練習問題 3-A

1. $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$ であるから

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha = 1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

よって，$\cos^2\alpha = \dfrac{16}{25}$

α は鈍角なので，$\cos\alpha < 0$ であるから，$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$

$$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

また，$\cos\beta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ であるから

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

β は鈍角なので，$\sin\beta > 0$ であるから，$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}$$

以上より

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，　$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$，　$\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$

$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，　$\cos\beta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，　$\tan\beta = -\dfrac{1}{2}$

(1)　与式 $= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{6}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{5\sqrt{5}} = -\frac{10}{5\sqrt{5}} = \boldsymbol{-\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

(2)　与式 $= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= -\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5\sqrt{5}} - \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

(3)　与式 $= \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{-\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{11}{8}} = \boldsymbol{-\frac{2}{11}}$$

2. $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$

$$= 1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ より，$\cos\alpha < 0$ なので

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

よって，2倍角の公式より

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ より，$\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{3}{4}\pi$ なので

$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$，　$\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0 \cdots$①

半角の公式より

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$$

①より，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}}$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$$

①より，$\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}} = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}}$

3. (1)　左辺 $= \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta} = \text{右辺}$$

(2)　左辺 $= \dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\cdot\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}$

$$= \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\cdot\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 = \text{右辺}$$

4. （1） 左辺 $= \sin(2\theta+\theta)$

$= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$

$= (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 3\sin^3\theta - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta =$ 右辺

（2） 左辺 $= \cos(2\theta+\theta)$

$= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$

$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$

$= \cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

$= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$

$= \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta =$ 右辺

5. （1） 積 → 和・差の公式により

左辺 $= \frac{1}{2}\{\sin(\theta+3\theta)+\sin(\theta-3\theta)\}$

$+ \frac{1}{2}\{\sin(\theta+5\theta)+\sin(\theta-5\theta)\}$

$+ \frac{1}{2}\{\sin(\theta+7\theta)+\sin(\theta-7\theta)\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin 4\theta + \sin(-2\theta)\} + \frac{1}{2}\{\sin 6\theta + \sin(-4\theta)\}$

$+ \frac{1}{2}\{\sin 8\theta + \sin(-6\theta)\}$

$= \frac{1}{2}(\sin 4\theta - \sin 2\theta) + \frac{1}{2}(\sin 6\theta - \sin 4\theta)$

$+ \frac{1}{2}(\sin 8\theta - \sin 6\theta)$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(\sin 8\theta - \sin 2\theta)}$

（2） 積 → 和・差の公式により

左辺 $= -\frac{1}{2}\{\cos(\theta+3\theta)-\cos(\theta-3\theta)\}$

$- \frac{1}{2}\{\cos(\theta+5\theta)-\cos(\theta-5\theta)\}$

$- \frac{1}{2}\{\cos(\theta+7\theta)-\cos(\theta-7\theta)\}$

$= -\frac{1}{2}\{\cos 4\theta - \cos(-2\theta)\}$

$- \frac{1}{2}\{\cos 6\theta - \cos(-4\theta)\}$

$- \frac{1}{2}\{\cos 8\theta - \cos(-6\theta)\}$

$= -\frac{1}{2}(\cos 4\theta - \cos 2\theta) - \frac{1}{2}(\cos 6\theta - \cos 4\theta)$

$- \frac{1}{2}(\cos 8\theta - \cos 6\theta)$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 8\theta)}$

6. （1） 与式 $= \sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}\sin(x+\alpha)$

$= \sqrt{12}\sin(x+\alpha)$

$= 2\sqrt{3}\sin(x+\alpha)$

ここで，$\cos\alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，　$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ より，$\alpha = \frac{\pi}{6}$

よって，与式 $= \boldsymbol{2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

（2） 与式 $= \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}\sin(x+\alpha)$

$= \sqrt{4}\sin(x+\alpha)$

$= 2\sin(x+\alpha)$

ここで，$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$，　$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ より，$\alpha = \frac{5}{6}\pi$

よって，与式 $= \boldsymbol{2\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)}$

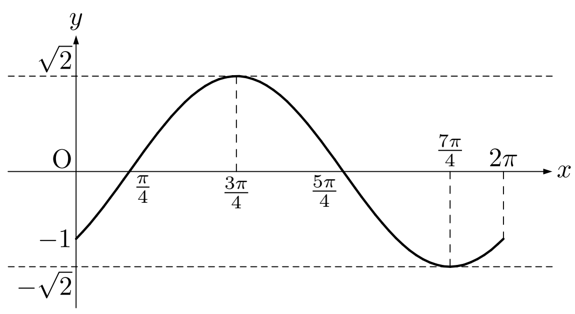
7. $y = \sqrt{1^2+(-1)^2}\sin(x+\alpha)$

$= \sqrt{2}\sin(x+\alpha)$

ここで，$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$，　$\sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ より，$\alpha = -\frac{\pi}{4}$

よって，$y = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

この関数のグラフは，$y=\sin x$ のグラフを，y 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍に拡大し，x 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ 平行移動したものであるから，グラフは次のようになる．



よって

最大値　$\boldsymbol{\sqrt{2}}$　$\left(\boldsymbol{x = \frac{3}{4}\pi}\text{**のとき**}\right)$

最小値　$\boldsymbol{-\sqrt{2}}$　$\left(\boldsymbol{x = \frac{7}{4}\pi}\text{**のとき**}\right)$

練習問題 3-B

1. 左辺 $= a\left(\cos B\cos\frac{\pi}{3} + \sin B\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$+ b\left(\cos A\cos\frac{\pi}{3} - \sin A\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= a\left(\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)$

$+ b\left(\frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$

$= \frac{1}{2}a\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}a\sin B + \frac{1}{2}b\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}b\sin A$

ここで，正弦定理より，$\sin A = \frac{a}{2R}$，　$\sin B = \frac{b}{2R}$

余弦定理より，$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

よって

左辺 $= \frac{1}{2}a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{b}{2R}$

$+ \frac{1}{2}b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{\sqrt{3}}{2}b\cdot\frac{a}{2R}$

$= \frac{c^2+a^2-b^2}{4c} + \frac{b^2+c^2-a^2}{4c}$

$= \frac{2c^2}{4c} = \frac{c}{2} =$ 右辺

2. (1) 左辺 $= (\cos 80^\circ - \cos 20^\circ) + \cos 40^\circ$

$$= -2\sin\frac{80^\circ + 20^\circ}{2}\sin\frac{80^\circ - 20^\circ}{2} + \cos 40^\circ$$
$$= -2\sin 50^\circ \sin 30^\circ + \cos 40^\circ$$
$$= -2\sin 50^\circ \cdot \frac{1}{2} + \cos 40^\circ$$
$$= -\sin 50^\circ + \cos 40^\circ$$
$$= -\sin(90^\circ - 40^\circ) + \cos 40^\circ$$
$$= -\cos 40^\circ + \cos 40^\circ = \mathbf{0}$$

(2) 与式 $= (\cos 10^\circ \cos 50^\circ)\cos 70^\circ$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(10^\circ + 50^\circ) + \cos(10^\circ - 50^\circ)\}\cos 70^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\{\cos 60^\circ + \cos(-40^\circ)\}\cos 70^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos 40^\circ\right)\cos 70^\circ$$
$$= \frac{1}{4}\cos 70^\circ + \frac{1}{2}\cos 40^\circ \cos 70^\circ$$
$$= \frac{1}{4}\cos 70^\circ + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(40^\circ + 70^\circ) + \cos(40^\circ - 70^\circ)\}$$
$$= \frac{1}{4}\cos 70^\circ + \frac{1}{4}\{\cos 110^\circ + \cos(-30^\circ)\}$$
$$= \frac{1}{4}(\cos 70^\circ + \cos 110^\circ + \cos 30^\circ)$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\cos 70^\circ + \cos(180^\circ - 70^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\cos 70^\circ - \cos 70^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

3. (1) $\theta = 18^\circ$ のとき

左辺 $= \sin 2\cdot 18^\circ = \sin 36^\circ$

右辺 $= \cos 3\cdot 18^\circ$
$$= \cos 54^\circ$$
$$= \cos(90^\circ - 36^\circ)$$
$$= \sin 36^\circ$$

よって，左辺 $=$ 右辺

(2) 2 倍角の公式より，$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

3 倍角の公式より，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

これらを，$\sin 2\theta = \sin 3\theta$ に代入して

$$2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$\cos\theta = \cos 18^\circ \fallingdotseq 0$ であるから

$$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$$
$$4\cos^2\theta - 3 - 2\sin\theta = 0$$
$$4(1 - \sin^2\theta) - 3 - 2\sin\theta = 0$$
$$4 - 4\sin^2\theta - 3 - 2\sin\theta = 0$$
$$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$$

よって

$$\sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-1)}}{4}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$0 < \sin 18^\circ < 1$ であるから，$\boldsymbol{\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$

4. 半角の公式より，$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$，　$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

また，$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ より，$\sin x\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$

よって

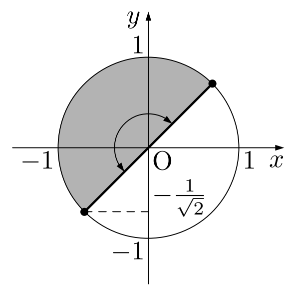
$$f(x) = 2\cdot\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2x}{2}$$
$$= 1 - \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$
$$= -\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) + \frac{3}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}\{\sqrt{1^2 + 1^2}\sin(2x + \alpha)\} + \frac{3}{2}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x + \alpha) + \frac{3}{2}$$

ここで，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

よって，$f(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{3}{2}$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq 2x \leqq \pi$

すなわち，$\dfrac{\pi}{4} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{4} \leqq \pi + \dfrac{\pi}{4}$



したがって，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ となるので

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geqq -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geqq 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\frac{1}{2} \geqq -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \geqq -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \geqq -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}$$
$$2 \geqq -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \geqq \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$$

すなわち，$\dfrac{3 - \sqrt{2}}{2} \leqq f(x) \leqq 2$ であるから

最大値　2，最小値　$\boldsymbol{\dfrac{3 - \sqrt{2}}{2}}$

5. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$$= \frac{2t}{1 - t^2} \quad (\text{ただし，} t \fallingdotseq \pm 1)$$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \cdots$ ①

ここで，$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 + t^2}$$

これを，①に代入して

$$\cos 2\alpha = 2\cdot\frac{1}{1 + t^2} - 1$$
$$= \frac{2 - (1 + t^2)}{1 + t^2}$$
$$= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin 2\alpha = \tan 2\alpha\cos 2\alpha$$
$$= \frac{2t}{1 - t^2}\cdot\frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
$$= \frac{2t}{1 + t^2}$$

6. (1) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ であるから

$$2\sin x\cos x = \cos x$$
$$2\sin x\cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

よって，$\cos x = 0$　または，$2\sin x - 1 = 0$

$\cos x = 0$ より，$x = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$2\sin x - 1 = 0$ より，$\sin x = \dfrac{1}{2}$ であるから，$x = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

以上より，$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$

（2）　$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ であるから

$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x + 2 = 0$ より，$\cos x = -2$ であるが，$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ であるから，不適．

$2\cos x - 1 = 0$ より，$\cos x = \dfrac{1}{2}$ であるから

$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi}$

（3）　$\sqrt{1^2 + (-1)^2}\sin(x + \alpha) = 1$

$\sqrt{2}\sin(x + \alpha) = 1$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ より，$\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

よって，$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq x < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x - \dfrac{\pi}{4} < 2\pi - \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$

したがって，$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

（4）　$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\sin(x + \alpha) = 1$

$2\sin(x + \alpha) = 1$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

よって，$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq x + \dfrac{\pi}{3} < 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{13}{6}\pi$

したがって，$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi}$

7.（1）　$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ であるから

$2\sin x\cos x - \sin x > 0$

$\sin x(2\cos x - 1) > 0$

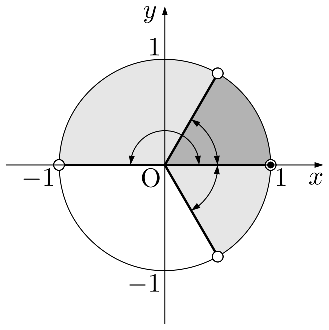
よって，$\begin{cases}\sin x > 0 \\ 2\cos x - 1 > 0\end{cases}$　または，$\begin{cases}\sin x < 0 \\ 2\cos x - 1 < 0\end{cases}$

i）$\begin{cases}\sin x > 0 \\ 2\cos x - 1 > 0\end{cases}$　のとき

$\sin x > 0$ より，$0 < x < \pi \cdots$①

$2\cos x - 1 > 0$ より，$\cos x > \dfrac{1}{2}$ であるから

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi < x < 2\pi \cdots$②



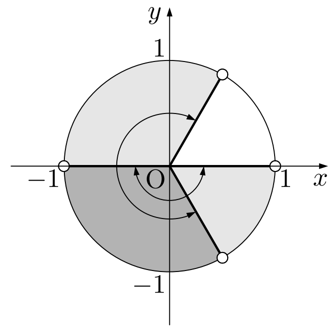
①，②より，$0 < x < \dfrac{\pi}{3} \cdots$③

ii）$\begin{cases}\sin x < 0 \\ 2\cos x - 1 < 0\end{cases}$　のとき

$\sin x < 0$ より，$\pi < x < 2\pi \cdots$④

$2\cos x - 1 > 0$ より，$\cos x < \dfrac{1}{2}$ であるから

$\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5}{3}\pi \cdots$⑤



④，⑤より，$\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi \cdots$⑥

③，⑥より，$\boldsymbol{0 < x < \dfrac{\pi}{3},\ \pi < x < \dfrac{5}{3}\pi}$

（2）　$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ であるから

$1 - 2\sin^2 x + \sin x \geqq 0$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 \leqq 0$

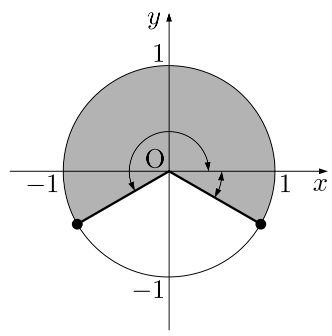
$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) \leqq 0$

よって，$-\dfrac{1}{2} \leqq \sin x \leqq 1$

ここで，$\sin x \leqq 1$ は，任意の x について成り立つので

$\sin x \geqq -\dfrac{1}{2}$

これより，$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi \leqq x < 2\pi}$



8.　左辺 $= \cos\alpha\cos\beta + i\ \cos\alpha\sin\beta$

$\qquad + i\ \sin\alpha\cos\beta + i^2\ \sin\alpha\sin\beta$

$= \cos\alpha\cos\beta + i\ \cos\alpha\sin\beta$

$\qquad + i\ \sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (i^2 = -1)$

$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$\qquad + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$

$= \cos(\alpha + \beta) + i\ \sin(\alpha + \beta) =$ 右辺

■