3章　積分法

§1　不定積分と定積分　(p.95〜p.96)

練習問題 1-A

1.　※ C は積分定数

（1）　与式 $= \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) dx$

$= \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} - 3x^{-2}\right) dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \log|x| - \frac{3}{-2+1}x^{-2+1} + C$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 - 2x + \log|x| + \frac{3}{x} + C}$

（2）　与式 $= \int \left\{(2\sqrt{x})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right\} dx$

$= \int \left(4x - 4 + \frac{1}{x}\right) dx$

$= \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} - 3x^{-2}\right) dx$

$= 2x^2 - 4x + \log|x| + C$

$= \boldsymbol{2x^2 - 4x + \log x + C}$　($x > 0$ より)

（3）　与式 $= \boldsymbol{\frac{1}{5}e^{5x} - \frac{1}{3}\cos 3x + C}$　(p.81　例題 2)

（4）　与式 $= \boldsymbol{\frac{1}{4}\log|4x + 5| + C}$　(p.81　例題 2)

（5）　与式 $= \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{5})^2}$

$= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + C}$

（6）　与式 $= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$

$= \log|x| + \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$

$= \boldsymbol{\log\left|x(x + \sqrt{x^2+1})\right| + C}$

2.（1）　与式 $= \int_0^2 (3x^3 - 6x^2)\, dx$

$= \left[\frac{3}{4}x^4 - 2x^3\right]_0^2$

$= \frac{3}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3$

$= 12 - 16 = \boldsymbol{-4}$

（2）　与式 $= \int_1^4 \left(x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

$= \int_1^4 (x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}})\, dx$

$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4 \cdot 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$

$= \left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 8\sqrt{x}\right]_1^4$

$= \left(\frac{2}{5} \cdot 4^2\sqrt{4} - 2 \cdot 4\sqrt{4} - 8\sqrt{4}\right)$

$\quad - \left(\frac{2}{5} \cdot 1^2\sqrt{1} - 2 \cdot 1\sqrt{1} + 8\sqrt{1}\right)$

$= \left(\frac{64}{5} - 16 + 16\right) - \left(\frac{2}{5} - 2 + 8\right)$

$= \frac{62}{5} - 6 = \boldsymbol{\frac{32}{5}}$

（3）　与式 $= \left[e^x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= e^{\frac{\pi}{2}} + \sin\frac{\pi}{2} - (e^0 + \sin 0)$

$= e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - 1 - 0 = \boldsymbol{e^{\frac{\pi}{2}}}$

（4）　与式 $= 2\int_0^1 (5x^4 + x^2 + 1)\, dx$

$= 2\left[x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1$

$= 2\left(1 + \frac{1}{3} + 1\right) = 2 \cdot \frac{7}{3} = \boldsymbol{\frac{14}{3}}$

（5）　$y = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}$ は偶関数であるから

与式 $= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$

$= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - x^2}}$

$= 2\left[\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1$

$= 2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin^{-1} 0\right)$

$= 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

（6）　与式 $= \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + \frac{1}{3}}\, dx$

$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\, dx$

$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{3}\tan^{-1}\sqrt{3}x\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}(\sqrt{3}\tan^{-1}\sqrt{3} - 0)$

$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$

3.　$\int_{-1}^1 f(x)\, dx = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c)\, dx$

$= 2\int_0^1 (ax^2 + c)\, dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}ax^3 + cx\right]_0^1$

$= 2\left(\frac{1}{3}a + c\right) = \frac{2}{3}a + 2c$

よって，$\frac{2}{3}a + 2c = 1 \cdots$①

$\int_{-1}^1 xf(x)\, dx = \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2 + cx)\, dx$

$= 2\int_0^1 bx^2\, dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}bx^3\right]_0^1$

$= 2 \cdot \frac{1}{3}b = \frac{2}{3}b$

よって，$\frac{2}{3}b = 0 \cdots$②

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3+cx^2)\,dx$$
$$= 2\int_0^1 (ax^4+cx^2)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{5}ax^5+\frac{1}{3}cx^3\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{5}a+\frac{1}{3}c\right) = \frac{2}{5}a+\frac{2}{3}c$$

よって，$\dfrac{2}{5}a+\dfrac{2}{3}c = 1 \cdots$ ③

②より，$b=0$

①，③より

$$\begin{cases} 2a+6c=3 \\ 6a+10c=15 \end{cases}$$

これを解いて，$a=\dfrac{15}{4}$，$c=-\dfrac{3}{4}$

以上より，$\boldsymbol{a=\dfrac{15}{4}}$**，**$\boldsymbol{b=0}$**，**$\boldsymbol{c=-\dfrac{3}{4}}$

4. $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$ の証明

$$\text{左辺} = \int \frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (e^x-e^{-x})\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{-1}\cdot e^{-x}\right)+C$$
$$= \frac{e^x+e^{-x}}{2}+C$$
$$= \cosh x + C = \text{右辺}$$

$\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$ の証明

$$\text{左辺} = \int \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (e^x+e^{-x})\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{-1}\cdot e^{-x}\right)+C$$
$$= \frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$$
$$= \sinh x + C = \text{右辺}$$

5. 曲線と x 軸との交点を求めると

$$x^3-x=0$$
$$x(x+1)(x-1)=0$$

よって，$x=0,\ \pm 1$

区間 $[-1,\ 0]$ においては，$y \geqq 0$，区間 $[0,\ 1]$ においては，$y \leqq 0$ であるから，図形の面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx - \int_0^1 (x^3-x)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= -\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

練習問題 1-B

1.

$$\text{左辺} = \int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$
$$= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$
$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$$
$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2\beta^2+2\alpha\beta+2\beta^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2+6\alpha\beta\}$$
$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2)$$
$$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)$$
$$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)^2$$
$$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \text{右辺}$$

〔別解〕

$$(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}$$
$$= (x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)$$

よって

$$\text{左辺} = \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}\,dx$$
$$= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx + \int_\alpha^\beta (\alpha-\beta)(x-\alpha)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta + (\alpha-\beta)\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$
$$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+(\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2$$
$$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$
$$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \text{右辺}$$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ は定数となるので，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = k$ （k は定数）とおくと，$f(x)=3x^2-x+k$ であるから，

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1}(3t^2-t+k)\,dt = k$$
$$2\int_0^1 (3t^2+k)\,dt = k$$
$$2\left[t^3+kt\right]_0^1 = k$$
$$2(1+k)=k$$

よって，$2+2k=k$ より，$k=-2$

したがって，$\boldsymbol{f(x)=3x^2-x-2}$

3. 求める 2 次関数を，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく．

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_x^{x+1}(at^2+bt+c)\,dt$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}at^3+\frac{1}{2}bt^2+ct\right]_x^{x+1}$$
$$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{3}a(x+1)^3+\frac{1}{2}b(x+1)^2+c(x+1) - \left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right)\right\}$$
$$= a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)$$
$$= 2ax+a+b$$

よって，題意より $2ax+a+b=8x-3$ であるから

$$\begin{cases} 2a = 8 \\ a + b = -3 \end{cases}$$

これを解いて，$a = 4,\ b = -7 \cdots$①

また，$f(2) = 0$ であるから，$4a + 2b + c = 0$

これに①を代入して，$16 - 14 + c = 0$，すなわち，$c = -2$

以上より，$\boldsymbol{f(x) = 4x^2 - 7x - 2}$

〔別解〕

求める 2 次関数を，$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく.

また，$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$，すなわち $F'(x) = f(x)$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_x^{x+1} \\ &= \frac{d}{dx}\{F(x+1) - F(x)\} \\ &= \frac{d}{dx}F(x+1) - \frac{d}{dx}F(x) \\ &= F'(x+1)\cdot(x+1)' - F'(x) \\ &= f(x+1) - f(x) \\ &= a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) \end{aligned}$$

以下略.

※ 一般に，$\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$

4. （1）

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt \\ &= -\int_0^{-x} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt \\ &= -S(-x) + S(x) = \text{右辺} \end{aligned}$$

（2） $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ より，$S'(x) = f(x)$

（1）より

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{d}{dx}\{S(x) - S(-x)\} \\ &= S'(x) - S'(-x)\cdot(-x)' \\ &= S'(x) + S'(-x) \\ &= f(x) + f(-x) = \text{右辺} \end{aligned}$$

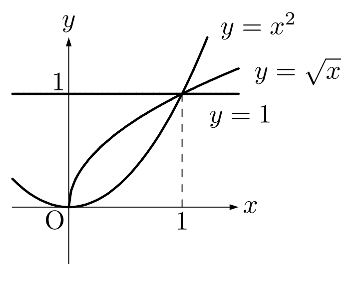
5. （1） $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$x^2 \leqq x^{\frac{1}{2}} \leqq x^0$ であるから

$$x^2 \leqq \sqrt{x} \leqq 1$$

これより，$1 + x^2 \leqq 1 + \sqrt{x} \leqq 2$ となるので

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leqq \frac{1}{1+x^2}$$

（参考）



（2） $y = \dfrac{1}{2}$，$y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$，$y = \dfrac{1}{1+x^2}$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ において連続であり，この区間内に $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} < \dfrac{1}{1+x^2}$ を満たす点 x が存在するので （恒等的に等号が成り立つことはないので）

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[x\Big]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \Big[\tan^{-1} x\Big]_0^1 \\ &= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

以上より

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx < \frac{\pi}{4}$$

6. （1） $\mathrm{PQ} = \sqrt{a^2 - t^2}$ であるから

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{OQP} &= \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PQ} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}t\sqrt{a^2 - t^2}} \end{aligned}$$

$\angle\mathrm{BOP} = \theta$ とおくと

扇形 $\mathrm{OPB} = \dfrac{1}{2}a^2\theta$

ここで，$\triangle\mathrm{OPQ}$ において，$\angle\mathrm{OPQ} = \theta$ であるから

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}} = \frac{t}{a}$$

よって，$\theta = \sin^{-1}\dfrac{t}{a}$

したがって，扇形 $\mathrm{OPB} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}a^2\sin^{-1}\dfrac{t}{a}}$

（2） 与えられた定積分は，$\triangle\mathrm{OQP}$ と扇形 OPB の面積の和を表しているから

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{1}{2}t\sqrt{a^2 - t^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{t}{a} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(t\sqrt{a^2 - t^2} + a^2\sin^{-1}\frac{t}{a}\right)} \end{aligned}$$

■