますが、DNS では等値面がよく用いられます。



等値面の例（表示領域は全体の下半分 $-1 \leq y \leq 0$）

水色：低圧領域(p’=-2.5）青：低速領域(u’=-3.0）赤：高速領域(u’=3.0)

緑：イジェクション領域(-u’v’=2.5,v’>0）黄色：スウィープ領域(-u’v’=2.5,v’<0)

※ ’の付いたパラメータは変動成分（平均との差）

等値面はあるパラメータについて 2 次元の等高線のように 3 次元の面を切り取ったものです。単独の等値面ではパラメータの全体分布は見ることができませんが、例えば圧力が低い部分（図の水色）・速度が周りより速い部分（図の赤）といった注目したい領域の空間分布を見ることができます。

このサンプルの結果から

前提条件：低圧領域はほぼ渦と重なっていることが知られている。

・低速領域（青）と高速領域（赤）が細長く筋状に分布している（そのためストリークと呼ばれる)。

・イジェクション（低速上昇流：緑）は低速領域に、スウィープ（高速下降流：黄）は高速領域とほぼ重なっている（当然ではあるが)。

・渦（低圧領域：水色）の多くはイジェクション・スウィープの傍で発生している。

といった（比較的低レイノルズ数での）乱流の基本構造が読み取れます。