

Mathematica による特殊相対性理論座標変換とローレンツ収縮の図示 斜交座標とローレンツ収縮 および 時間の遅れ

芦村昌士 2012/4/29

ホームページ：[assy の特殊相対性理論に掲載](#)

文献 1) 相対性理論 W.パウリ 内山龍雄：訳 ちくま学芸文庫 を参照して
特殊相対性理論における座標変換とローレンツ収縮の関係を
Mathematica を用いてグラフ表示した。

ローレンツ収縮の式

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

式 (1)

において

$$l = \frac{5}{6} l_0$$

式 (2)

となるローレンツ収縮を考える、このとき

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} c = \frac{\sqrt{11}}{6} c = 0.5527707983925666c$$

式 (3)

と求まる。

これを、Mathematica を用いて図で表示した。

横軸が x 座標の x 軸、縦軸が時間軸 t の直交座標を考え、これを正方グリッドで表す。このグリッドの縦軸時間軸の間隔ひと目盛を 1 秒とする。このグリッドの横軸 x 軸の間隔ひと目盛を光が 1 秒間に進む距離、 $1\text{ c} = c$ とする。下図の図 1 の赤いグリッドがそれである。

このグリッド上の点が、座標、 x 、 t で表されるとして、
先の式 (3)

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} c = \frac{\sqrt{11}}{6} c = 0.5527707983925666c$$

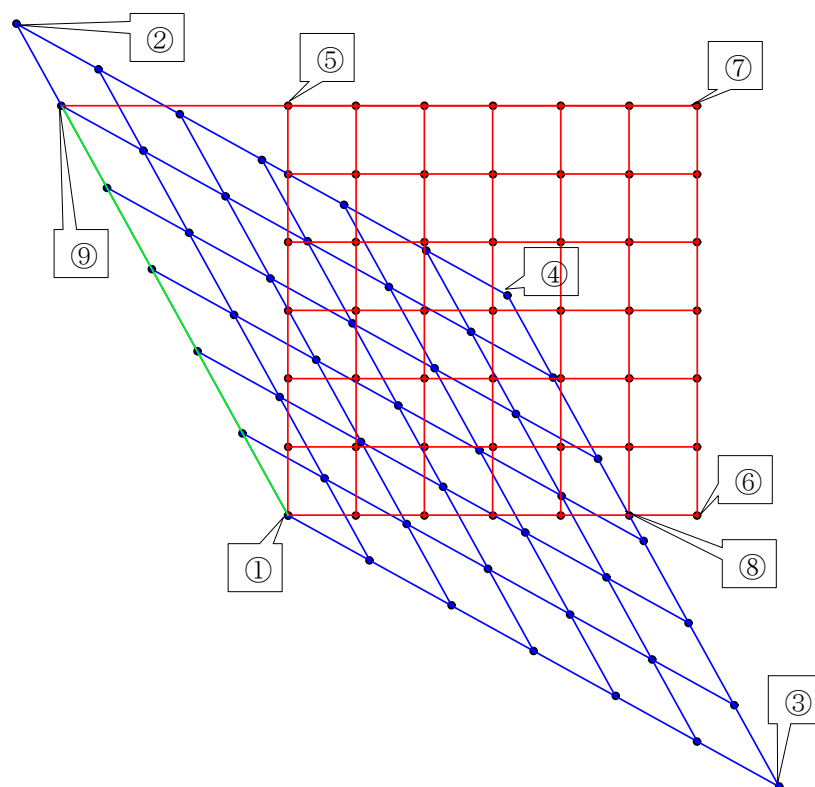
と文献 1) の座標変換公式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} ; t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

式(4)

を用いて、図 1 の赤い直交正方グリッドを変換表示したのが、図 1 の青い斜交グリッドである。

図 1 : 式(4)による斜交座標グリッド



このように K 系で正方グリッドの直交座標は、 K' 系では青のグリッドのように斜交座標と観測される。

K 系の正方グリッドの直交座標系を K' 系では斜交座標系（青のグリッド）と観測するのは、 K' 系の直交座標系（赤のグリッド）で観測しているからである。

図 1 の①②や③④は、青いグリッド目盛が示すように K 系では時刻 t によらず、一定の x 座標値を持つ静止点であるが、 K' 系では $-v$ の傾きを持つ、動く点と観測され、文献 1) の K 系、 K' 系の定義に合致する。

K 系での 2 つの静止点、①②と③④の距離は青い斜交グリッド目盛が示すように $6c$ であるが、 K' 系では、①⑧の赤いグリッド目盛が示すように $5c$ と観測される。

すなわち式(2)の

$$l = \frac{5}{6} l_0$$

のローレンツ収縮が表されている。

①⑨は青い斜交グリッドの目盛が示すように K 系において静止点で 5 秒間の時間の経過を表す。

これは赤いグリッドの目盛が示すように K' 系では 6 秒間と計測される。このように時間の進みの遅れが示される。

今度は横軸が x' 座標の x' 軸、縦軸が時間軸 t' の直交座標を考え、これを正方グリッドで表す。このグリッドの縦軸時間軸の間隔ひと目盛を 1 秒とする。このグリッドの横軸 x' 軸の間隔ひと目盛を光が 1 秒間に進む距離、 $1\text{ c} = c$ とする。下図の図 2 の青いグリッドがそれである。

この青いグリッド上の点が、座標、 x' 、 t' で表されるとして、
先の式 (3)

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} c = \frac{\sqrt{11}}{6} c = 0.5527707983925666c$$

と

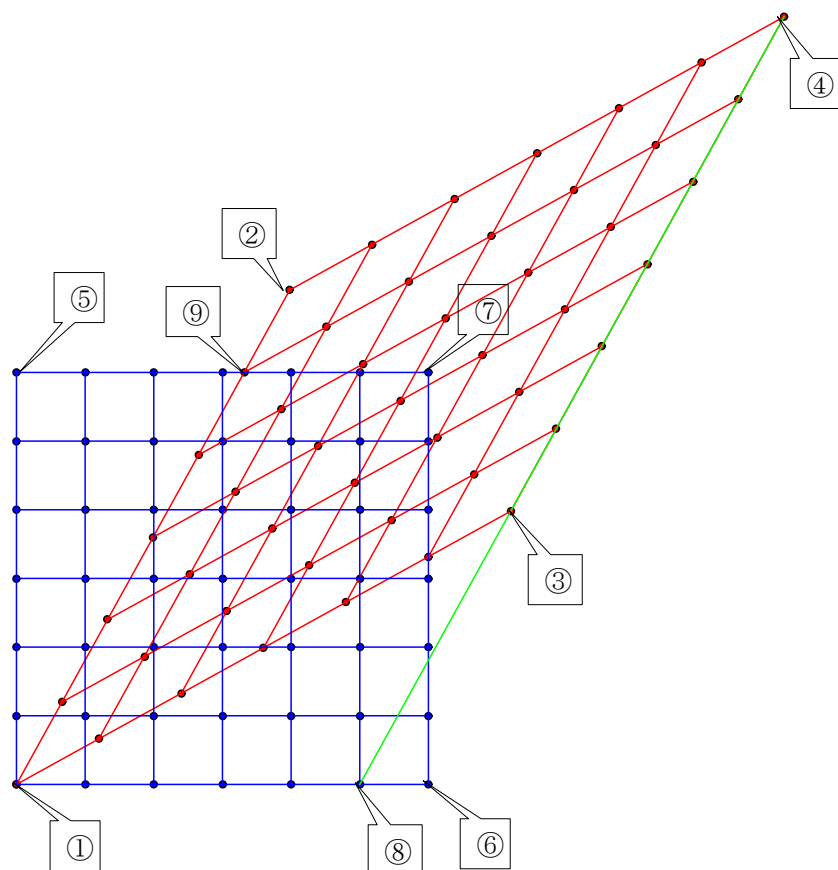
文献 1) の座標逆変換公式

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} ; t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

式(5)

を用いて、図 2 の青いグリッドを変換表示したのが、図 2 の赤い斜交グリッドである。

図 2 : 式(5)による斜交座標グリッド



このように K' 系で正方グリッドの直交座標は、 K 系では赤のグリッドのように斜交座標と観測される。

K' 系の正方グリッドの直交座標系を K 系では斜交座標系（赤のグリッド）と観測するのは、 K 系の直交座標系（青のグリッド）で観測しているからである。

図 2 の①②や③④は、赤いグリッド目盛が示すように K' 系では時刻 t' によらず、一定の x' 座標値を持つ静止点であるが、 K 系では v の傾きを持つ、動く点と観測され、文献 1) の K 系、 K' 系の定義に合致する。

K' 系での 2 つの静止点、①②と③④の距離は赤い斜交グリッド目盛が示すように $6c$ であるが、 K 系では、①⑧の青いグリッド目盛が示すように $5c$ と観測される。

すなわち式(2)の

$$l = \frac{5}{6} l_0$$

のローレンツ収縮が表されている。

①⑨は赤い斜交グリッドの目盛が示すように K' 系において静止点で 5 秒間の時間の経過を表す。

これは青いグリッドの目盛が示すように K 系では 6 秒間と計測される。このように時間の進みの遅れが示される。

— 以上 —