3章　積分法

§1　不定積分と定積分　(p.78〜p.94)

問1　C は積分定数

（1）　$与式 = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + C$

$= \boldsymbol{\frac{1}{5}x^5 + C}$

（2）　$与式 = \int x^{-3}\,dx$

$= \frac{1}{-3+1}x^{-3+1}$

$= -\frac{1}{2}x^{-2} + C$

$= \boldsymbol{-\frac{1}{2x^2} + C}$

（3）　$与式 = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx$

$= \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}$

$= \frac{1}{\frac{4}{3}}x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} + C$

$= \boldsymbol{\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C}$

問2　C は積分定数

（1）　$\int (x^3 + 3x^2 - 2x + 4)\,dx$

$= \int x^3\,dx + 3\int x^2\,dx - 2\int x + 4\int dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + 3\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 4x + C$

$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 + 4x + C}$

（2）　$\int (3\sin x + 4e^x)\,dx$

$= 3\int \sin x\,dx + 4\int e^x\,dx$

$= 3\cdot(-\cos x) + 4e^x + C$

$= \boldsymbol{-3\cos x + 4e^x + C}$

（3）　$\int \left(6\cos x + \frac{2}{x}\right)dx$

$= 6\int \cos x\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx$

$= \boldsymbol{6\sin x + 2\log|x| + C}$

（4）　$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

$= \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \int x^2\,dx + 2\int dx + \int x^{-2}\,dx$

$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C}$

問3　C は積分定数

（1）　$\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + C$ より

$与式 = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}(5x-3)^5 + C$

$= \boldsymbol{\frac{1}{25}(5x-3)^5 + C}$

（2）　$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ より

$与式 = \frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) + C$

$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\cos 2x + C}$

（3）　$\int e^x\,dx = e^x + C$ より

$与式 = \frac{1}{4}\cdot e^{4x+1} + C$

$= \boldsymbol{\frac{1}{4}e^{4x+1} + C}$

問4

（1）　$x_k = \frac{k}{n},\quad \Delta x_k = \frac{1}{n}\quad (n = 1, 2, \cdots, n)$ より,

$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$

$= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2}$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

（2）　$\Delta x_k \to 0$ のとき，$n \to \infty$ であるから

$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$

問5

（1）　$与式 = 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 dx$

$= 2\cdot\frac{1}{2} + 1(1-0)$

$= 1 + 1 = \mathbf{2}$

（2） $$\begin{aligned}与式 &= 5\int_0^1 x^2\,dx - 3\int_0^1 x + 2\int_0^1 dx\\ &= 5\cdot\frac{1}{3} - 3\cdot\frac{1}{2} + 2(1-0)\\ &= \frac{5}{3} - \frac{3}{2} + 2\\ &= \frac{10-9+12}{6} = \mathbf{\frac{13}{6}}\end{aligned}$$

問 6

（1） $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ であるから

$$\begin{aligned}与式 &= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}\\ &= -\cos\pi - (-\cos 0)\\ &= -(-1) - (-1) = \mathbf{2}\end{aligned}$$

（2） $$\begin{aligned}\int\sqrt{x}\,dx &= \int x^{\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}+1} + C\\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}与式 &= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}\cdot 1\sqrt{1} - 0 = \mathbf{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

問 7

（1） $$\begin{aligned}与式 &= 4\int_0^2 x^3\,dx - 3\int_0^2 x^2\,dx + 4\int_0^2 x\,dx - \int_0^2 dx\\ &= 4\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 - 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + 4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 - \Big[x\Big]_0^2\\ &= \Big[x^4\Big]_0^2 - \Big[x^3\Big]_0^2 + 2\Big[x^2\Big]_0^2 - \Big[x\Big]_0^2\\ &= (2^4-0) - (2^3-0) + 2(2^2-0) - (2-0)\\ &= 16 - 8 + 8 - 2 = \mathbf{14}\end{aligned}$$

〔または〕

$$\begin{aligned}与式 &= \Big[x^4 - x^3 + 2x^2 - x\Big]_0^2\\ &= (2^4 - 2^3 + 2\cdot 2^2 - 2) - 0\\ &= 16 - 8 + 8 - 2 = \mathbf{14}\end{aligned}$$

（2） $$\begin{aligned}与式 &= \int_1^4 \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)dx\\ &= \int_1^4 x\,dx + 2\int_1^4 dx + \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 + \Big[2x\Big]_1^4 + \Big[\log|x|\Big]_1^4\\ &= \left(8 - \frac{1}{2}\right) + (8-2) + (\log 4 - \log 1)\\ &= \frac{15}{2} + 6 + \log 2^2\\ &= \mathbf{\frac{27}{2} + 2\log 2}\end{aligned}$$

〔または〕

$$\begin{aligned}与式 &= \int_1^4 \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)dx\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + \log|x|\right]_1^4\\ &= (8 + 8 + \log|4|) - \left(\frac{1}{2} + 2 + \log|1|\right)\\ &= 14 - \frac{1}{2} + \log 2^2\\ &= \mathbf{\frac{27}{2} - 2\log 2}\end{aligned}$$

（3） $$\begin{aligned}与式 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \sin x\,dx - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \cos x\,dx\\ &= \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} - 2\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\\ &= -\left(\cos\frac{5}{4}\pi - \cos\frac{\pi}{4}\right)\\ &\qquad - 2\left(\sin\frac{5}{4}\pi - \sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= -(-\sqrt{2}) - 2(-\sqrt{2})\\ &= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \mathbf{3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

〔または〕

$$\begin{aligned}与式 &= \Big[-\cos x - 2\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\\ &= \left(-\cos\frac{5}{4}\pi - 2\sin\frac{5}{4}\pi\right)\\ &\qquad - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \mathbf{3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

（4） 与式 $= \int_{-1}^{1} e^x\,dx + \int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$

$= \Big[\, e^x \,\Big]_{-1}^{1} + \Big[-e^{-x} \Big]_{-1}^{1}$

$= (e - e^{-1}) + \{-e^{-1} - (-e)\}$

$= 2e - 2e^{-1}$

$= \boldsymbol{2(e - e^{-1})}$

〔または〕

与式 $= \Big[\, e^x - e^{-x} \,\Big]_{-1}^{1}$

$= (e^1 - e^{-1}) - (e^{-1} - e^1)$

$= 2e - 2e^{-1}$

$= \boldsymbol{2(e - e^{-1})}$

問 8

（1） $x^3,\ x$ は奇関数，$x^2,\ 2$ は偶関数であるから

与式 $= 2\int_0^1 (-x^2 + 2)\,dx$

$= 2\Big[-\dfrac{1}{3}x^3 + 2x \Big]_0^1$

$= 2\Big\{\Big(-\dfrac{1}{3} + 2\Big) - 0\Big\}$

$= 2 \cdot \dfrac{5}{3} = \boldsymbol{\dfrac{10}{3}}$

（2） $\sin x$ は奇関数，$\cos x$ は偶関数であるから

与式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$

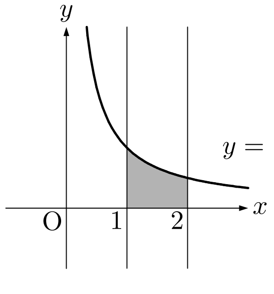
$= 2\Big[\, \sin x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= 2\Big(\sin\dfrac{\pi}{4} - \sin 0\Big)$

$= 2\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

問 9

（1） 区間 $[1,\ 2]$ において，$\dfrac{1}{x} > 0$ であるから，求める図形の面積を S とすると



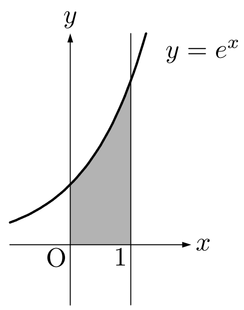
$S = \int_1^2 \dfrac{1}{x}\,dx$

$= \Big[\, \log|x| \,\Big]_1^2$

$= \log|2| - \log|1|$

$= \log 2 - 0 = \boldsymbol{\log 2}$

（2） 区間 $[0,\ 1]$ において，$e^x > 0$ であるから，求める図形の面積を S とすると



$S = \int_0^1 e^x\,dx$

$= \Big[\, e^x \,\Big]_0^1$

$= e^1 - e^0 = \boldsymbol{e - 1}$

問 10

曲線と x 軸との交点を求めると

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

よって，$x = 0,\ 2$

区間 $[0,\ 2]$ において，$x^2 - 2x \leqq 0$ であるから，求める図形の面積を S とすると

$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$

$= -\Big[\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 \Big]_0^2$

$= -\Big(\dfrac{8}{3} - 4\Big)$

$= -\Big(-\dfrac{4}{3}\Big) = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

問 11 C は積分定数

（1） 与式 $= \int \Big(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \cos x\Big)\,dx$

$= \boldsymbol{\tan x + \sin x + C}$

（2） 与式 $= \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx$$

$$= \boldsymbol{-\cot x - x + C}$$

問 12 C は積分定数

（1） 与式 $= \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}}$

$$= \boldsymbol{\sin^{-1}\frac{x}{3} + C}$$

（2） 与式 $= \boldsymbol{\log\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| + C}$

（3） 与式 $= \displaystyle\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx$

$$= \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1^2}\right) dx$$

$$= \boldsymbol{x - \tan^{-1} x + C}$$

問 13

（1） 与式 $= \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}\,dx$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{3}} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$$

（2） 与式 $= \displaystyle\Big[\log\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|\Big]_0^2$

$$= \log\left|2+\sqrt{2^2+4}\right| - \log\left|0+\sqrt{0+4}\right|$$

$$= \log(2+2\sqrt{2}) - \log 2$$

$$= \log\frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})}$$