1章　微分法

§2　いろいろな関数の導関数 (p.28〜p.41)

問 1

(1) $y' = 5(x^2-1)^4\cdot(x^2-1)'$

$= 5(x^2-1)^4\cdot 2x$

$\boldsymbol{= 10x(x^2-1)^4}$

(2) $y' = \cos(x^2+1)\cdot(x^2+1)'$

$= \cos(x^2+1)\cdot 2x$

$\boldsymbol{= 2x\cos(x^2+1)}$

(3) $y' = x^{x^2}\cdot(x^2)'$

$= e^{x^2}\cdot 2x$

$\boldsymbol{= 2xe^{x^2}}$

(4) $y = (e^x+1)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \dfrac{1}{2}(e^x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(e^x+1)'$

$= \dfrac{1}{2(e^x+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^x$

$= \boldsymbol{\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}}$

問 2

(1) $y' = 2\sin x\cdot(\sin x)'$

$= 2\sin x\cdot\cos x$

$= 2\sin x\cos x$

$\boldsymbol{= \sin 2x}$

(2) $y' = 3\tan^2 x\cdot(\tan x)'$

$= 3\tan^2 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}}$

問 3

(1) $y' = 3\tan^2 2x\cdot(\tan 2x)'$

$= 3\tan^2 2x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)'$

$= \dfrac{3\tan^2 2x}{\cos^2 2x}\cdot 2$

$= \boldsymbol{\dfrac{6\tan^2 2x}{\cos^2 2x}}$

(2) $y' = -\sin\sqrt{x^2+1}\cdot(\sqrt{x^2+1})'$

$= -\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+1)'$

$= -\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$

$= \boldsymbol{-\dfrac{x\sin\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}$

(3) $y' = \{(2x+1)^3\}'(x^2-x+1)^2$

$\qquad + (2x+1)^3\{(x^2-x+1)^2\}'$

$= 3(2x+1)^2(2x+1)'(x^2-x+1)^2$

$\quad + (2x+1)^3\cdot 2(x^2-x+1)(x^2-x+1)'$

$= 3(2x+1)^2\cdot 2(x^2-x+1)^2$

$\quad + 2(2x+1)^3(x^2-x+1)(2x-1)$

$= 6(2x+1)^2(x^2-x+1)^2$

$\qquad + 2(2x+1)^3(x^2-x+1)(2x-1)$

$= 2(2x+1)^2(x^2-x+1)$

$\quad \times\{3(x^2-x+1)+(2x-1)(2x+1)\}$

$= 2(2x+1)^2(x^2-x+1)$

$\qquad \times(3x^2-3x+3+4x^2-1)$

$\boldsymbol{= 2(2x+1)^2(x^2-x+1)(7x^2-3x+2)}$

問 4

(1) $y' = x'\cdot\log x + x(\log x)'$

$= 1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x}$

$\boldsymbol{= \log x + 1}$

(2) $y' = \dfrac{(\log x)'\cdot x - \log x\cdot x'}{x^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x\cdot 1}{x^2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1-\log x}{x^2}}$

(3) $y' = \dfrac{1}{3x+1}\cdot(3x+1)'$

$= \boldsymbol{\dfrac{3}{3x+1}}$

(4) $y' = \dfrac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'$

$= \boldsymbol{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

（5）$y' = \dfrac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)'$

$= \dfrac{-\sin x}{\cos x}$

$= \boldsymbol{-\tan x}$

（6）$y' = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot (e^x + e^{-x})'$

$= \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \{e^x + e^{-x} \cdot (-x)'\}$

$= \boldsymbol{\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$

問 5

（1）$y = \log(x+1)^4 - \log(x-1)^3$

$= 4\log(x+1) - 3\log(x-1)$

よって

$y' = 4 \cdot \dfrac{1}{x+1} \cdot (x+1)' - 3 \cdot \dfrac{1}{x-1} \cdot (x-1)'$

$= \dfrac{4}{x+1} - \dfrac{3}{x-1}$

$= \dfrac{4(x-1) - 3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x-7}{(x+1)(x-1)}}$

（2）$y = \log(\sin x) - \log x$

よって

$y' = \dfrac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' - \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}}$

（3）$y = \log(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$

よって

$y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)'$

$= \dfrac{2x}{2(x^2+1)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x}{x^2+1}}$

（4）$y = \log x(x^2+4)^{\frac{1}{3}}$

$= \log x + \log(x^2+4)^{\frac{1}{3}}$

$= \log x + \dfrac{1}{3}\log(x^2+4)$

よって

$y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x^2+4} \cdot (x^2+4)'$

$= \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{3(x^2+4)}$

$= \dfrac{3(x^2+4) + 2x \cdot x}{3x(x^2+4)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{5x^2+12}{3x(x^2+4)}}$

問 6

$y = x^\alpha$ とおき，両辺の自然対数をとると

$\log y = \log x^\alpha$

$= \alpha \log x$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{d}{dy}(\log y)\,\dfrac{dy}{dx} = \alpha \cdot \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1}{y} \cdot y' = \dfrac{\alpha}{x}$

よって

$y' = y \cdot \dfrac{\alpha}{x}$

$= x^\alpha \cdot \dfrac{\alpha}{x}$

$= \alpha \cdot \dfrac{x^\alpha}{x}$

$= \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

したがって，$\boldsymbol{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$

問 7

（1）両辺の自然対数をとると

$\log y = \log x^{\sin x}$

$= \sin x \log x$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{d}{dy}(\log y)\,\dfrac{dy}{dx} = (\sin x)'\log x + \sin x(\log x)'$

$\dfrac{1}{y} \cdot y' = \cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x}$

よって

$y' = y\left(\cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$

$= x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$

$= \boldsymbol{x^{\sin x - 1}(x\cos x \log x + \sin x)}$

（2）両辺の自然対数をとると

$\log y = \log x^{\frac{1}{x}}$

$= \dfrac{1}{x}\log x$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{d}{dy}(\log y)\,\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{1}{x}\right)'\log x + \dfrac{1}{x}(\log x)'$

$\dfrac{1}{y} \cdot y' = -\dfrac{1}{x^2} \cdot \log x + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{-\log x + 1}{x^2}$

よって

$$y' = y \cdot \frac{-\log x + 1}{x^2}$$
$$= x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-\log x + 1}{x^2}$$
$$= \boldsymbol{x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x)}$$

問 8

（1）$y' = \frac{1}{3x-2} \cdot (3x-2)'$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{3x-2}}$$

（2）$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'$
$$= \boldsymbol{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

問 9

（1）$y' = \boldsymbol{\frac{1}{x \log 10}}$

（2）$y' = \frac{1}{(x^2+1)\log 2} \cdot (x^2+1)'$
$$= \boldsymbol{\frac{2x}{(x^2+1)\log 2}}$$

問 10

（1）$y = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ とおくと

$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = \frac{\pi}{3}$

よって，$\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

（2）$y = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと

$\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = \frac{\pi}{4}$

よって，$\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

問 11

$\mathrm{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

よって，$\sin A = \frac{4}{5}$ であるから

$\boldsymbol{A = \sin^{-1} \frac{4}{5}}$

同様に，$\sin B = \frac{3}{5}$ であるから

$\boldsymbol{B = \sin^{-1} \frac{3}{5}}$

問 12

（1）$y = \cos^{-1} \frac{1}{2}$ とおくと

$\cos y = \frac{1}{2} \quad \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = \frac{\pi}{3}$

よって，$\cos^{-1} \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

（2）$y = \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ とおくと

$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = \frac{\pi}{6}$

よって，$\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

（3）$y = \tan^{-1} 1$ とおくと

$\tan y = 1 \quad \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = \frac{\pi}{4}$

よって，$\tan^{-1} 1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

（4）$y = \tan^{-1} \sqrt{3}$ とおくと

$\tan y = \sqrt{3} \quad \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = \frac{\pi}{3}$

よって，$\tan^{-1} \sqrt{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

問 13

図より，$\cos y = \frac{x}{1} = x$ であるから

$y = \cos^{-1} x \cdots$ ①

また，$\sin y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ であるから

$y = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2} \cdots$ ②

①，②より

$\cos^{-1} x = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$

問 14

（1）$y = \sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくと

$\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = -\frac{\pi}{3}$

よって，$\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{\pi}{3}}$

（2）$y = \sin^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおくと

$\sin y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = -\frac{\pi}{4}$

よって，$\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{4}}$

（3）$y=\cos^{-1}0$ とおくと

$\cos y=0\ \ (0\leqq y\leqq\pi)$ であるから

$y=\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\cos^{-1}0=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

問 15

（1）$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\cdot(3x)'$

$=\boldsymbol{-\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}$

（2）$y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{x}{3}\right)'$

$=\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{9}}\cdot\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{3+\dfrac{x^2}{3}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3}{9+x^2}}$

（3）$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})'$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}}$

問 16

$$y'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)'$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{a^2\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{x^2+a^2}$$

問 17

$f(x)=x^3-x^2-2x+1$ とおくと，$f(x)$ は区間 $[-2,-1]$ で連続である．

また

$$f(-2)=(-2)^3-(-2)^2-2\cdot(-2)+1$$

$$=-8-4+4+1$$

$$=-7<0$$

$$f(-1)=(-1)^3-(-1)^2-2\cdot(-1)+1$$

$$=-1-1+2+1$$

$$=1>0$$

よって，方程式 $f(x)=0$ は，区間 $(-2,-1)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

問 18

$f(x)=\sin 2x-x$ とおくと，$f(x)$ は区間 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続である．

また

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$=1-\frac{\pi}{4}=\frac{4-\pi}{4}>0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$=\sin\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{\pi}{2}<0$$

よって，方程式 $f(x)=0$ すなわち $\sin 2x=x$ は，区間 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

∎