3章　行列式

練習問題 1-A

※　行列式の性質や，次の単元で学習する行列式の展開を使って行列式の値を求める場合，手順はここに示した1通りだけではありません．

1.（1）　サラスの方法を用いると

$$\text{与式} = 2\times2\times(-2)+(-1)\times1\times1+4\times3\times3 -2\times1\times3-(-1)\times3\times(-2)-4\times2\times1$$
$$= -8-1+36-6-6-8 = \mathbf{7}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & 7 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -\{-56-(-49)\} = -(-7) = \mathbf{7}$$

（2）　サラスの方法を用いると

$$\text{与式} = 0\times4\times4+1\times1\times1+2\times3\times(-3) -0\times1\times(-3)-1\times3\times4-2\times1\times1$$
$$= 1-18-12-2 = \mathbf{-31}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 10 & -11 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 10 & -11 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\{20-(-11)\} = \mathbf{-31}$$

（3）

$$\text{与式} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -10 & -13 \\ -2 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^3\begin{vmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad 1\text{行}+(2\text{行}+3\text{行})$$

$$= -10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -10\cdot16 = \mathbf{-160}$$

（4）

$$\text{与式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 8 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 8 \\ -5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & 8 \\ -5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -13 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -13 & -9 \end{vmatrix} = 63-(-26) = \mathbf{89}$$

2.（1） 与式 $= \begin{vmatrix} a-b & b & b \\ a-b & b & a \\ b-a & a & a \end{vmatrix}$ 1 行 − 2 行

$= (a-b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & b & a \\ -1 & a & a \end{vmatrix}$

$= (a-b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 0 & a-b \\ 0 & a+b & a+b \end{vmatrix}$

$= (a-b)\begin{vmatrix} 0 & a-b \\ a+b & a+b \end{vmatrix}$

$= (a-b)\{-(a-b)(a+b)\}$

$\boldsymbol{= -(a+b)(a-b)^2}$

（2） 与式

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2-(b+c)^2 & (a+b)^2-(b+c)^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ (c+a)^2-(b+c)^2 & (a+b)^2-(b+c)^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (b-a)(b+a) & (c+a)(c-a) \\ (a+b+2c)(a-b) & (a+c+2b)(a-c) \end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} -(b+a) & -(c+a) \\ a+b+2c & a+c+2b \end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} -(b+a) & -(c+a) \\ 2c & 2b \end{vmatrix}$

$=2(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} -(b+a) & -(c+a) \\ c & b \end{vmatrix}$

$=-2(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} a+b & c+a \\ c & b \end{vmatrix}$

$=-2(a-b)(a-c)\{b(a+b)-c(c+a)\}$

$=-2(a-b)(a-c)(b^2+ab-c^2-ca)$

$=-2(a-b)(a-c)\{b^2+ab-c(c+a)\}$

$=-2(a-b)(a-c)(b-c)\{b+(c+a)\}$

$\boldsymbol{=2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}$

3.（1） 左辺 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1-x & 3-x \\ x^2 & 1-x^2 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1-x & 3-x \\ 1-x^2 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1-x & 3-x \\ (1-x)(1+x) & (3-x)(3+x) \end{vmatrix}$

$= (1-x)(3-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+x & 3+x \end{vmatrix}$

$= (1-x)(3-x)\{(3+x)-(1+x)\}$

$= (1-x)(3-x)\cdot 2$

よって，$2(1-x)(3-x)=0$ より，$\boldsymbol{x=1,\ 3}$

（2） 左辺 $= -\begin{vmatrix} 1 & -x & -1 \\ -x & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & -x & -1 \\ 0 & 1-x^2 & 3-x \\ 0 & -1+x & 3-x \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1-x^2 & 3-x \\ -1+x & 3-x \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (1-x)(1+x) & 3-x \\ -(1-x) & 3-x \end{vmatrix}$

$= (1-x)(3-x)\begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1-x)(3-x)\{1+x-(-1)\}$

$= (1-x)(3-x)(2+x)$

よって，$(1-x)(3-x)(2+x)=0$ より，$\boldsymbol{x=1,\ 3,\ -2}$

4. 両辺の行列式をとると，$|AB|=|O|$ であるから，$|A||B|=0$
よって，$|A|=0$，または $|B|=0$ である．

練習問題 1-B

1.（1） 与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)\{(c^2+ca+a^2)-(b^2+ab+a^2)\}$

$= (b-a)(c-a)(c^2+ca-b^2-ab)$

$= (b-a)(c-a)\{(c-b)a+c^2-b^2\}$

$= (b-a)(c-a)\{(c-b)a+(c-b)(c+b)\}$

$= (b-a)(c-a)(c-b)\{a+(c+b)\}$

$\boldsymbol{= (a+b+c)(a-b)(b-a)(c-a)}$

（2）※ 紙面の横幅が足りないので，最後のページに載せてあります．

2. 左辺 $=\begin{vmatrix} 2b_1 & c_1+3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ 2b_2 & c_2+3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ 2b_3 & c_3+3a_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & c_1+3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ c_2 & c_2+3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ c_3 & c_3+3a_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2b_1 & c_1 & 2a_1+3b_1 \\ 2b_2 & c_2 & 2a_2+3b_2 \\ 2b_3 & c_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2b_1 & 3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ 2b_2 & 3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ 2b_3 & 3a_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & 2a_1+3b_1 \\ c_2 & c_2 & 2a_2+3b_2 \\ c_3 & c_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & 3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ c_2 & 3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ c_3 & 3a_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2b_1 & c_1 & 2a_1 \\ 2b_2 & c_2 & 2a_2 \\ 2b_3 & c_3 & 2a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2b_1 & c_1 & 3b_1 \\ 2b_2 & c_2 & 3b_2 \\ 2b_3 & c_3 & 3b_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 2b_1 & 3a_1 & 2a_1 \\ 2b_2 & 3a_2 & 2a_2 \\ 2b_3 & 3a_3 & 2a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2b_1 & 3a_1 & 3b_1 \\ 2b_2 & 3a_2 & 3b_2 \\ 2b_3 & 3a_3 & 3b_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & 2a_1 \\ c_2 & c_2 & 2a_2 \\ c_3 & c_3 & 2a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & 3b_1 \\ c_2 & c_2 & 3b_2 \\ c_3 & c_3 & 3b_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & 3a_1 & 2a_1 \\ c_2 & 3a_2 & 2a_2 \\ c_3 & 3a_3 & 2a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & 3a_1 & 3b_1 \\ c_2 & 3a_2 & 3b_2 \\ c_3 & 3a_3 & 3b_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot 2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}+2\cdot 3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & b_2 \\ b_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+2\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}+2\cdot 3\cdot 3\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+2\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & a_1 \\ c_2 & c_2 & a_2 \\ c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+3\cdot 2\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}+3\cdot 3\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}+6\cdot 0+12\cdot 0+18\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0$$

$$+6\cdot 0+9\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

※ 2 つの列が等しい行列式の値は 0

$$=4\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+9\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

※列を 2 回交換

$$=13\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\text{右辺}$$

3.（1） 与式 $=\begin{pmatrix} 0+a^2+b^2 & 0+0+bc & 0+ca+0 \\ 0+0+bc & a^2+0+c^2 & ab+0+0 \\ 0+ca+0 & ab+0+0 & b^2+c^2+0 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & bc & ca \\ bc & c^2+a^2 & ab \\ ca & ab & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

（2） $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}=A$ とおくと

$|A|=0+acb+bac-0-0-0$

$=2abc$

（1）より

左辺 $=|A^2|$

$=|A|^2$

$=(2abc)^2=4a^2b^2c^2=$ 右辺

4. 両辺の行列式をとると，$|{}^tA|=|-A|$

ここで

$|{}^tA|=|A|$

$|-A|=(-1)^3|A|=-|A|$

よって，$|A|=-|A|$ となるから

$2|A|=0$，すなわち，$|A|=0$

p.96

1.（2） 与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) & (d-a)(d+a) \\ (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) & (d-a)(d^2+da+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & (c+a)-(b+a) & (d+a)-(b+a) \\ b^2+ba+a^2 & (c^2+ca+a^2)-(b^2+ba+a^2) & (d^2+da+a^2)-(b^2+ba+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^2+ca-b^2-ba & d^2+da-b^2-ba \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)a+(c-b)(c+b) & (d-b)a+(d-b)(d+b) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(a+c+b) & (d-b)(a+d+b) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c+b & a+d+b \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\{(a+d+b)-(a+c+b)\}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

$$= \boldsymbol{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

∎