3章　積分法

§ 2　積分の計算　(p.97〜p.111)

教科書にしたがって，積分定数 C は省略

問 1

（1）　$1+\sin x = t$ とおくと，$\cos x\,dx = dt$

よって

$$\text{与式} = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1+\sin x)^4}$$

（2）　$3x+1 = t$ とおくと，$3\,dx = dt$ より，$dx = \frac{1}{3}dt$

よって

$$\text{与式} = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}t\sqrt{t} = \boldsymbol{\frac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}}$$

（3）　$x^2+1 = t$ とおくと，$2x\,dx = dt$ より，$x\,dx = \frac{1}{2}dt$

よって

$$\text{与式} = \int t^4\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^4\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}t^5 = \boldsymbol{\frac{1}{10}(x^2+1)^5}$$

（4）　$x^2 = t$ とおくと，$2x\,dx = dt$ より，$x\,dx = \frac{1}{2}dt$

よって

$$\text{与式} = \int e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}\cdot e^t = \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{x^2}}$$

問 2

（1）
$$\text{与式} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \boldsymbol{\log|\sin x|}$$

（2）
$$\text{与式} = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \log|e^x+1| = \boldsymbol{\log(e^x+1)}\quad (e^x+1>0\ \text{より})$$

（3）
$$\text{与式} = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+1| = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log(x^2+1)}\quad (x^2+1>0\ \text{より})$$

問 3

（1）　$3x+2 = t$ とおくと，$3\,dx = dt$ より，$dx = \frac{1}{3}dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to 1$
t	$2 \to 5$

よって

$$\text{与式} = \int_2^5 t^{-2}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{t}\right]_2^5 = \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} = \boldsymbol{\frac{1}{10}}$$

（2）　$\log x = t$ とおくと，$\frac{1}{x}\,dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$e \to e^2$
t	$1 \to 2$

よって

$$\text{与式} = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \Big[\log|t|\Big]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \boldsymbol{\log 2}$$

（3）　$\sin x = t$ とおくと，$\cos x\,dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

よって

$$\text{与式} = \int_0^1 t^4\,dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}(1^5-0^5) = \boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

問 4　教科書の $G(x)$ 等をそのまま使用.

（1）　$f(x)=x,\ \ g(x)=\sin x$ とすると

$$G(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x$$
$$f'(x) = 1$$

よって

$$\text{与式} = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int\cos x\,dx = \boldsymbol{-x\cos x+\sin x}$$

（2）　$f(x)=x,\ \ g(x)=e^x$ とすると

$$G(x) = \int e^x\,dx = e^x$$
$$f'(x) = 1$$

よって

$$\text{与式} = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx$$
$$= \boldsymbol{xe^x - e^x}$$
$$= \boldsymbol{(x-1)e^x}$$

問 5 教科書の $F(x)$ 等をそのまま使用.

（1） $f(x) = x,\ \ g(x) = \log x$ とすると

$$F(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2$$
$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

よって

$$\text{与式} = \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2}\int x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^2(2\log x - 1)}$$

（2） $f(x) = x^2,\ \ g(x) = \log x$ とすると

$$F(x) = \int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3$$
$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

よって

$$\text{与式} = \frac{1}{3}x^3 \log x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x^3$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{9}x^3(3\log x - 1)}$$

問 6

（1）
$$\text{与式} = x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int (x^2)' \cdot (-e^{-x}) \, dx$$
$$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x} \, dx$$
$$= -x^2e^{-x} + 2\left\{x \cdot (-e^{-x}) - \int x' \cdot (-e^{-x}) \, dx\right\}$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x} \, dx$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}$$
$$= \boldsymbol{-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}}$$

（2）
$$\text{与式} = x^2 \cdot (-\cos x) - \int (x^2)' \cdot (-\cos x) \, dx$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x \, dx$$
$$= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int x' \cdot \sin x \, dx\right)$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x \, dx$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2 \cdot (-\cos x)$$
$$= \boldsymbol{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x}$$

（3）
$$\text{与式} = \int 1 \cdot (\log x)^2 \, dx$$
$$= x(\log x)^2 - \int x \cdot \{(\log x)^2\}' \, dx$$
$$= x(\log x)^2 - \int x\left(2\log x \cdot \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2\int \log x \, dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) \quad \text{（例題 5 より）}$$
$$= \boldsymbol{x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x}$$

問 7

（1）
$$\text{与式} = \left[x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 x' \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \, dx$$
$$= \left(1 \cdot \frac{1}{2}e^2 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} \, dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - e^0)$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^2 + 1)}$$

（2）
$$\text{与式} = \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x' \cdot \sin x \, dx$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} - 0\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$
$$= \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \{0 - (-1)\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}$$

（3）
$$\text{与式} = \Big[x\log x\Big]_1^2 - \int_1^2 x \cdot (\log x)' \, dx$$
$$= (2\log 2 - \log 1) - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= 2\log 2 - \int_1^2 dx$$
$$= 2\log 2 - \Big[x\Big]_1^2$$
$$= 2\log 2 - (2 - 1)$$
$$= \boldsymbol{2\log 2 - 1}$$

（4） 与式 $= \left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2)' \cdot \sin x\,dx$

$$= \left(\frac{\pi^2}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$
$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi^2}{4} + 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{4} + 2(0-1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4} - 2}$$

問 8

（1） $x-2=t$ とおくと，$dx=dt$，$x=t+2$

よって

与式 $= \int \frac{t+2}{t^2}\,dt$
$$= \int\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\right)dt$$
$$= \int\left(t^{-1} + 2t^{-2}\right)dt$$
$$= \log|t| + 2\cdot(-t^{-1})$$
$$= \log|t| - \frac{2}{t}$$
$$= \boldsymbol{\log|x-2| - \frac{2}{x-2}}$$

（2） $\sqrt{x+1} = t$ とおくと，$x+1=t^2$ であるから，$dx=2tdt$，$x=t^2-1$

よって

与式 $= \int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt$
$$= 2\int(t^2-1)\,dt$$
$$= 2\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)$$
$$= \frac{2}{3}t(t^2-3)$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\{(\sqrt{x+1})^2 - 3\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}}$$

〔別解〕

$x+1=t$ とおくと，$dx=dt$，$x=t-1$

よって

与式 $= \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt$
$$= \int\left(\frac{t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$$
$$= \int(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\,dt$$
$$= \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}(t-3)$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\{(x+1)-3\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}}$$

（3） $\sqrt{x+3} = t$ とおくと，$x+3=t^2$ であるから，$dx=2tdt$，$x^2=(t^2-3)^2$

よって

与式 $= \int (t^2-3)^2\cdot t\cdot 2t\,dt$
$$= 2\int t^2(t^2-3)^2\,dt$$
$$= 2\int t^2(t^4-6t^2+9)\,dt$$
$$= 2\int(t^6-6t^4+9t^2)\,dt$$
$$= 2\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + 3t^3\right)$$
$$= \frac{2}{35}t^3(5t^4-42t^2+105)$$
$$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}\{5(\sqrt{x+3})^4 - 42(\sqrt{x+3})^2 + 105\}$$
$$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}\{5(x+3)^2 - 42(x+3) + 105\}$$
$$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3} \times\{5(x^2+6x+9) - 42x - 126 + 105\}$$
$$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3} \times\{5x^2+30x+45-42x-126+105\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{35}(x+3)(5x^2-12x+24)\sqrt{x+3}}$$

〔別解〕

$x+3=t$ とおくと，$dx=dt$，$x^2=(t-3)^2$

よって

与式 $= \int (t-3)^2\sqrt{t}\,dt$
$$= \int(t^2-6t+9)t^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= \int(t^{\frac{5}{2}} - 6t^{\frac{3}{2}} + 9t^{\frac{1}{2}})\,dt$$
$$= \left(\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - 6\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 9\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= \frac{2}{35}t^{\frac{3}{2}}(5t^2-42t+105)$$
$$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}\{5(x+3)^2 - 42(x+3) + 105\}$$
$$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3} \times\{5(x^2+6x+9) - 42x - 126 + 105\}$$
$$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3} \times\{5x^2+30x+45-42x-126+105\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{35}(x+3)(5x^2-12x+24)\sqrt{x+3}}$$

（4）　$2x-1=t$ とおくと，$2dx=dt$ より，$dx=\dfrac{dt}{2}$，$x=\dfrac{t+1}{2}$

よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int 4\cdot\frac{t+1}{2}t^7\cdot\frac{dt}{2}\\
&= \int t^7(t+1)\,dt\\
&= \int (t^8+t^7)\,dt\\
&= \frac{1}{9}t^9+\frac{1}{8}t^8\\
&= \frac{1}{72}t^8(8t+9)\\
&= \frac{1}{72}(2x-1)^8\{8(2x-1)+9\}\\
&= \frac{1}{72}(2x-1)^8(16x-8+9)\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{72}(16x+1)(2x-1)^8}
\end{aligned}
$$

問 9

（1）　$x=2\sin\theta$ とおくと，$dx=2\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0\ \to\ 2$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$

よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\theta\geqq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&= 2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\pi}
\end{aligned}
$$

（2）　$x=2\sin\theta$ とおくと，$dx=2\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{6}$

よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}}4\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\theta\geqq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&= 2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\
&= 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}
\end{aligned}
$$

（3）　$x=3\sin\theta$ とおくと，$dx=3\cos\theta d\theta$

$\sqrt{9-x^2}$ は偶関数であるから

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = 2\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$$

このとき，x と θ の対応は

x	$0\ \to\ 3$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$

よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}\cdot 3\cos\theta\,d\theta\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\
&= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\theta\geqq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
&= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\\
&= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
&= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&= 9\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 9\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{9}{2}\pi}
\end{aligned}
$$

問 10

$I=\int e^{ax}\sin bx\,dx$ とおくと

$$I=e^{ax}\cdot\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)-\int(e^{ax})'\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)dx$$
$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$
$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx$$
$$+\frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\right)$$
$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}I$$

よって

$$b^2I=-ba^{ax}\cos bx+ae^{ax}\sin bx-a^2I$$
$$(a^2+b^2)I=e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)$$
$$\boldsymbol{I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)}$$

問 11

（1） 与式 $=\dfrac{e^{2x}}{2^2+3^2}(2\cos 3x+3\sin 3x)$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{13}e^{2x}(2\cos 3x+3\sin 3x)}$$

（2） 与式 $=\dfrac{e^{3x}}{3^2+4^2}(3\sin 4x-4\cos 4x)$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{25}e^{3x}(3\sin 4x-4\cos 4x)}$$

問 12

（1） 分子を分母で割ると

```
             x^2    - 1
        ________________
x^2 + 1 ) x^4
          x^4  + x^2
          ______________
              - x^2
              - x^2  - 1
              __________
                      1
```

よって

与式 $=\displaystyle\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{3}x^3-x+\tan^{-1}x}$$

（2） まず，部分分数に分解する．

$\dfrac{2x+1}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{a}{x-4}+\dfrac{b}{x+1}$ とおき, 両辺に $(x-4)(x+1)$ をかけると

$$2x+1=a(x+1)+b(x-4)$$
$$2x+1=ax+a+bx-4b$$
$$2x+1=(a+b)x+(a-4b)$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases}a+b=2\\a-4b=1\end{cases}$$

これを解いて，$a=\dfrac{9}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

よって

与式 $=\displaystyle\int\left(\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x-4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\frac{9}{5}\int\frac{1}{x-4}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\frac{9}{5}\int\frac{(x-4)'}{x-4}dx+\frac{1}{5}\int\frac{(x+1)'}{x+1}dx$$
$$\boldsymbol{=\frac{9}{5}\log|x-4|+\frac{1}{5}\log|x+1|}$$

問 13

（1） 両辺に $x^2(x-1)$ をかけると

$$1=(ax+b)(x-1)+cx^2$$
$$1=ax^2+(-a+b)x-b+cx^2$$
$$1=(a+c)x^2+(-a+b)x-b$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases}a+c=0\\-a+b=0\\-b=1\end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=-1}$，$\boldsymbol{c=1}$

（2） 与式 $=\displaystyle\int\left(\frac{-x-1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$$=-\int\frac{x+1}{x^2}dx+\int\frac{(x-1)'}{x-1}dx$$
$$=-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\log|x-1|$$
$$=-\left(\log|x|-\frac{1}{x}\right)+\log|x-1|$$
$$=\log|x-1|-\log|x|+\frac{1}{x}$$
$$\boldsymbol{=\log\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}}$$

問 14

$\dfrac{1}{x^2-a^2}$ を部分分数分解する．

$\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{k}{x+a}+\dfrac{l}{x-a}$ とおき，両辺に $(x+a)(x-a)$ をかけると

$$1=k(x-a)+l(x+a)$$
$$1=kx-ka+lx+la$$
$$1=(k+l)x+(-ka+la)$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases}k+l=0 & \cdots① \\ -ka+la=1 & \cdots②\end{cases}$$

①より，$l=-k$

これを②に代入して

$$-ka-ka=1$$
$$-2ka=1$$
$$k=-\frac{1}{2a}$$

これより，$l=\dfrac{1}{2a}$ であるから

$$\text{左辺} = \int \frac{1}{(x+a)(x-a)}\,dx$$
$$= \int \left(-\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x+a} + \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2a}\int \left\{-\frac{(x+a)'}{x+a} + \frac{(x-a)'}{x-a}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{2a}\left(-\log|x+a| + \log|x-a|\right)$$
$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| = \text{右辺}$$

問 15　求める図形の面積を S とする．

（1）　$\sqrt{1-x^2}$ は，偶関数であるから

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sin^{-1}\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}}$$

（2）　$\sqrt{1-x^2}$ は，偶関数であるから

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

ここで，$x = \sin\theta$ とおくと，$dx = \cos\theta\,d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \to \frac{1}{2}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

よって

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\,d\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}\text{で, }\cos\theta \geqq 0\right)$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}}$$

問 16

$I = \int \sqrt{x^2+A}\,dx$ とおくと

$$I = \int 1\cdot\sqrt{x^2+A}\,dx$$
$$= x\sqrt{x^2+A} - \int x(\sqrt{x^2+A})'\,dx$$
$$= x\sqrt{x^2+A} - \int x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+A}}\cdot 2x\,dx$$
$$= x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$$
$$= x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{(x^2+A)-A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$$
$$= x\sqrt{x^2+A} - \left(\int\sqrt{x^2+A}\,dx - \int\frac{A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx\right)$$
$$= x\sqrt{x^2+A} - I + A\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$$
$$= x\sqrt{x^2+A} - I + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

よって，$2I = x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$ であるから

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)}$$

問 17

（1）　$$\text{与式} = \int_2^3 \sqrt{(x-2)^2-4+5}\,dx$$
$$= \int_2^3 \sqrt{(x-2)^2+1}\,dx$$

$x-2 = t$ とおくと，$dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$2 \to 3$
t	$0 \to 1$

よって

$$\text{与式} = \int_0^1 \sqrt{t^2+1}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1} + \log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1\sqrt{1+1} + \log\left|1+\sqrt{1+1}\right|\right) - \left(\log\left|0+\sqrt{0+1}\right|\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \log|1+\sqrt{2}| - \log|1|)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right\}}$$

（2）　$$\text{与式} = \int_{-1}^0 \sqrt{(x+1)^2-1+3}\,dx$$
$$= \int_{-1}^0 \sqrt{(x+1)^2+2}\,dx$$

$x+1 = t$ とおくと，$dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$-1 \to 0$
t	$0 \to 1$

よって

$$与式 = \int_0^1 \sqrt{t^2+2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+2} + 2\log\left|t+\sqrt{t^2+2}\right|\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1\sqrt{1+2} + 2\log\left|1+\sqrt{1+2}\right|\right) - \left(2\log\left|0+\sqrt{0+2}\right|\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2\log\left|1+\sqrt{3}\right| - 2\log\left|\sqrt{2}\right|)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \log(1+\sqrt{3}) - \log(\sqrt{2})$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \log\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2} + \log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$$

（3） $$与式 = \int_2^3 \sqrt{-(x^2-4x)}\,dx$$
$$= \int_2^3 \sqrt{-(x-2)^2+4}\,dx$$
$$= \int_2^3 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$$

$x-2=t$ とおくと，$dx=dt$
また，x と t の対応は

x	$2 \to 3$
t	$0 \to 1$

よって

$$与式 = \int_0^1 \sqrt{2^2-t^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{4-t^2} + 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1\sqrt{4-1} + 4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right) - 4\sin^{-1}0\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 4\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}}$$

（4） $$与式 = \int_0^1 \sqrt{-(x^2+2x)+3}\,dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{-(x+1)^2+1+3}\,dx$$
$$= \int_2^3 \sqrt{-(x+1)^2+4}\,dx$$
$$= \int_2^3 \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$$

$x+1=t$ とおくと，$dx=dt$
また，x と t の対応は

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 2$

よって

$$与式 = \int_1^2 \sqrt{2^2-t^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{4-t^2} + 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(2\sqrt{4-4} + 4\sin^{-1}1\right) - \left(1\sqrt{4-1} + 4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{4\cdot\frac{\pi}{2} - \left(\sqrt{3} + 4\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\pi - \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

問 18

（1） $$与式 = \frac{1}{2}\int \{\cos(4x+3x) - \sin(4x-3x)\}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (\sin 7x - \sin x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x + \cos x\right)$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x}$$

（2） $$与式 = \frac{1}{2}\int \{\cos(3x+2x) + \cos(3x-2x)\}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x}$$

（3） $$与式 = -\frac{1}{2}\int \{\cos(3x+5x) - \cos(3x-5x)\}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int \{\cos 8x - \cos(-2x)\}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int (\cos 8x - \cos 2x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x}$$

（4） $$与式 = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$\sin x = t$ とおくと，$\cos x\,dx = dt$ であるから

$$与式 = \int \frac{dt}{1-t^2}$$
$$= \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)}$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt$$

（部分分数分解の過程は省略）

$$= \frac{1}{2}(-\log|1-t| + \log|1+t|)$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$ （真数 > 0 より）

問 19

（1）　与式 $= \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} = \boldsymbol{\dfrac{16}{35}}$

（2）　与式 $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x(1 - \sin^2 x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x - \sin^6 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{16}\pi - \frac{5}{32}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{32}\pi}$$

■