

Mathematica による特殊相対性理論座標変換と速度の加法定理

芦村昌士 2012/4/29

ホームページ：[assy の特殊相対性理論に掲載](#)

文献 1) 相対性理論 W.パウリ 内山龍雄：訳 ちくま学芸文庫 を参照して
特殊相対性理論における座標変換とローレンツ収縮の関係を
Mathematica を用いてグラフ表示したのが

資料 1) Mathematica による特殊相対性理論座標変換とローレンツ収縮の図示
斜交座標とローレンツ収縮 および 時間の遅れ

芦村昌士 2012/4/29

であった。この斜交座標を用いて、特殊相対性理論における速度の加法定理も図示理解することができる。

資料 1)において、K 系に対する K'系の相対速度 v を

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}c = \frac{\sqrt{11}}{6}c = 0.5527707983925666c$$

式(1)

とおいた。

ここで K'系における以下の速度を考える。

$$u'_x = \frac{2}{4}c = 0.5c$$

式(2)

K 系からこの速度は特殊相対性理論の速度の加法定理によって

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = 0.8248063626044901c$$

式(3)

と観測される。

これを、Mathematica を用いて図で表示した。

横軸が x' 座標の x' 軸、縦軸が時間軸 t' の直交座標を考え、これを正方グリッドで表す。このグリッドの縦軸時間軸の間隔ひと目盛を 1 秒とする。このグリッドの横軸 x' 軸の間隔ひと目盛を光が 1 秒間に進む距離、 $1\text{ c} = c$ とする。下図の図 1 の青いグリッドがそれである。

この青いグリッド上の点が、座標、 x' 、 t' で表されるとして、

先の式 (1)

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} c = \frac{\sqrt{11}}{6} c = 0.5527707983925666c$$

と

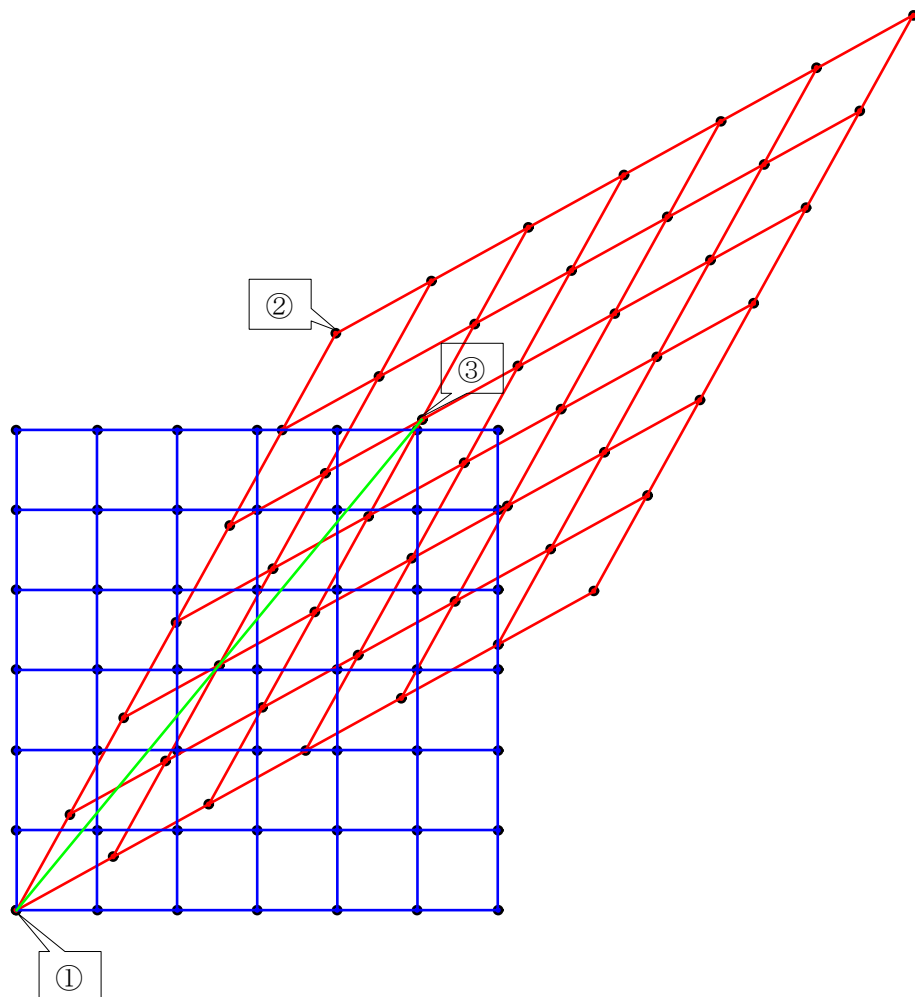
文献 1) の座標逆変換公式

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad ; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

式(4)

を用いて、図 2 の青いグリッドを変換表示したのが、図 1 の赤い斜交グリッドである。

図 1 : 斜交座標グリッドによる速度の加法定理



①②の傾きは、青い K 系の正方直交グリッド座標で、K' 系の相対速度

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} c = \frac{\sqrt{11}}{6} c = 0.5527707983925666c$$

となっている。

①③の傾きは K' 系の赤いグリッドで、縦 4 目盛、横 2 目盛で、K' 系で式(2)の

$$u'_x = \frac{2}{4} c = 0.5c$$

傾きとなっている。

これを **K** 系の青いグリッドで傾きを見ると、おおよそ、縦 6 目盛、横 5 目盛で

$$\frac{5c}{6} = 0.83333c$$

であり

式(3)

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = 0.8248063626044901c$$

が成立していることが図からも理解できる。

－ 以上 －