4章　積分の応用

§1　面積・曲線の長さ・体積 (p.115〜p.124)

問 1

（1）　2 曲線の交点を求めると

$x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2$

$2x^2 = x^2 + 4$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$-2 \leqq x \leqq 2$ において，$\frac{1}{2}x^2 \geqq x^2$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 - x^2\right) dx \\ &= \int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx \\ &= 2\int_{0}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx \\ &= 2\left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_0^2 \\ &= 2\left(-\frac{1}{6}\cdot 2^3 + 2\cdot 2\right) \\ &= 2\left(-\frac{4}{3} + 4\right) \\ &= 2\cdot\frac{8}{3} = \mathbf{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

（2）　直線の方程式は

$y - 2 = \frac{2-(-2)}{4-0}(x-4)$

$y = x - 4 + 2$

$y = x - 2$

$0 \leqq x \leqq 4$ において，$\sqrt{x} \geqq x - 2$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{0}^{4} \{\sqrt{x} - (x-2)\}\, dx \\ &= \int_0^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^4 \\ &= \frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - \frac{1}{2}\cdot 4^2 + 2\cdot 4 \\ &= \frac{16}{3} - 8 + 8 = \mathbf{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

問 2

（1）　2 曲線の交点を求めると

$x^2 = x^2 - 2x + 2$

$2x = 2$

$x = 1$

$-1 \leqq x \leqq 1$ において，$x^2 - 2x + 2 \geqq x^2$

$1 \leqq x \leqq 2$ において，$x^2 \geqq x^2 - 2x + 2$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x + 2 - x^2)\, dx \\ &\qquad + \int_1^2 \{x^2 - (x^2 - 2x + 2)\}\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (-2x+2)\, dx + \int_1^2 (2x-2)\, dx \\ &= 2\int_0^1 2\, dx + 2\int_1^2 (x-1)\, dx \\ &= 2\Big[2x\Big]_0^1 + 2\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^2 \\ &= 2(2\cdot 1) + 2\left\{\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^1 - 1\right)\right\} \\ &= 4 + 2\left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= 4 + 2\cdot\frac{1}{2} = 4 + 1 = \mathbf{5} \end{aligned}$$

（2）　曲線と直線 $y = x - 1$ の交点を求めると

$\frac{2}{x} = x - 1$

$2 = x^2 - x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$x \geqq 1$ より，$x = 2$

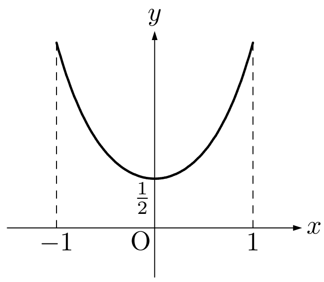
$1 \leqq x \leqq 2$ において，$\frac{2}{x} \geqq x - 1$

$1 \leqq x \leqq 4$ において，$x - 1 \geqq \frac{2}{x}$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left\{\frac{2}{x} - (x-1)\right\} dx \\ &\qquad + \int_2^4 \left(x - 1 - \frac{2}{x}\right) dx \\ &= \left[2\log|x| - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2 \\ &\qquad + \left[\frac{1}{2}x^2 - x - 2\log|x|\right]_2^4 \\ &= \left(2\log 2 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\right) \\ &\qquad - \left(2\log 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1\right) \\ &\quad + \left\{\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 - 4 - 2\log 4\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 - 2\log 2\right)\right\} \\ &= 2\log 2 - 2 + 2 - 0 + \frac{1}{2} - 1 \\ &\qquad + (8 - 4 - 2\log 2^2 - 2 + 2 + 2\log 2) \\ &= \frac{1}{2} + 3 = \mathbf{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

問 3



$$y' = \frac{2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{-2x}}{4}$$
$$= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

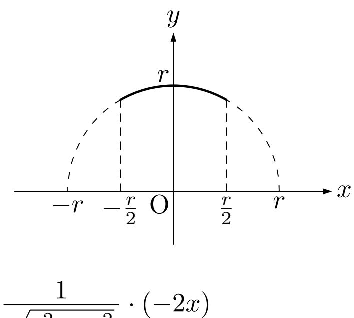
よって

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)^2$$
$$= 1 + \frac{1}{4}(e^{4x} - 2e^{2x}e^{-2x} + e^{-4x})$$
$$= \frac{1}{4}(4 + e^{4x} - 2 + e^{-4x})$$
$$= \frac{1}{4}(e^{4x} + 2 + e^{-4x})$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})^2$$

したがって，曲線の長さを l とすると

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})\, dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})\, dx$$
$$= \int_{0}^{1} (e^{2x} + e^{-2x})\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}r^{-2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})}$$

問 4



$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

よって

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2$$
$$= \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}$$
$$= \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

したがって，曲線の長さを l とすると

$$l = \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$
$$= \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$
$$= \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \frac{|r|}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$
$$= \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \quad (r > 0 \text{ より})$$
$$= 2r\int_{0}^{\frac{r}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$
$$= 2r\left[\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_0^{\frac{r}{2}}$$
$$= 2r\left(\sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1} 0\right)$$
$$= 2r \cdot \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r}$$

問 5

この立体を，点 x $(-r < x < r)$ で，x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口は，直角二等辺三角形であるから，その面積を $S(x)$ とすると

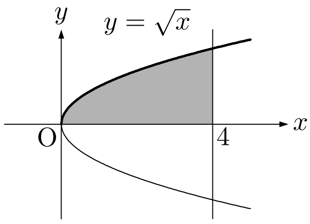
$$S(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{r^2 - x^2})^2$$
$$= \frac{1}{2}(r^2 - x^2)$$

よって

$$V = \int_{-r}^{r} S(x)\, dx$$
$$= \int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - x^2)\, dx$$
$$= 2\int_{0}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - x^2)\, dx$$
$$= \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$
$$= \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r$$
$$= r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \boldsymbol{\frac{2}{3}r^3}$$

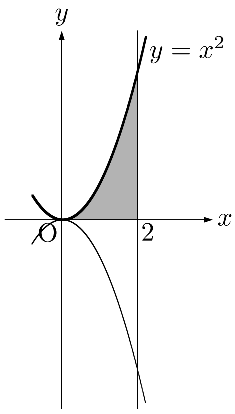
問 6

（1）



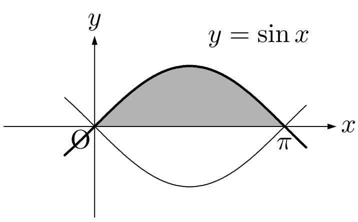
$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^4 y^2\,dx \\
&= \pi\int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx \\
&= \pi\int_0^4 x\,dx \\
&= \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 \\
&= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^2 = \boldsymbol{8\pi}
\end{aligned}
$$

（2）



$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^2 y^2\,dx \\
&= \pi\int_0^2 (x^2)^2\,dx \\
&= \pi\int_0^2 x^4\,dx \\
&= \pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 \\
&= \pi\cdot\frac{1}{5}\cdot 2^5 = \boldsymbol{\frac{32}{5}\pi}
\end{aligned}
$$

（3）



$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^\pi y^2\,dx \\
&= \pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx \\
&= \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}
\end{aligned}
$$

■